EESP via método da Eq. Normal - Exemplo

Sistema sem perdas nas LT's, 2 barras: (modelo de medição não linear)

- barra de referência: barra 1;
- medidas disponíveis:

Medida (tipo)	Valor medido (pu)	Desvio Padrão (pu)
t_{12}	5,05	$\frac{1}{30}$
t_{21}	-5,02	$\frac{1}{30}$
u_{12}	1,36	$\frac{1}{30}$
u_{21}	1,31	$\frac{1}{30}$
V_1	1,003	$\frac{1}{300}$
V_2	1,002	$\frac{1}{300}$

Tabela: Quantidades medidas e desvios padrões

- parâmetros das LT's: $r_{12} = 0$, $x_{12} = 0,1$ pu e $b_{sh} = 0$.

EESP via método de Gauss-Newton - Exemplo

Solução inicial: perfil plano de tensões;
Tolerâncias: 10^{-3} pu (radianos e volts)
Vetor de estado:

$$\mathbf{x}^t = \begin{bmatrix} \delta_2 & V_1 & V_2 \end{bmatrix}$$

Vetor das quantidades medidas:

$$\mathbf{z}^t = \begin{bmatrix} t_{12} & t_{21} & u_{12} & u_{21} & V_1 & V_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}^t = \begin{bmatrix} 5,15 & -5,02 & 1,36 & 1,31 & 1,003 & 1,002 \end{bmatrix}$$

Matriz de co-variância dos erros de medição: matriz diagonal de ordem 6×6;

$$\mathbf{R} = diag \begin{pmatrix} \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{300} & \frac{1}{300} \end{pmatrix}$$

EESP via método de Gauss-Newton - Exemplo

Vetor das funções não lineares correspondente às medidas:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -10V_1V_2\sin\delta_2 \\ 10V_1V_2\sin\delta_2 \\ 10V_1^2 - 10V_1V_2\cos\delta_2 \\ 10V_2^2 - 10V_1V_2\cos\delta_2 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Matriz Jacobiana:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -10V_1V_2\cos\delta_2 & -10V_2\sin\delta_2 & -10V_1\sin\delta_2 \\ 10V_1V_2\cos\delta_2 & 10V_2\sin\delta_2 & 10V_1\sin\delta_2 \\ 10V_1V_2\sin\delta_2 & 20V_1 - 10V_2\cos\delta_2 & -10V_1\cos\delta_2 \\ 10V_1V_2\sin\delta_2 & -10V_2\cos\delta_2 & 20V_2 - 10V_1\cos\delta_2 \\ 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{bmatrix}$$

EESP via método de Gauss-Newton - Exemplo

Primeira iteração:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc} 0,0 & 1,0 & 1,0 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}^{(0)})^t = \left[\begin{array}{cccccc} 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 1,0 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{z}^t - \mathbf{h}(\mathbf{x}^{(0)})^t = \left[\begin{array}{cccccc} 5,05 & -5,02 & 1,36 & 1,31 & 0,003 & 0,002 \end{array}\right]$$

Soma Ponderada dos Quadrados dos Resíduos:

$$J(\mathbf{x}^{(0)}) = \sum_{i=1}^{6} \left[\frac{z_i - h_i(\mathbf{x}^{(0)})}{\sigma_i}\right]^2$$
$$= 4,88 \times 10^5$$

EESP via método de Gauss-Newton - Exemplo

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} -10,0 & 0,0 & 0,0 \\ 10,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 10,0 & -10,0 \\ 0,0 & -10,0 & 10,0 \\ 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{bmatrix}$$

Matriz Ganho ou de Informação:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}^{(0)})^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 5,556 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 6,667 & 4,444 \\ 0,0 & 4,444 & 6,667 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

EESP via método de Gauss-Newton - Exemplo

Vetor do lado direito da equação normal:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}^{(0)})^t \mathbf{R}^{-1} \left(\mathbf{z}^t - \mathbf{h}(\mathbf{x}^{(0)})^t\right) =$$

$$900 \begin{bmatrix} -10,0 & 10,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 10,0 & -10,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & -10,0 & 10,0 & 0,0 & 1,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5,05 \\ -5,02 \\ 1,36 \\ 1,31 \\ 0,003 \\ 0,002 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\begin{bmatrix} \Delta\hat{\delta}_2 \\ \Delta\hat{V}_1 \\ \Delta\hat{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5035 \; rad \\ 0,0036 \\ 0,0014 \end{bmatrix}$$

Vetor de estados para a segunda iteração:

$$\mathbf{x}^{(1)^t} = \begin{bmatrix} -0,5035 & 1,0036 & 1,0014 \end{bmatrix}$$

Sumário das iterações:

Variável	Iter. 0	Iter. 1	Iter. 2	Iter. 3
δ_2	0,0	-0,5035	-0,5236	-0,5235
V_1	1,0	1,0036	1,0039	1,0040
V_2	1,0	1,0014	1,0017	1,0018
$J(\mathbf{x})$	4,88 $\times 10^5$	76,6	0,861	0,85