- A função objetivo é aumentada com a adição do termo:

$$\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}})^t \mathbf{P}^{-1}(\hat{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}})$$

- $\bar{\mathbf{x}}$: vetor de informações *a priori* das variáveis de estado;
- $\mathbf{P}$: matriz de covariância de $\bar{\mathbf{x}}$;

- Condições de otimalidade para o problema aumentado:

$$\left[\mathbf{H}^t\,\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{H} + \mathbf{P}^{-1}\right]\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x} = \mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{z} + \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\Delta}\overline{\mathbf{x}}$$

- $\boldsymbol{\Delta}\overline{\mathbf{x}} \triangleq \left(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^k\right)$

$$\mathbf{Q}\ \left(\mathbf{R}^{-1/2}\ \left[\ \mathbf{H}\ \middle|\ \mathbf{\Delta z}\ \right]\right) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{U} & \mathbf{c} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e} \end{array}\right]$$

- $\mathbf{Q}$: matriz que armazena a transformação ortogonal;
- $\mathbf{U}$: matriz triangular superior.

Com essa transformação, pode-se obter o vetor de estados $\hat{\mathbf{x}}$ resolvendo-se o sistema triangular:

$$\mathbf{U}\ \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{c}$$

A soma ponderada dos quadrados dos resíduos é obtida do vetor $\mathbf{e}$, como subproduto do processo de triangularização.

- Consiste em se aplicar rotações sucessivas entre os elementos de um vetor linha **p** da matriz a ser triangularizada e as linhas de uma matriz triangular **U** até que os elementos de **p** sejam completamente zerados;
- As operações são realizadas por linhas.

Inicialmente:

$$\begin{array}{rcllllll} \mathbf{u} = & [0\ldots0 & u_i & \ldots & u_k & \ldots & u_{n+1}] \\ \mathbf{p} = & [0\ldots0 & p_i & \ldots & p_k & \ldots & p_{n+1}] \end{array}$$

Após a rotação, os vetores assumem a forma:

$$\begin{array}{rcllllll} \mathbf{u}' = & [0\ldots0 & u'_i & \ldots & u'_k & \ldots & u'_{n+1}] \\ \mathbf{p}' = & [0\ldots0 & p'_i & \ldots & p'_k & \ldots & p'_{n+1}] \end{array}$$

As rotações a serem aplicadas aos vetores **u** e **p** são definidas como:

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u' \\ p' \end{bmatrix}$$

- $c^2 + s^2 = 1.$

Os escalares c e s são obtidos a partir da condição imposta que $p'_i = 0$, e são dados por:

$$c = \frac{u_i}{\sqrt{u_i^2 + p_i^2}}$$
$$s = \frac{p_i}{\sqrt{u_i^2 + p_i^2}}$$

Rotações de Givens com três multiplicadores (G3M)

- Utiliza três operações em cada etapa elementar;
- Evita cálculos de raízes quadradas na implementação das rotações.

Parte da decomposição da matriz **U** como:

$$\mathbf{U} = \mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\overline{\mathbf{U}}$$

- **D**: matriz diagonal;
- $\overline{\mathbf{U}}$: matriz triangular superior unitária.

O vetor $\mathbf{\Delta x}$ é obtido com a solução do sistema:

$$\overline{\mathbf{U}}\ \mathbf{\Delta x} = \overline{\mathbf{c}}$$

Rotações G3M: Etapas elementares

- Supõe-se que cada linha da matriz $\mathbf{H}$ (aumentada) a ser rotacionada é escalonada por um fator $\sqrt{w}$;
- As linhas da matriz triangular $\mathbf{U}$ são escalonadas por $\sqrt{d}$.

Desse modo:

$$\begin{array}{lllllll} \mathbf{u} = & [0\ldots0 & \sqrt{d} & \ldots & \sqrt{d}\;\overline{u}_k & \ldots & \sqrt{d}\;\overline{u}_{n+1}] \\ \mathbf{p} = & [0\ldots0 & \sqrt{w}p_i & \ldots & \sqrt{w}p_k & \ldots & \sqrt{w}p_{n+1}] \end{array}$$

Após a rotação, os vetores assumem a forma:

$$\begin{array}{lllllll} \mathbf{u}' = & [0\ldots0 & \sqrt{d'} & \ldots & \sqrt{d'}\;\overline{u}'_k & \ldots & \sqrt{d'}\;\overline{u}'_{n+1}] \\ \mathbf{p}' = & [0\ldots0 & 0 & \ldots & \sqrt{w'}p_k & \ldots & \sqrt{w'}p'_{n+1}] \end{array}$$

Rotações G3M: Etapas elementares

As rotações a serem aplicadas aos vetores **u** e **p** são definidas como:

$$\begin{aligned} d' &= d + wp_i^2 \\ w' &= d\ w/d' \\ \overline{c} &= d/d' \\ \overline{s} &= wp_i/d' \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} p_k' &= p_k - p_i \overline{u}_k \\ \overline{u}_k' &= \overline{c}\,\overline{u}_k + \overline{s} p_k \end{aligned}\right\}, \qquad k = i+1 \ldots n+1$$

Os vetores **w** e **d** são inicializados como:

- $\mathbf{d} = \mathbf{0}$;
- $\mathbf{w} = \mathbf{1}/\sigma^{\mathbf{2}}$.

- Analogamente ao peso ~~vetor~~ **w**, o valor **d** também pode ser visto como um peso, mas neste caso associado aos estados (existem tantos d's quantas são as variáveis de estado);
- Em outras palavras, d_i é o fator de ponderação ~~peso~~ para a informação *a priori* disponível para a variável de estado x_i.

Desse modo, o método G3M permite a utilização de informações *a priori* através da inicialização de d_i como:

$$d_i = 1/\bar{\sigma}_i^2, \qquad i = 1, \ldots, n$$

- $\overline{\sigma}_i^2$ = variância da informação *a priori* para a variável de estado i.