

Capítulo 3

Método da Equação Normal

3.1 Introdução

Este capítulo apresenta a formulação da EESP como um problema de mínimos quadrados ponderados e sua solução através do método clássico, que se baseia na solução da chamada Equação Normal de Gauss. O primeiro deles, que se caracteriza pela simplicidade na formulação, utiliza a linearização do modelo de medição e estabelece uma função-objetivo para o modelo linearizado. Têm-se então a solução iterativa de uma seqüência de problemas de estimação baseados no modelo linear. Esta abordagem é descrita na Subseção 3.2.1.

O segundo desenvolvimento que leva à Equação Normal de Gauss é apresentado na Subseção 3.2.2 e segue um procedimento mais rigoroso, utilizando o método de Newton e a aproximação de Gauss para a matriz Hessiana do problema de otimização não-linear.

As características da Equação Normal de Gauss e considerações sobre os aspectos computacionais ligados à sua solução são discutidos nas Seções 3.2.3 e 3.2.4, respectivamente. Enfatiza-se o fato de que a Equação Normal apresenta uma tendência inerente a problemas de condicionamento numérico, que podem comprometer sua solução.

A Seção 3.3 é dedicada ao desenvolvimento de duas versões desacopladas rápidas do estimador de estados, bem como de uma versão linearizada (“dc”) do estimador de estados.

O capítulo é concluído com a descrição do tratamento de barras de injeção nula através do uso de restrições de igualdade ao problema de estimação de estados.

3.2 O Problema de Mínimos Quadrados Ponderados

Conforme mencionado no capítulo anterior, a estimação do estado de um sistema de potência pode ser formulada como um problema de Mínimos Quadrados Ponderados da forma

$$\min_{\hat{\mathbf{x}}} J(\hat{\mathbf{x}}) = [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})]' \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})] \quad (3.1)$$

onde \mathbf{x} é o vetor de estado, \mathbf{z} é o vetor das quantidades medidas e \mathbf{R} é a matriz de co-variância dos erros de medição.

A condição de otimalidade para o problema representado pela Eq. (3.1) é expressa por

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}'(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})] = \mathbf{0}$$

onde $\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}) = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}}$ é a matriz de primeiras derivadas das funções não lineares do vetor $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, calculada no ponto representado pelo vetor de estado estimado $\hat{\mathbf{x}}$.

Apesar da minimização mostrada na Eq. (3.1) não envolver restrições, a busca da solução ótima do problema de mínimos quadrados ponderados apresenta considerável dificuldade. O índice a ser otimizado é representado por uma função quadrática, expressa em termos de um vetor de equações não-lineares relacionando os estados às quantidades medidas. Adicionalmente, a Eq. (3.2), que representa a condição de otimalidade, não tem solução *fechada* e portanto requer o uso de métodos iterativos. Diversos métodos numéricos poderiam ser aplicados na resolução de um problema deste tipo porém, a natureza quadrática da função objetivo e ausência de restrições tornam este problema de otimização apropriado para a solução pelo método de Newton, descrito na seção subsequente.

3.2.1 Linearização do Modelo de Medição

A aplicação de métodos iterativos para obter a solução do problema de otimização não-linear expresso pela Eq. (3.1), requer que a estimativa corrente do vetor de estado seja atualizada com correções sucessivas dadas por

$$\hat{\mathbf{x}}^{k+1} = \hat{\mathbf{x}}^k + \Delta \mathbf{x} \quad (3.2)$$

Para a determinação da correção $\Delta \mathbf{x}$ da Eq. (3.2), considere inicialmente a linearização das equações $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ em torno do ponto $\hat{\mathbf{x}}^k$ e ao longo da direção $(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}^k)$; isto é,

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}^k) + \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}^k) (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}^k)$$

onde todos os termos foram previamente definidos.

A substituição desta expressão na equação não linear $\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\eta}$ fornece

$$\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}^k) = \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}^k) (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}^k) + \boldsymbol{\eta}$$

a qual representa o modelo de medição linearizado, cuja forma compacta é

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{z} &= \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}^k) \Delta \mathbf{x} + \boldsymbol{\eta} \\ E(\boldsymbol{\eta}) &= 0 \quad E(\boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\eta}^t) = \mathbf{R} \end{aligned}$$

onde $\Delta \mathbf{z} = \mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}^k)$ é o vetor dos resíduos de medição e $\Delta \mathbf{x} = (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}^k)$.

Em termos do modelo de medição linearizado, a função objetivo do problema de Mínimos Quadrados Ponderados da Eq. (3.1) é expressa por

$$J(\Delta \mathbf{x}) = [\Delta \mathbf{z} - \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}^k) \Delta \mathbf{x}]^t \mathbf{R}^{-1} [\Delta \mathbf{z} - \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}^k) \Delta \mathbf{x}]$$

e a correspondente condição de otimalidade é dada por

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}^t(\hat{\mathbf{x}}^k) \mathbf{R}^{-1} [\Delta \mathbf{z} - \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}^k) \Delta \mathbf{x}] = \mathbf{0}$$

ou, alternativamente

$$[\mathbf{H}^t(\hat{\mathbf{x}}^k) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}^k)] \Delta \mathbf{x} = \mathbf{H}^T(\hat{\mathbf{x}}^k) \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{z} \quad (3.3)$$

A expressão 3.3 é denominada *Equação Normal de Gauss* e representa o sistema linear a ser resolvido a cada iteração para a determinação do incremento do vetor de estado $\Delta \mathbf{x}$.

3.2.2 Método de Gauss-Newton

A correção $\Delta \mathbf{x}$ da Eq. (3.3) também pode ser determinada através do método de Gauss-Newton. Neste caso, a função $J(\mathbf{x})$ da Eq. (3.1) é expandida em série de Taylor, em torno do ponto $\hat{\mathbf{x}}^k$ e ao longo da direção $\Delta \mathbf{x}$, até o termo de segunda ordem; isto é,

$$J(\hat{\mathbf{x}}^k + \Delta \mathbf{x}) = J(\hat{\mathbf{x}}^k) + \left. \frac{\partial J(\mathbf{x})^t}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}^k} \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^t \left. \frac{\partial^2 J(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}^k} \Delta \mathbf{x}$$

onde, $\left. \frac{\partial J(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}^k}$ e $\left. \frac{\partial^2 J(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}^k}$ são respectivamente o vetor de primeiras derivadas (gradiente) e a matriz de segundas derivadas (Hessiana) de $J(\mathbf{x})$ com relação a \mathbf{x} , calculados no ponto que representa a estimativa corrente $\hat{\mathbf{x}}^k$.

O mínimo da função $J(\hat{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{x})$ é obtido diferenciando-se a mesma em relação a $\Delta \mathbf{x}$ e igualando o resultado a zero; isto é,

$$\frac{\partial J}{\partial (\Delta \mathbf{x})} = \left. \frac{\partial J(\mathbf{x})^t}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}^k} + \left. \frac{\partial^2 J(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}^k} \Delta \mathbf{x} = 0$$

ou, alternativamente

$$\left. \frac{\partial^2 J(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}^k} \Delta \mathbf{x} = - \left. \frac{\partial J(\mathbf{x})^t}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}^k} \quad (3.4)$$

O vetor gradiente $\left. \frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}^k}$ é dado por

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}^k} &= \left(\frac{\partial \{[\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})]^t \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})]\}}{\partial \mathbf{x}} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}^k} \\ &= -2 \left(\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^t \Big|_{\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{x}}^k} \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})]_{\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{x}}^k} \end{aligned}$$

ou, alternativamente

$$\left. \frac{\partial J(\mathbf{x})^t}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}^k} = -2 \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}^k)^t \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{z}$$

onde, $\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}^k)$ e $\Delta \mathbf{z}$ têm os mesmos significados mencionados anteriormente.

Aplicando-se o mesmo procedimento para o cálculo da matriz de segundas derivadas de $J(\mathbf{x})$ obtém-se

$$\left. \frac{\partial^2 J(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}^k} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[-2 \left(\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^t \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})] \right]_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}^k}$$

Supondo-se que, nas proximidades da solução as variações da matriz $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ são desprezíveis; isto é

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \approx \text{constante}$$

então

$$\left. \frac{\partial^2 J(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}^k} \approx -2 \mathbf{H}^t(\hat{\mathbf{x}}^k) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}^k)$$

tal que é possível re-escrever a Eq. (3.4) como

$$\mathbf{H}^t(\hat{\mathbf{x}}^k) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}^k) \Delta \mathbf{x} = \mathbf{H}^t(\hat{\mathbf{x}}^k) \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{z} \quad (3.5)$$

a qual é a mesma expressão obtida através do modelo de medição linearizado .

3.2.3 A Equação Normal de Gauss

No sistema linear expresso pela Eq. (3.5), a matriz \mathbf{R} é diagonal. Por esta razão, o produto matricial $[\mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}]$, denominado *Matriz Ganho* ou *de Informação*, é aproximadamente duas vezes mais denso do que a matriz \mathbf{H} . Por outro lado, a matriz \mathbf{H} é esparsa e portanto a matriz de informação possui também um número reduzido de elementos não-nulos, o que possibilita o uso de técnicas de compactação e esparsidade. Além disso, esta matriz é simétrica em estrutura e valores numéricos e positiva semidefinida, o que facilita a sua fatoração [1]. No caso particular de EESP, o plano de medição deve elaborado de forma que o número e a configuração das quantidades medidas assegurem a não-singularidade desta matriz (sistema *observável*).

Os elementos da matriz Jacobiana $\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}^k)$ são obtidos derivando-se as expressões de $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ (equações do fluxo de potência nas linhas de transmissão, injeção de potência ativa e reativa nas barras, magnitude das tensões, etc) em relação ao vetor de estado \mathbf{x} (magnitude e ângulo da tensão nas barras do sistema). Apesar da simplicidade com que se pode expressar essas derivadas analiticamente, o cálculo de seus valores numéricos deve ser feito da forma mais eficiente possível, já que é requisitado repetidas vezes na formulação convencional. Alternativas para computar estes elementos, que reduzem significativamente os requisitos de cálculo para a obtenção dos mesmos, são apresentadas na referência [2].

O processo iterativo é iniciado a partir uma estimativa inicial $\hat{\mathbf{x}}^0$ e a cada iteração os incrementos nas variáveis de estado $\Delta \hat{\mathbf{x}}$ são obtidos resolvendo-se a Eq. (3.5). A atualização do vetor de estado é obtida através da relação iterativa representada na Eq. (3.2), até que o seguinte critério de parada seja satisfeito:

$$\max_i |\Delta \hat{x}_i| \leq \epsilon \quad (3.6)$$

onde ϵ é uma tolerância pré-estabelecida. Este critério indica que o processo iterativo é encerrado quando a magnitude dos ajustes nas variáveis de estado for desprezível.

3.2.4 Aspectos Computacionais

O problema representado pela equação normal 3.5 possui tendência a um mal condicionamento numérico. Isto pode ser verificado analisando-se o número de condicionamento da matriz de informação.

O *Número de Condicionamento Espectral* de uma matriz \mathbf{C} é definido como

$$Cond(\mathbf{C}) = \frac{\sigma_M}{\sigma_m} \quad (3.7)$$

onde, (σ_M) e (σ_m) são o máximo e o mínimo auto-valores da matriz $\mathbf{C}^t \mathbf{C}$.

A grandeza $Cond(\mathbf{C})$ mede o quanto pequenas perturbações na matriz \mathbf{C} afetam a solução do sistema linear $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Para a Equação Normal de Gauss, pode-se provar que

$$Cond(\mathbf{H}^t \mathbf{H}) = (Cond(\mathbf{H}))^2$$

ou seja, se \mathbf{H} não é bem condicionada, $\mathbf{H}^t \mathbf{H}$ será mal condicionada.

O sistema linear da Eq. (3.5) pode ser resolvido aplicando-se o método de Cholesky, utilizando para a ordenação da matriz de informação, 2º método de Tinney (também conhecido como *Algoritmo da Valência Mínima*) [1]. O procedimento para a obtenção da solução da equação normal é pode ser sumarizado nos seguintes passos:

- Decomposição da matriz de informação $\mathbf{A} = [\mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}]$ (suposta simétrica e positiva-definida), via método de Cholesky, em $\mathbf{A} = \mathbf{L}^t \mathbf{L}$;
- Substituição inversa no sistema $\mathbf{L}^t \mathbf{y} = \mathbf{b}$, para a obtenção de \mathbf{y} (onde $\mathbf{b} = \mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{z}$), e substituição direta no sistema $\mathbf{L} \Delta \mathbf{x} = \mathbf{y}$ para a obtenção de $\Delta \mathbf{x}$.

Desde que a estrutura da matriz de informação não é modificada durante o processo iterativo, a ordenação e a estrutura da matriz \mathbf{A} podem ser determinadas apenas uma vez, o que implica em agilizar o processo computacional, já que o método é iterativo e requer várias soluções da equação normal.

Verifica-se ainda, que nas últimas iterações do processo as variações nos valores numéricos da matriz \mathbf{H} são praticamente desprezíveis, o que permite manter esta matriz constante durante algumas iterações e assim reduzir o esforço computacional necessário para a estimação do vetor de estados.

3.2.5 Algoritmo

A estimação de estados através do método da equação normal (Gauss-Newton) pode ser sumarizada nos seguintes passos:

1. determinar a estrutura das matrizes Jacobiana $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ e de informação $[\mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}]$, e a ordenação da matriz de informação;
2. arbitrar uma estimativa inicial para o vetor de estados $\hat{\mathbf{x}}^0$;
3. calcular os valores numéricos de $\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}^k)$, $\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}^k)^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}^k)$, $\Delta \mathbf{z} = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}^k) - \mathbf{z}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{H}^t(\hat{\mathbf{x}}^k) \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{z}$;
4. fatorar a matriz de informação $[\mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}] = \mathbf{L} \mathbf{L}^t$;
5. resolver o sistema linear $\mathbf{L} \mathbf{L}^t \Delta \mathbf{x}^k = \mathbf{b}$;
6. atualizar o vetor de estados $\hat{\mathbf{x}}^{k+1} = \hat{\mathbf{x}}^k + \Delta \mathbf{x}^k$;
7. verificar convergência: se $\max |\Delta x_i^k| \leq \epsilon$ (em geral $\epsilon = 10^{-4} pu$), calcular os fluxos de potência nas linhas de transmissão e as injeções de potência nas barras e finalizar o processo iterativo.
8. fazer $k = k + 1$ e retornar ao passo **3**;

Nas proximidades da solução final do problema de mínimos quadrados ponderados não há variação considerável nos termos da matriz Jacobiana \mathbf{H} , e portanto esta pode ser mantida constante nas últimas iterações. Esta estratégia reduz o esforço computacional demandado pelo processo iterativo, desde que nas iterações finais apenas o cálculo de $\Delta \mathbf{z} = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}^{(k)}) - \mathbf{z}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{H}^t(\hat{\mathbf{x}}^{(k)}) \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{z}$ é requerido;

3.3 Estimadores Desacoplados

Os *estimadores desacoplados* são baseados nas mesmas aproximações do fluxo de potência desacoplado rápido. As características principais desses estimadores são a exploração do desacoplamento $P\delta - QV$ e o uso de matrizes constantes (matriz de informação $\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}})^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}})$ e/ou matriz Jacobiana \mathbf{H}) [3].

Para mostrar como o desacoplamento $P\delta - QV$ pode ser explorado nos algoritmos de estimação de estados, suponha que o vetor das quantidades medidas é particionado como

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_P \\ \mathbf{z}_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{p} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{q} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}$$

onde, \mathbf{z}_P corresponde aos termos \mathbf{p} e \mathbf{t} , os quais são os vetores com as medidas de injeção e fluxo de potência ativa, respectivamente; e \mathbf{z}_Q corresponde aos termos \mathbf{q} , \mathbf{u} e \mathbf{V} , os quais representam os vetores com as medidas de injeção e fluxo e de potência reativa nas linhas de transmissão e magnitude da tensão nas barras.

Adotando-se um particionamento semelhante para as funções não lineares que relacionam as quantidades medidas aos estados e para o vetor dos erros de medição, o modelo de medição pode ser expresso como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_P \\ \mathbf{z}_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x})_P \\ \mathbf{h}(\mathbf{x})_Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_P \\ \boldsymbol{\eta}_Q \end{bmatrix}$$

com

$$E \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_P \\ \boldsymbol{\eta}_Q \end{bmatrix} \right\} = 0 \quad E \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_P \\ \boldsymbol{\eta}_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_P \\ \boldsymbol{\eta}_Q \end{bmatrix}^t \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_Q \end{bmatrix}$$

onde, $\mathbf{h}(\mathbf{x})_P$, $\mathbf{h}(\mathbf{x})_Q$, $\boldsymbol{\eta}_P$ e $\boldsymbol{\eta}_Q$ são os vetores com as funções não lineares e os vetores dos erros de medição correspondentes às medidas *ativas* e *reativas*, respectivamente; e \mathbf{R}_P e \mathbf{R}_Q representam as submatrizes de covariância nos erros de medição associadas às medidas *ativas* e *reativas*, respectivamente.

A matriz Jacobiana das funções não lineares $\mathbf{h}(\mathbf{x})_P$ e $\mathbf{h}(\mathbf{x})_Q$, correspondente a este modelo de medição, pode ser escrita como

$$\mathbf{H}(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{P\delta} & \mathbf{H}_{PV} \\ \mathbf{H}_{Q\delta} & \mathbf{H}_{QV} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

onde, $\mathbf{H}_{P\delta} = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})_P}{\partial \boldsymbol{\delta}}$ e $\mathbf{H}_{PV} = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})_P}{\partial \mathbf{V}}$ são as submatrizes de primeiras derivadas das funções $\mathbf{h}(\mathbf{x})_P$ (relacionadas às medidas *ativas* com respeito ao ângulo e magnitude das tensões complexas nas barras; e $\mathbf{H}_{Q\delta} = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})_Q}{\partial \boldsymbol{\delta}}$ e $\mathbf{H}_{QV} = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})_Q}{\partial \mathbf{V}}$ são as submatrizes de primeiras derivadas das funções $\mathbf{h}(\mathbf{x})_Q$ (relacionadas às medidas *reativas* com respeito ao ângulo e magnitude das tensões complexas nas barras.

A matriz de informação $[\mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}]$ pode ser re-escrita de acordo com este particionamento, como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{P\delta}^t & \mathbf{H}_{Q\delta}^t \\ \mathbf{H}_{PV}^t & \mathbf{H}_{QV}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{P\delta} & \mathbf{H}_{PV} \\ \mathbf{H}_{Q\delta} & \mathbf{H}_{QV} \end{bmatrix}$$

tal que, o produto matricial indicado na última equação fornece

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{P\delta}^t \mathbf{R}_P^{-1} \mathbf{H}_{P\delta} + \mathbf{H}_{Q\delta}^t \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{H}_{Q\delta} & \mathbf{H}_{P\delta}^t \mathbf{R}_P^{-1} \mathbf{H}_{PV} + \mathbf{H}_{Q\delta}^t \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{H}_{QV} \\ \mathbf{H}_{PV}^t \mathbf{R}_P^{-1} \mathbf{H}_{P\delta} + \mathbf{H}_{QV}^t \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{H}_{Q\delta} & \mathbf{H}_{PV}^t \mathbf{R}_P^{-1} \mathbf{H}_{PV} + \mathbf{H}_{QV}^t \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{H}_{QV} \end{bmatrix}$$

ou, em forma compacta

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{P\delta} & \mathbf{A}_{PV} \\ \mathbf{A}_{Q\delta} & \mathbf{A}_{QV} \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{P\delta} &= \mathbf{H}_{P\delta}^t \mathbf{R}_P^{-1} \mathbf{H}_{P\delta} + \mathbf{H}_{Q\delta}^t \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{H}_{Q\delta} \\ \mathbf{A}_{PV} &= \mathbf{H}_{P\delta}^t \mathbf{R}_P^{-1} \mathbf{H}_{PV} + \mathbf{H}_{Q\delta}^t \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{H}_{QV} \\ \mathbf{A}_{Q\delta} &= \mathbf{H}_{PV}^t \mathbf{R}_P^{-1} \mathbf{H}_{P\delta} + \mathbf{H}_{QV}^t \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{H}_{Q\delta} \\ \mathbf{A}_{QV} &= \mathbf{H}_{PV}^t \mathbf{R}_P^{-1} \mathbf{H}_{PV} + \mathbf{H}_{QV}^t \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{H}_{QV} \end{aligned}$$

Em geral, sistemas de potência com nível de tensão acima de 69 kV possuem linhas de transmissão com alta relação $\frac{X}{R}$, de forma que as submatrizes $\mathbf{H}_{P\delta}$ e \mathbf{H}_{QV} predominam sobre \mathbf{H}_{PV} e $\mathbf{H}_{Q\delta}$ assim como as submatrizes $\mathbf{A}_{P\delta}$ e \mathbf{A}_{QV} predominam sobre \mathbf{A}_{PV} e $\mathbf{A}_{Q\delta}$. A exploração dessas características resulta no desenvolvimento dos dois tipos de estimadores descritos a seguir.

3.3.1 Estimadores Desacoplados no Algoritmo

O desacoplamento no algoritmo é baseado nas duas seguintes aproximações feitas na matriz de informação:

- as submatrizes $\mathbf{A}_{P\delta}$ e \mathbf{A}_{QV} são calculadas para o perfil plano de tensões, isto é, $V_i = 1,0$ p.u. e $\delta_i = 0^0$ para todas as barras do sistema de potência;
- as submatrizes \mathbf{A}_{PV} e $\mathbf{A}_{Q\delta}$ são desprezadas

Com estas suposições, o estimador desacoplado no algoritmo pode ser representado pela equação

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{P\delta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{QV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta\mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{P\delta}^t & \mathbf{H}_{Q\delta}^t \\ \mathbf{H}_{PV}^t & \mathbf{H}_{QV}^t \end{bmatrix} \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\delta, \mathbf{V})] \quad (3.9)$$

As iterações deste algoritmo são executadas da seguinte maneira:

- 1/2 iteração: cálculo do incremento $\Delta\delta$;

$$\mathbf{A}_{P\delta}\Delta\delta = [\mathbf{H}_{P\delta}^t(\delta^k, \mathbf{V}^k) \mid \mathbf{H}_{Q\delta}^t(\delta, \mathbf{V}^k)]\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{z} - \mathbf{h}(\delta^k, \mathbf{V}^k)] \quad (3.10)$$

$$\delta^{k+1} = \delta^k + \Delta\delta \quad (3.11)$$

- 1/2 iteração: cálculo do incremento $\Delta\mathbf{V}$;

$$\mathbf{A}_{QV}\Delta\mathbf{V} = [\mathbf{H}_{PV}^t(\delta_{k+1}, \mathbf{V}^k) \mid (\mathbf{H}_{QV}^t(\delta^{k+1}, \mathbf{V}^k)]\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{z} - \mathbf{h}(\delta^{k+1}, \mathbf{V}^k)] \quad (3.12)$$

$$\mathbf{V}^{k+1} = \mathbf{V}^k + \Delta\mathbf{V} \quad (3.13)$$

O estimador desacoplado no algoritmo converge para a mesma solução que seria obtida sem explorar o desacoplamento, apenas o número de iterações é modificado; ou seja, as aproximações feitas na matriz de informação afetam apenas a convergência do processo iterativo, sem alterar a solução final.

3.3.2 Estimadores Desacoplados no Modelo

Neste caso, as seguintes aproximações são feitas na matriz Jacobiana \mathbf{H} :

- a matriz Jacobiana é calculada para $V = 1,0$ p.u. e $\delta = 0^0$ para todas as barras do sistema;
- as submatrizes \mathbf{H}_{PV} e $\mathbf{H}_{Q\delta}$ são desprezadas;
- as resistências das linhas de transmissão são desprezadas no cálculo da submatriz $\mathbf{H}_{P\delta}$.

Com estas aproximações a matriz jacobiana $\mathbf{H}(\mathbf{V}, \delta)$ é expressa como

$$\mathbf{H}(\mathbf{V}, \delta) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{P\delta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{QV} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

As iterações para este algoritmo são executadas da seguinte maneira:

- 1/2 iteração: cálculo do incremento $\Delta\delta$

$$\mathbf{A}'_{P\delta}\Delta\delta = \mathbf{H}_{P\delta}^t\mathbf{R}_P^{-1}[\mathbf{z}_P - \mathbf{h}_P(\delta^k, \mathbf{V}^k)] \quad (3.15)$$

$$\delta^{k+1} = \delta^k + \Delta\delta \quad (3.16)$$

- 1/2 iteração: cálculo do incremento $\Delta\mathbf{V}$

$$\mathbf{A}'_{QV}\Delta\mathbf{V} = \mathbf{H}_{QV}^t\mathbf{R}_Q^{-1}[\mathbf{z}_Q - \mathbf{h}_Q(\delta^{k+1}, \mathbf{V}^k)] \quad (3.17)$$

$$\mathbf{V}^{k+1} = \mathbf{V}^k + \Delta\mathbf{V} \quad (3.18)$$

onde as submatrizes $\mathbf{A}'_{P\delta}$ e \mathbf{A}'_{QV} são calculadas considerando-se apenas as submatrizes $\mathbf{H}_{P\delta}$, \mathbf{R}_P e \mathbf{H}_{QV} , \mathbf{R}_Q , respectivamente; isto é,

$$\mathbf{A}'_{P\delta} = \mathbf{H}_{P\delta}^t\mathbf{R}_P^{-1}\mathbf{H}_{P\delta}$$

$$\mathbf{A}'_{QV} = \mathbf{H}_{QV}^t\mathbf{R}_Q^{-1}\mathbf{H}_{QV}$$

As aproximações utilizadas no estimador desacoplado no modelo podem alterar a solução final. Entretanto, estas modificações tendem a ser desprezíveis se o nível de magnitude de tensão do sistema for alto (EAT ou UAT, por exemplo).

3.3.3 Estimador de Estados Linearizado

Embora de escasso interesse para aplicação prática, o estimador de estados linearizado é importante como ferramenta auxiliar no aprendizado dos métodos e técnicas ligados à estimação de estados em sistemas de potência. As hipóteses simplificadoras em que se baseia, embora limitem bastante a abrangência e validade de seus resultados, permitem a simplificação do problema para uma forma não-iterativa que facilita o entendimento dos diversos métodos de solução da estimação de estados. Além disso, o estimador linearizado é útil na interpretação de técnicas de processamento de erros grosseiros, de análise de observabilidade etc.

O estimador de estados linearizado baseia-se nas mesmas hipóteses simplificadoras utilizadas para o chamado *fluxo de potência CC*; ou seja,

1. as magnitudes da tensão nas barras do sistema de potência são todas consideradas iguais;
2. as resistências e admitâncias transversais das linhas de transmissão são supostas desprezíveis;
3. as aberturas angulares das linhas são supostas pequenas o suficiente para justificar a aproximação $\text{sen}(\delta_i - \delta_j) \approx (\delta_i - \delta_j)$ *rads*

Considerando-se estas hipóteses, as relações entre os fluxos e injeções de potência ativa com os ângulos das tensões nas barras são dadas por:

$$t_{ij} = \gamma_{ij} (\delta_i - \delta_j) \quad (3.19)$$

e

$$p_i = \sum_{k \in \Omega_i} t_{ik} \quad (3.20)$$

onde

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{x_{ij}}$$

é a *capacidade de transmissão da linha $i - j$* e Ω_i é o conjunto de barras adjacentes à barra i .

Desde que as magnitudes das tensões nas barras são supostas constantes, as únicas variáveis a serem estimadas são os ângulos das tensões, ou seja, o vetor de estados reduz-se ao vetor $\boldsymbol{\delta}$. Assim, tomando-se a barra 1 como barra de referência, o estado a ser estimado é representado por

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_N \end{bmatrix}$$

onde, conforme definido anteriormente, N é o número de barras do sistema.

Pelo mesmo motivo, o vetor de medidas \mathbf{z} envolve apenas medidas de fluxo e de injeção de potência ativa; isto é,

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \dots \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}$$

onde, \mathbf{t} é o vetor de medidas de fluxo de potência ativa e \mathbf{p} é o vetor de medidas de injeção de potência ativa.

Portanto, o modelo de medição para o estimador de estados linearizado é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{H}_P \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\eta}_P \\ E(\boldsymbol{\eta}_P) &= \mathbf{0} \quad E(\boldsymbol{\eta}_P \boldsymbol{\eta}_P^t) = \mathbf{R}_P \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde \mathbf{H}_P , $\boldsymbol{\eta}_P$ e \mathbf{R}_P têm o mesmo significado mencionado anteriormente.

É importante se observar que, segundo as equações (3.19) e (3.20), *as relações entre as quantidades medidas e os estados são lineares*. Conseqüentemente a matriz de observação \mathbf{H}_P do modelo de medição (3.21) é *constante*. Além disso, ainda a partir das equações (3.19) e (3.20), verifica-se que os elementos de \mathbf{H}_P são combinações lineares das capacidades das linhas. Estas características do modelo de medição simplificado permitem que a estimativa $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ do estado seja obtida de forma não-iterativa. Utilizando-se, por exemplo, o método da equação normal, as estimativas para os estados podem ser calculadas resolvendo-se o sistema linear

$$(\mathbf{H}_P^t \mathbf{R}_P^{-1} \mathbf{H}_P) \hat{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{H}_P \mathbf{R}_P^{-1} \mathbf{z}$$

Exemplo - Considere o sistema de 4 barras e o plano de medição representados na Fig. (3.1).

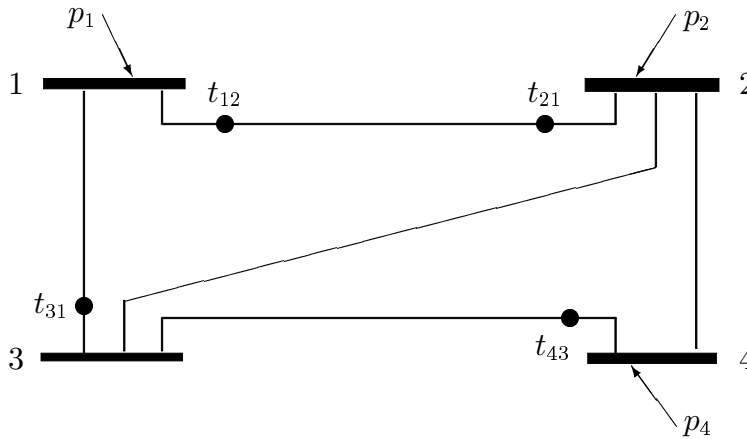


Figura 3.1: Sistema-exemplo para construção do modelo de medição linear.

O modelo de medição linear correspondente é dado por:

$$\begin{bmatrix} z_{t_{12}} \\ z_{t_{21}} \\ z_{t_{31}} \\ z_{t_{43}} \\ z_{p_1} \\ z_{p_2} \\ z_{p_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{31} & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_{34} & \gamma_{34} & 0 \\ -\gamma_{12} & -\gamma_{13} & 0 & 0 \\ \gamma_{12} + \gamma_{23} + \gamma_{24} & -\gamma_{23} & -\gamma_{24} & 0 \\ -\gamma_{24} & -\gamma_{34} & \gamma_{34} + \gamma_{24} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{t_{12}} \\ \boldsymbol{\eta}_{t_{21}} \\ \boldsymbol{\eta}_{t_{31}} \\ \boldsymbol{\eta}_{t_{43}} \\ \boldsymbol{\eta}_{p_1} \\ \boldsymbol{\eta}_{p_2} \\ \boldsymbol{\eta}_{p_4} \end{bmatrix}$$

A matriz de covariância dos erros de estimação é dada por:

$$\mathbf{R} = \text{diag}\{\sigma_{t_{12}}^2, \sigma_{t_{21}}^2, \sigma_{t_{31}}^2, \sigma_{t_{43}}^2, \sigma_{p_1}^2, \sigma_{p_2}^2, \sigma_{p_4}^2\}$$

onde os $\sigma_{t_{ij}}^2$ são as variâncias das medidas de fluxo de potência ativa e os $\sigma_{p^k}^2$ são as variâncias das medidas de injeção de potência ativa.

3.4 Modelagem das Barras de Injeção Nula

Sistemas de potência típicos geralmente contém um número de barras, denominadas *barras de transferência*, cujas injeções de potência ativa e reativa são nulas. Nessas barras, informações precisas sobre o valor das injeções de potência são disponíveis, sem o custo da telemedição, ruído ou erro associado às medidas convencionais. As barras de transferência fornecem portanto um conjunto de medidas adicionais a ser explorado na monitoração do estado do sistema, o qual pode ser modelado de duas formas no problema de estimação de estados. A primeira considera as injeções nulas como pseudomedidas de injeção de potência de alta precisão, o que implica na atribuição de ponderação elevada para estas medidas na solução do problema de mínimos quadrados. Apesar da simplicidade desta estratégia, o uso de fatores de ponderação de diferentes magnitudes para as medidas pode ocasionar problemas numéricos no processo iterativo, e assim prejudicar a convergência do algoritmo. Para evitar esses problemas, uma alternativa mais adequada consiste em representar as injeções nulas como restrições de igualdade a serem incluídas no problema de mínimos quadrados. Neste caso, a estimativa dos estados é obtida resolvendo-se o problema

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})]^t \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})] \\ \text{sujeito à} \quad & \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ é o vetor das equações não lineares que representam as injeções de potência nulas. Este procedimento melhora a convergência do processo iterativo além de evitar problemas de instabilidade numérica.

A solução do problema de mínimos quadrados com restrições de igualdade representado pela Eq. (3.22) é obtida formando-se da função Lagrangeana

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})]^t \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})] + \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

onde $\boldsymbol{\lambda}$ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange correspondentes às restrições de igualdade, com dimensão igual ao número de barras de transferência; e aplicando-se nesta função as condições de otimalidade de primeira ordem, o que resulta no conjunto de equações não lineares

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{x}} = 0 & \Rightarrow -\mathbf{H}^t(\mathbf{x}) \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})] + \mathbf{G}^t(\mathbf{x}) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = 0 & \Rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde, $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ é a matriz de primeiras derivadas das funções não lineares do vetor $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ com relação ao vetor de estado \mathbf{x} , e $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ tem o mesmo significado anteriormente mencionado.

A solução das equações não lineares 3.23 através do método de Newton requer que a cada iteração seja resolvido um sistema linear da forma

$$-\mathbf{H}^t(\mathbf{x}^k)\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{H}(\mathbf{x}^k)\Delta\mathbf{x}] + \mathbf{G}^t(\mathbf{x}^k)\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{G}(\mathbf{x}^k)\Delta\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

o qual pode ser re-escrito na forma compacta como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^t(\mathbf{x}^k)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}(\mathbf{x}^k) & \mathbf{G}^t(\mathbf{x}^k) \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}^k) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^t(\mathbf{x}^k)\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)] \\ -\mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \end{bmatrix}$$

A matriz de coeficientes deste sistema linear não é positiva definida, o que requer na fatoração o uso de pivôs 2×2 , para preservar a simetria. Esta matriz é decomposta como $\mathbf{A} = \mathbf{L}^t\mathbf{D}\mathbf{L}$, onde \mathbf{L} é uma matriz bloco triangular inferior e \mathbf{D} é uma matriz bloco diagonal.

3.5 Exercícios

1. Considere o plano de medição indicado para o sistema da Fig. (3.2).

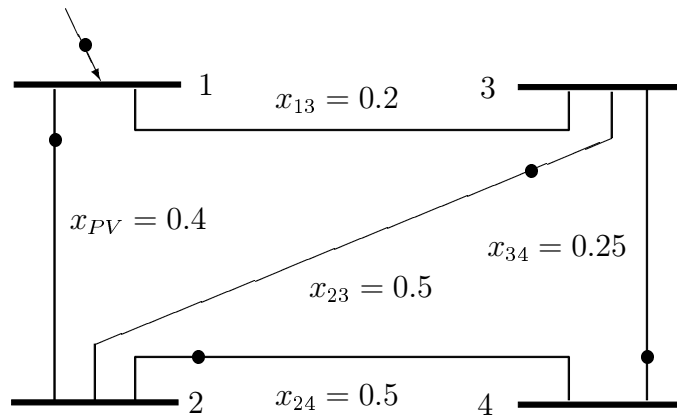
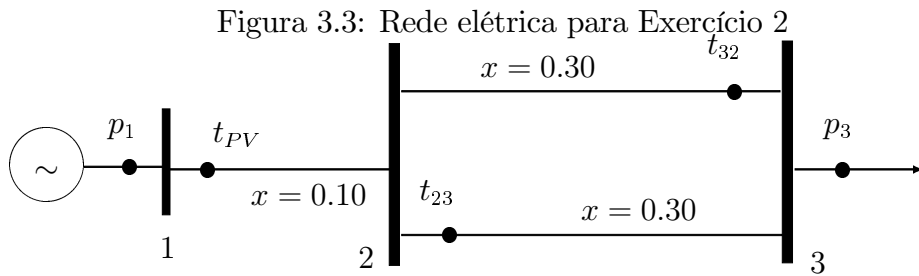


Figura 3.2: Rede elétrica para Exercício 1

- Escreva o modelo de medição linear (“DC”), considerando a barra 1 como referência e:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} t_{12} \\ t_{24} \\ t_{32} \\ t_{43} \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,36 \\ 0,14 \\ 0,11 \\ 0,06 \\ 0,82 \end{bmatrix}$$

Considere também que a matriz de covariância dos erros de medição é $\mathbf{R} = 0,001\mathbf{I}$, onde \mathbf{I} é a matriz identidade.



- Determine um sistema do tipo $\mathbf{G}\hat{\delta} = \mathbf{b}$, onde \mathbf{G} é uma matriz não-singular, especificando valores numéricos para os elementos de \mathbf{G} e \mathbf{b} , tal que a solução do sistema permita obter o vetor de estimativas para os estados, $\hat{\delta}$.
- estime o estado do sistema.

2. As leituras dos medidores indicados no sistema da Fig. (3.3) são as seguintes (em *p.u.*):

$$t_{12} = 0,52 \quad t_{23} = 0,27 \quad t_{32} = -0,26$$

$$p_1 = 0,55 \quad p_3 = -0,53$$

As variâncias para p_1 e t_{12} são de 1.0×10^{-4} *p.u.*, e para as demais medidas são de 2.0×10^{-4} *p.u.* Considerando a barra 1 como referência angular, estime os demais estados e as quantidades medidas.

3. Para o sistema da Fig. (3.4), considere que os desvios-padrão dos medidores são os seguintes:

$$\sigma_{p_1} = \sigma_{p_2} = \sigma_{t_{2,21}} = \sqrt{5} \times 10^{-2}$$

$$\sigma_{t_{1,12}} = \sigma_{t_{1,21}} = 2,0 \times 10^{-2}$$

e as leituras dos medidores (em *p.u.*) são:

$$p_1 = 3,96 \quad t_{1,12} = 2,38 \quad t_{21} = -2,42 \quad (\text{linha 1})$$

$$p_2 = -4,05 \quad t_{21} \quad (\text{linha 2}) = -1,58$$

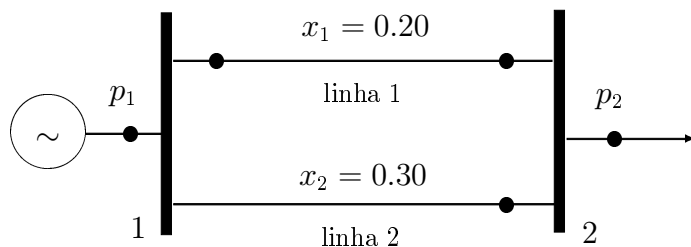


Figura 3.4: Rede elétrica para Exercício 3

Usando um modelo de medição linear, encontre a melhor estimativa no sentido dos mínimos quadrados ponderados para θ , P_1 , P_2 , $t_{1,12}$, $t_{1,21}$ e $t_{2,21}$, tomando θ_1 como referência angular.

Referências Bibliográficas

- [1] George A. e Liu J.W., “Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1981.
- [2] Aschmoneit F., Denzel D. e Schellstede, “Optimal Power System Static State Estimation”, Proceedings da 5th Power Systems Computation Conference, artigo No. 2.3/9, Cambridge, Grã-Bretanha, 1975.
- [3] Garcia A., Monticelli A. e Abreu. P., “Fast Decoupled State Estimator and Bad Data Processing”, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. 98, No. 5, pp. 1645-1652.