

# Capítulo 4

## Método Seqüencial-Ortogonal

### 4.1 Introdução

A aplicação de técnicas baseadas em matrizes ortogonais à EESP foi motivada pelo fato de que sua robustez numérica é bastante superior à do método baseado na Equação Normal de Gauss [1, 2, 3]. Este capítulo descreve a fundamentação teórica do estimador ortogonal baseado nas Rotações de Givens. Inicialmente, o processamento seqüencial das quantidades medidas é descrito para um modelo de medição linear, com ênfase na aplicação das transformações ortogonais ao problema de mínimos quadrados. No que segue, o algoritmo baseado nas rotações de Givens, o tipo de transformação ortogonal mais adequado para a EESP, é apresentado em duas formas alternativas. Posteriormente, apresenta-se o estimador seqüencial-ortogonal não linear baseado nas rotações de Givens e finalmente a modelagem das barras de injeção nula para este tipo de estimador.

### 4.2 Descrição Geral do Método

Considere o seguinte modelo de medição linear:

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{H}\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta} \\ E(\boldsymbol{\eta}) &= \mathbf{0} \quad E(\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^t) = \mathbf{I} \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde,  $\mathbf{z}$  é um vetor de medidas de dimensão  $(m \times 1)$ ,  $\mathbf{x}$  é um vetor de estados a ser estimado, também de dimensão  $(m \times 1)$ ,  $\mathbf{H}$  é uma matriz de observação  $(m \times m)$  que relaciona as medidas ao vetor de estado e  $\boldsymbol{\eta}$  é o vetor  $(m \times 1)$  de erros de medição. Supõe-se que  $\boldsymbol{\eta}$  tem média zero e que sua matriz de covariância é igual à matriz identidade.

De maneira análoga àquela mostrada nos capítulos anteriores, a estimativa do vetor de estado através do método dos mínimos quadrados requer a minimização da função objetivo

$$J(\mathbf{x}) = [\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}]^t [\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}] \tag{4.2}$$

a qual representa analiticamente a soma ponderada dos quadrados dos resíduos.

No modelo de medição representado pela Eq. (4.1), o vetor de estado possui dimensão igual a do vetor das quantidades medidas. Se apenas essas quantidades forem consideradas na minimização da função objetivo dada pela Eq. (4.2), a soma ponderada dos quadrados

dos resíduos será nula na solução ótima. Assim, seja  $z_1$  uma nova medida a ser processada, a qual se relaciona com o vetor de estado  $\mathbf{x}$  através da equação

$$z_1 = \mathbf{h}_1^t \mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}_1$$

Levando em conta a nova medida, a função objetivo torna-se

$$\tilde{J}(\mathbf{x}) = J(\mathbf{x}) + (z_1 - \mathbf{h}_1^t \mathbf{x})^2 = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{H}^t \\ \mathbf{h}_1^t \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ z_1 \end{bmatrix} \right\|^2 \quad (4.3)$$

Para se obter a estimativa do vetor de estado  $\hat{\mathbf{x}}$ , recorre-se ao fato de que a norma Euclidiana da Eq. (4.3) não se modifica quando sujeita à transformações ortogonais. A aplicação dessas transformações na norma quadrática dos resíduos pode ser representada por uma matriz ortogonal  $\mathbf{Q}$ <sup>1</sup>, cujos produtos pela matriz de observação e vetor das quantidades medidas (aumentados pela linha correspondente à nova medida a ser processada) fornecem, respectivamente

$$\mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{H}^t \\ \mathbf{h}_1^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

e

$$\mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \tilde{e}_1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

onde  $\mathbf{U}$  é uma matriz triangular superior ( $n \times n$ ),  $\mathbf{0}$  é um vetor nulo ( $1 \times n$ ),  $\mathbf{w}$  é um vetor ( $n \times 1$ ) e  $\tilde{e}_1$  é um escalar.

Com esta transformação, o vetor de estado  $\hat{\mathbf{x}}$  pode ser obtido resolvendo-se o sistema triangular

$$\mathbf{U}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{w} \quad (4.6)$$

Com  $\hat{\mathbf{x}}$  obtido da Eq. (4.6), verifica-se através da substituição das Eqs. (4.4) a (4.6) na Eq. (4.3) que  $\tilde{e}_1^2$  representa a contribuição da medida  $z_1$  para a soma dos quadrados dos resíduos.

O sistema linear  $\mathbf{U}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{w}$  corresponde ao conjunto de  $m + 1$  medidas (incluindo a medida  $z_1$ ), ao qual é uma nova medida a ser processada. Após a re-triangularização requerida pela inclusão da nova medida, o valor armazenado na nova função objetivo será a soma acumulada dos quadrados dos resíduos. Em suma, o procedimento descrito constitui um algoritmo recursivo para o processamento seqüencial do conjunto de medidas.

### 4.3 Rotações de Givens

A etapa fundamental do desenvolvimento mostrado na seção anterior é a definição da transformação ortogonal  $\mathbf{Q}$  das Eqs. 4.4 e 4.5. Há diversas possibilidades para definir  $\mathbf{Q}$ . Contudo, como os estimadores seqüenciais processam as medidas e as equações correspondentes uma de cada vez, é vantajoso que  $\mathbf{Q}$  triangularize a matriz de observação aumentada operando por linhas. Um método adequado para isto é o algoritmo de Givens,

<sup>1</sup>A condição de ortogonalidade da matriz  $\mathbf{Q}$  implica em que a sua inversa é igual a sua transposta.

que consiste em se aplicar rotações sucessivas entre os elementos de um vetor linha  $\mathbf{p}$  e as linhas de uma matriz triangular  $\mathbf{U}$  até que os elementos de  $\mathbf{p}$  sejam completamente zerados. Se  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{p}$  são respectivamente  $(n \times n)$  e  $(1 \times n)$  e se o vetor  $\mathbf{p}$  é denso, então os elementos deste vetor serão completamente anulados ao cabo de  $n$  rotações. A figura 4.1 representa genericamente a aplicação sucessiva das rotações. Nesta figura,  $\tilde{\mathbf{U}}$  e  $\tilde{\mathbf{p}}$  representam as matrizes  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{p}$  após as primeiras  $(l - 1)$  rotações.

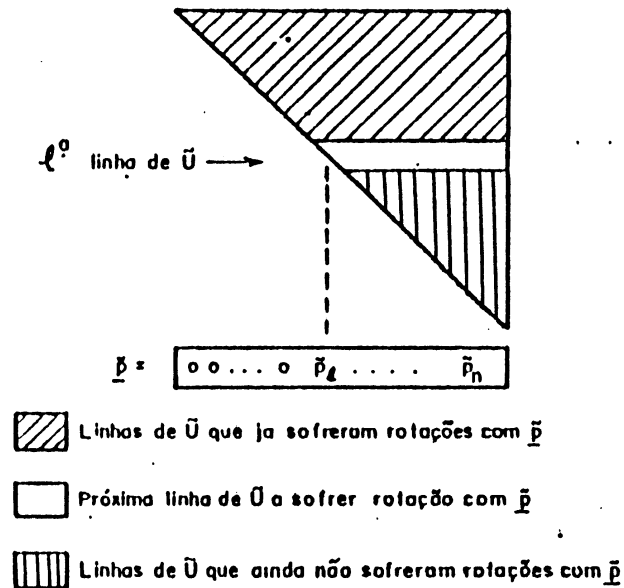


Figura 4.1: Representação da triangularização de  $\mathbf{U}$  através de rotações de Givens.

Se  $\mathbf{U}$  é a matriz resultante da triangularização de  $\mathbf{H}$  após o processamento da medida  $\tilde{y}_1$ , como dado pela Eq. (4.4), e  $\mathbf{p}$  é o vetor linha  $\mathbf{h}_2^t$  que relaciona uma nova medida a ser processada,  $z_2$ , ao vetor de estado  $\mathbf{x}$ , então, é possível se retriangularizar a nova matriz  $[\mathbf{U}^t | \mathbf{h}_2^t]^t$  através do uso das rotações de Givens, conforme exposto anteriormente. Ainda mais, se  $\mathbf{U}^t$  e  $\mathbf{h}_2^t$  são aumentados respectivamente por  $\mathbf{w}$  e  $z_2$ , uma rotação adicional fornecerá a contribuição  $\tilde{e}_2^2$  da medida  $z_2$  à soma dos quadrados dos resíduos.

Apesar das rotações de Givens serem adequadas ao processamento da matriz de observação, sua versão convencional não é competitiva com outros métodos de estimação porque envolve um grande número de cálculos de raízes quadradas. Este obstáculo foi removido mediante o desenvolvimento de versões rápidas das rotações de Givens, onde são completamente eliminados os cálculos de raízes quadradas e reduzidas significativamente as operações de multiplicação.

Com o objetivo de melhor introduzir o método, a versão original das rotações de Givens é inicialmente descrita, na subseção 4.3.1. As modificações introduzidas na formulação convencional e a descrição da versão rápida das rotações é então apresentada na subseção 4.3.2.

### 4.3.1 Forma Convencional

Considere os seguintes vetores-linha:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= [0 \dots 0 \quad u_i \dots u_k \dots u_{n+1}] \\ \mathbf{p} &= [0 \dots 0 \quad p_i \dots p_k \dots p_{n+1}]\end{aligned}$$

O vetor  $\mathbf{u}$  pode ser considerado como a  $i$ -ésima linha da matriz triangular  $\mathbf{U}$  da Eq. (4.4), aumentada pelo elemento correspondente do vetor  $\mathbf{w}$ . O vetor  $\mathbf{p}$  representa uma nova linha da matriz de observação ainda a ser processada, aumentada pela medida correspondente. A cada etapa do método de Givens, uma rotação de planos entre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{p}$  é executada, de modo a anular o  $i$ -ésimo elemento de  $\mathbf{p}$ . Após a rotação, os vetores linha assumem a forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}' &= [0 \dots 0 \quad u'_i \dots u'_k \dots u'_{n+1}] \\ \mathbf{p}' &= [0 \dots 0 \quad 0 \dots p'_k \dots p'_{n+1}]\end{aligned}$$

As rotações a serem aplicadas aos vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{p}$  são definidas como:

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}' \\ \mathbf{p}' \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

onde  $c^2 + s^2 = 1$ .

Os escalares  $c$  e  $s$  são determinados a partir da imposição de  $p'_i = 0$ , e são dados por:

$$\begin{aligned}c &= \frac{u_i}{\sqrt{u_i^2 + p_i^2}} \\ s &= \frac{p_i}{\sqrt{u_i^2 + p_i^2}}\end{aligned} \quad (4.8)$$

Pode ser facilmente verificado que a rotação acima é uma transformação ortogonal e como tal, apresenta excelente robustez numérica, bastante superior ao método da equação normal.

No caso de matrizes densas, a completa re-triangularização da matriz  $\mathbf{U}$  aumentada requer que  $\mathbf{p}$ , em geral, sofra rotações com todas as  $n$  linhas de  $\mathbf{U}$ . Uma rotação adicional anulará o elemento  $(n + 1)$  de  $\mathbf{p}$ , adicionando deste modo a contribuição da nova linha à soma acumulada dos quadrados dos resíduos. Por outro lado, quando a matriz de observação for esparsa, é possível (e desejável) evitar a aplicação de rotações que anulariam os elementos de  $\mathbf{p}$  que já são nulos. Porém, deve-se notar que a estrutura de  $\mathbf{p}$  varia dinamicamente; isto é, novos elementos não-nulos são criados como resultado da aplicação das rotações. O algoritmo deve portanto levar em conta este enchimento, bem como ser capaz de evitar rotações desnecessárias. Se a matriz triangular superior é inicializada como uma matriz nula, a matriz de observação completa pode ser triangularizada processando-se todas as suas linhas em seqüência.

### 4.3.2 Rotações Rápidas de Givens (Sem Raízes Quadradas)

A versão rápida de rotações de Givens, inicialmente proposta por Gentleman [4] e posteriormente generalizada por Hammarling [5], consiste basicamente em se decompor a matriz  $\mathbf{U}$  como:

$$\mathbf{U} = \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{U}} \quad (4.9)$$

onde a matriz  $\mathbf{D}$  é diagonal e a matriz  $\bar{\mathbf{U}}$  é triangular superior unitária (todos os elementos diagonais são iguais à unidade).

De acordo com a decomposição acima, os vetores-linha a serem submetidos às rotações assumem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= [0 \dots 0 \quad \sqrt{d} \dots \sqrt{d}\bar{u}_k \dots \sqrt{d}\bar{u}_{n+1}] \\ \mathbf{p} &= [0 \dots 0 \quad \sqrt{w}p_i \dots \sqrt{w}p_k \dots \sqrt{w}p_{n+1}]\end{aligned}$$

Observe que um fator de escala  $\sqrt{w}$  é também adotado para o novo vetor  $p$ . Depois da aplicação das rotações, os vetores-linha transformam-se em :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}' &= [0 \dots 0 \quad \sqrt{d'} \dots \sqrt{d'}\bar{u}'_k \dots \sqrt{d'}\bar{u}'_{n+1}] \\ \mathbf{p}' &= [0 \dots 0 \quad 0 \dots \sqrt{w'}p'_k \dots \sqrt{w'}p'_{n+1}]\end{aligned}$$

As equações que definem a transformação acima podem ser deduzidas usando-se as novas definições de  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{u}'$  e  $\mathbf{p}'$  na Eq. (4.7) e impondo a condição de que o elemento (2, 2) da matriz de rotações seja igual à unidade. As equações de atualização de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{p}$  são dadas abaixo:

$$\begin{aligned}d' &= d + wp_i^2 \\ w' &= \frac{dw}{d'} \\ \bar{c} &= \frac{d}{d'} \\ \bar{s} &= \frac{wp_i}{d'}\end{aligned}\tag{4.10}$$

$$\left. \begin{aligned}p'_k &= p_k - p_i\bar{u}_k \\ \bar{u}'_k &= \bar{c}\bar{u}_k + \bar{s}p_k\end{aligned} \right\}, \quad k = i + 1 \dots n + 1$$

As Eqs. 4.10 indicam que ambos os fatores de escala variam em conseqüência da rotação. Verifica-se também que todas as operações de raiz quadrada foram eliminadas pela aplicação do artifício introduzido pela Eq. (4.9). O número de multiplicações é também reduzido, já que as atualizações dos elementos de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{p}$  nas Eqs. (4.10) requerem uma multiplicação a menos do que o exigido, pelas Eqs. (4.7). Além das vantagens computacionais de formulação sem raízes quadradas a inclusão dos fatores de escala torna o algoritmo naturalmente adequada à solução de problemas de mínimos quadrados *ponderados*. Em outras palavras, a minimização da soma ponderada dos quadrados dos resíduos não requer nenhum esforço computacional adicional.

Após o processamento de todas as linhas aumentadas da matriz de observação, a solução do problema de mínimos quadrados ponderados pode ser obtida por substituição inversa, onde o vetor independente é a coluna adicional da matriz triangular superior. A matriz diagonal  $\mathbf{D}$  apresentará um elemento adicional, que de fato corresponde à soma ponderada dos quadrados dos resíduos. A disponibilidade imediata deste termo pode ser utilizada nos procedimentos para a detecção de erros grosseiros, como será visto em capítulo posterior. Outra característica interessante do método de Givens é a possibilidade de remover os efeitos de qualquer linha da matriz de observação e de sua medida associada que tenham sido previamente processadas. Esta característica será também explorada na etapa de processamento de erros grosseiros.

**Algoritmo****1.** Variáveis:

$\mathbf{U} = [u_{ij}]$ : Matriz triangular superior unitária,  $(n + 1) \times (n + 1)$

$\mathbf{p}_k = [p_{k1} \dots p_{k \ n+1}]$ :  $k$ -ésimo vetor linha aumentado, de dimensão  $1 \times (n + 1)$ , que sofrerá rotações com as linhas de  $\mathbf{U}$ .

$w_j$ : peso para a medida  $j$ .

$d_i$ : peso para a linha  $i$  do triângulo.

**2.** Inicialização:

$$\begin{aligned} d_i &= 0.0, & i &= 1, n + 1 \\ u_{jj} &= 1.0, & j &= 1, n + 1 \\ u_{jl} &= 0.0 & \left\{ \begin{array}{l} j = 1, n + 1 \\ l = j + 1, n + 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

**3.**  $k = 1$ 

**4.** Seja  $i =$  índice do próximo elemento não-nulo de  $\mathbf{p}_k$

**5.** Rotação da linha  $\mathbf{p}_k$  com linha  $\mathbf{u}_i$  do triângulo:

$$\begin{aligned} d_i' &= d_i + w_k p_{ki}^2 \\ c &= \frac{d_i}{d_i'} \\ w_k' &= c w_k \\ s &= w_k \frac{p_{ki}}{d_i'} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{ki}' = 0.0 \\ p_{kj}' = p_{kj} - p_{ki} \cdot u_{ij} \\ u_{ij}' = c \cdot u_{ij} + s \cdot p_{kj} \end{array} \quad j = i + 1 \dots n + 1 \right.$$

**6.** Redefina as variáveis  $d_i$ ,  $w_k$ ,  $p_{kj}$  e  $u_{ij}$  por seus novos valores calculados.

**7.** Se  $w_k > 0$  e  $i < (n + 1)$ , retorne ao passo 4. Em caso contrário, prossiga ao passo 8.

**8.** Se  $k = m$ , as rotações se encerram, prossiga ao passo 9. Em caso contrário, inicie o processamento de uma nova linha de dados fazendo  $k = k + 1$  e recomeçando no passo 4.

**9.** Resolver o sistema triangular cujo lado direito é a última coluna de  $\mathbf{U}$ . A quantidade  $d_{n+1}$  é a soma ponderada dos quadrados dos resíduos.

## 4.4 Aplicação do Método de Givens à EESP

Conforme descrito anteriormente, as estimativas dos estado são obtidas iterativamente, com o vetor de correções calculado a cada iteração para minimizar a função objetivo

$$J(\mathbf{x}) = [\Delta\mathbf{z} - \mathbf{H}\Delta\mathbf{x}]^T \mathbf{R}^{-1} [\Delta\mathbf{z} - \mathbf{H}\Delta\mathbf{x}] \quad (4.11)$$

onde todos os termos foram definidos previamente.

Na Eq. 4.11, os resíduos são ponderados na proporção inversa da variância das respectivas medidas. Desde que a versão rápida do método supõe que as linhas da matriz a ser triangularizada são ponderadas por um fator  $\sqrt{w}$ , o peso atribuído à linha correspondente à medida  $i$  será dado por

$$w_i = \mathbf{R}_{ii}^{-1} = \sigma_i^{-2} \quad (4.12)$$

Com isso, a matriz Jacobiana da Eq. (4.11) pode ser triangularizada através das rotações de Givens. O vetor  $\Delta\mathbf{z}$  pode ser usado como uma coluna extra da matriz  $\mathbf{H}$ , de modo a sofrer as mesmas transformações aplicadas nesta matriz. Nas iterações em que  $\mathbf{H}$  não é atualizada, a seqüência de rotações que triangularizou  $\mathbf{H}$  anteriormente pode ser armazenada e aplicada ao novo vetor  $\Delta\mathbf{z}$  na iteração corrente.

Esquemas para ordenar as linhas e colunas de  $\mathbf{H}$  a fim de reduzir o enchimento de  $\bar{\mathbf{U}}$  são descritos em [2] e [6].

## 4.5 Inclusão de Restrições de Igualdade

Conforme mostrado no capítulo anterior, as barras de injeção nula podem ser modeladas no problema de estimação de estados via métodos de mínimos quadrados, como restrições de igualdade. Para simplificar a descrição da aplicação das transformações ortogonais ao problema restrito, considere o modelo de medição linear, para o qual a estimação do estado  $\mathbf{x}$  corresponde à solução do problema de otimização

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} \quad [\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}]^t \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}] \\ & \text{sujeito a} \quad \mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

Se o número de estados a serem estimados é  $n$  e o número de restrições de igualdade (barras de transferência) é  $r$ , com  $r < n$ , o sistema linear  $\mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  é subdeterminado e portanto admite infinitas soluções. Estas podem ser expressas na forma geral

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{y}$$

onde,  $\mathbf{x}_0$  é a solução de mínima norma de  $\mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{B}$  é uma matriz de ordem  $n \times (n - r)$  e posto  $(n - r)$ , tal que  $\mathbf{G}\mathbf{B} = \mathbf{0}$  (a matriz  $\mathbf{G}$  é a matriz de espaço nulo da matriz  $\mathbf{B}$ ), e  $\mathbf{y}$  é um vetor arbitrário de ordem  $(n - r)$ .

Supondo que é possível determinar uma matriz ortogonal  $\mathbf{Q}$ , tal que

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{G}^t = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

onde  $\mathbf{R}$  é uma matriz triangular superior de ordem  $r \times r$ , a solução de mínima norma de  $\mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  é dada por

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{G}^+\mathbf{b}$$

onde  $\mathbf{G}^+$  é a pseudo-inversa de  $\mathbf{G}$ .

Definindo a partição

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix}$$

onde  $\mathbf{Q}_1$  e  $\mathbf{Q}_2$  são submatrizes de ordem  $r \times n$  e  $(n - r) \times n$ , respectivamente, é possível mostrar que

$$\mathbf{G}^+ = (\mathbf{R}^t \mathbf{Q}_1)^{-1} = \mathbf{Q}_1^t \mathbf{R}^{-t}$$

ou seja

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{Q}_1^t \mathbf{R}^{-t} \mathbf{b}$$

Além disso, como  $\mathbf{G}\mathbf{Q}_2^t = \mathbf{0}$ , a submatriz  $\mathbf{Q}_2$  pode ser selecionada como uma matriz de espaço nulo  $\mathbf{B}$  da solução geral. Logo

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}_1^t \mathbf{R}^{-t} \mathbf{b} + \mathbf{Q}_2 \mathbf{y}$$

Substituindo-se  $\mathbf{x}$  na função custo resulta

$$J(\mathbf{y}) = [(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}_0) - \mathbf{H}\mathbf{Q}_2 \mathbf{y}]^t \mathbf{R}^{-1} [(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}_0) - \mathbf{H}\mathbf{Q}_2 \mathbf{y}]$$

ou, definindo  $\mathbf{w} = (\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}_0)$  e  $\mathbf{M} = \mathbf{H}\mathbf{Q}_2$ ,

$$J(\mathbf{y}) = [\mathbf{w} - \mathbf{M}\mathbf{y}]^t \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{w} - \mathbf{M}\mathbf{y}]$$

Portanto, a solução do problema de mínimos quadrados com restrições de igualdade pode ser determinada em duas etapas:

1. obtenção da solução de mínima norma  $\mathbf{x}_0$  e da submatriz  $\mathbf{Q}_2$ ;
2. minimização da função de custo irrestrita

$$J(\mathbf{y}) = [\mathbf{w} - \mathbf{M}\mathbf{y}]^t \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{w} - \mathbf{M}\mathbf{y}]$$

Na primeira etapa da solução do problema de mínimos quadrados com restrições de igualdade, a matriz ortogonal completa deve ser calculada. Entretanto, deve ser ressaltado que o número de barras de transferência é geralmente pequeno. Assim, a formação explícita da matriz ortogonal exige esforço computacional moderado.

Na segunda etapa da solução, a matriz ortogonal não precisa ser explicitamente calculada. Apenas as rotações necessitam ser armazenadas para aplicação no vetor do lado direito. Deve ser lembrado que em ambos os casos a estratégia de solução baseada no uso de transformações ortogonais tem como principal vantagem a melhoria da estabilidade numérica do processo iterativo.



## 4.6 Exercícios

1. Utiliza-se o método ortogonal baseado nas rotações de Givens para implementar um estimador linearizado ( $CC$ ). O sistema da potência em questão possui 3 barras, o plano de medição contém 4 medidas e a barra 3 é a barra de referência. A matriz de observação e o vetor de medidas são dados abaixo:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 5. & -5. \\ 2.5 & 0. \\ 0. & -4. \\ -5. & 9. \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0.62 \\ 0.06 \\ -0.37 \\ -1.0 \end{bmatrix}$$

Aplice o algoritmo de Givens e obtenha a matriz triangular superior unitária  $\bar{\mathbf{U}}$ , a matriz diagonal de pesos para as linhas de  $\bar{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{D}$ , e o vetor de estimativas para os estados,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ .

## Referências Bibliográficas

- [1] A. J. A. Simões Costa and V. H. Quintana. “An Orthogonal Row-processing Algorithm for Power System Sequential State Estimation”, IEEE Trans on Power App. and Syst, vol. PAS - 101, n° 9, pp. 3791-3800, 1981.
- [2] V. H. Quintana, A. J. A. Simões Costa e M. Mier, “Bad data Detection and Identification Techniques Using Estimation Orthogonal Methods”. IEEE Trans. on Power App. and Syst., vol. PAS-101, n° 9, pp.3356-3364, 1982.
- [3] A. J. A. Simões Costa, R. Salgado, and V. H. Quintana. “Técnicas de Processamento de Erros Grosseiros para Estimadores de estado Seqüenciais Ortogonais em Sistemas de Potência”, Anais do 4° Congresso Brasileiro de Automática, Campinas - Brasil, Set. 1982.
- [4] Gentleman W. M., “Least Squares Computations by Givens Transformations without Square Roots”, J. Inst. Math. Appl., 12 (1973), pp. 329-336.
- [5] S. Hammarling, “A Note on Modifications to the Givens Plane Rotations”, J. Inst. Math. Applics., 13:215-218, 1974.
- [6] N. Vempati, I. W. Slutsker, and W. F. Tinney. “Enhancements to Givens Rotations for Power System State Estimation”, IEEE Trans. on Power Systems, 6 (2):842-849, 1991.