Capítulo 5

Estimação de Estados via Método da Matriz Aumentada

5.1 Introdução

Uma das questões importantes a serem decididas na escolha de um algoritmo de EESP diz respeito ao grau de estabilidade numérica do método a ser utilizado. Neste particular, a abordagem através da Equação Normal de Gauss apresenta sérias limitações, em decorrência da forma das matrizes utilizadas. Além das técnicas baseadas em transformações ortogonais descritas no capítulo anterior, a literatura relata a existência de técnicas não-ortogonais que exibem desempenho numérico comprovadamente superior ao do método clássico. Inclui-se neste caso o chamado Método da Matriz Aumentada (também denominado método do Tableau Esparso ou de Hachtel) [1], cujo grau de estabilidade numérica é considerado como intermediário entre o das técnicas ortogonais e o da equação normal. O seu desempenho quanto a requisitos de memória e número de operações, medido a partir de testes realizados com vários problemas esparsos de estruturas diferentes, também é amplamente satisfatório quando comparado com o de outros métodos de solução de sistemas esparsos redundantes [2]. Estes atributos e a relativa simplicidade de concepção e implementação justificam a descrição apresentada neste capítulo.

5.2 Formulação do Método da Matriz Aumentada

Considere a Equação Normal de Gauss re-escrita na forma

$$\mathbf{H}^t\mathbf{R}^{-1}[\boldsymbol{\Delta}\mathbf{z} - \mathbf{H}\boldsymbol{\Delta}\hat{\mathbf{x}}] = \mathbf{0} \tag{5.1}$$

e defina os vetores $m \times 1$ de resíduos de estimação e de resíduos ponderados de estimação do problema linearizado como:

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\Delta}\mathbf{z} - \mathbf{H}\boldsymbol{\Delta}\hat{\mathbf{x}} \tag{5.2}$$

e

$$\mathbf{r_w} = \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{r} \tag{5.3}$$

Como a matriz $\mathbf{R}^{-1}$ é diagonal, as Eqs. (5.1) e (5.2) podem respectivamente ser expressas em termos do vetor de resíduos ponderados como

$$\mathbf{H}^t\mathbf{R}^{-\frac{t}{2}}\mathbf{r_w} = \mathbf{0} \tag{5.4}$$

e

$$\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{\Delta z} = \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{H}\mathbf{\Delta}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{r_w} \tag{5.5}$$

ou, definindo-se

$$\mathbf{G} \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{H}$$

e

$$\mathbf{\Delta y} \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{\Delta z}$$

obtém-se

$$\mathbf{G}^t\mathbf{r_w} = \mathbf{0} \tag{5.6}$$

e

$$\mathbf{\Delta y} = \mathbf{G}\mathbf{\Delta}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{r_w} \tag{5.7}$$

As Eqs. (5.6) e (5.7) podem ser postas na forma de uma única equação matricial, cuja matriz de coeficientes é a matriz aumentada de Hachtel, de ordem $(m+n)$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^t & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r_w} \\ \mathbf{\Delta}\hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Delta y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

Outra maneira de se obter a equação básica do método do tableau esparso, consiste em definir o vetor de resíduos de medição como

$$\mathbf{r} = \mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

e resolver o problema de otimização

$$\begin{array}{rc} \textit{Minimizar} & \frac{1}{2}\mathbf{r}^t\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r} \\ \textit{sujeito a} & \mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{r} = \mathbf{0} \end{array}$$

A solução deste problema é obtida formando-se a função Lagrangeana

$$\pounds(\mathbf{x}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}\mathbf{r}^t\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r} + \boldsymbol{\lambda}^t\left[\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{r}\right]$$

onde $\boldsymbol{\lambda}$ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange correspondente à equação que relaciona os resíduos às quantidades medidas e aos estados; e aplicando-se as condições de otimalidade de primeira ordem, o que resulta no conjunto de equações não lineares

$$\frac{\partial \pounds(\mathbf{x}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r} - \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \pounds(\mathbf{x}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \pounds(\mathbf{x}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{H}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$$

onde, da primeira equação

$$\lambda_i = \frac{r_i}{\sigma_i^2} = \frac{r_{wi}}{\sigma_i}$$

e

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}\boldsymbol{\lambda}$$

tal que a segunda equação esta pode ser re-escrita como

$$\mathbf{R}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{z}$$

A solução deste conjunto de equações não lineares é obtida através do método de Newton. Isto requer a solução do sistema linear

$$\mathbf{R}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{H}(\mathbf{x})\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x} = \mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{H}^t(\mathbf{x})\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$$

ou, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{H}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{H}^t(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \Delta\mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

As Eqs. (5.8) ou (5.9) podem ser resolvidas diretamente, explorando-se integralmente a esparsidade da matriz Jacobiana. O sistema linear tem $m+n$ incógnitas, onde m destas são correspondentes aos resíduos utilizados posteriormente na detecção-identificação de medidas portadoras de erros grosseiros. A matriz de coeficientes, embora simétrica, é indefinida, o que exige que se tome alguns cuidados na sua fatoração. Uma possível alternativa é utilizar um conjunto de rotinas baseadas numa variação do método de eliminação de Gauss. Os pivôs são escolhidos da diagonal, utilizando-se o critério de mínima valência, ou 2^o método de Tinney. Quando pivôs diagonais 1×1 podem conduzir a possíveis problemas de instabilidade numérica, são utilizados pivôs 2×2. Este recurso tem a vantagem adicional de ser benéfico do ponto de vista de preservação da esparsidade [2].

O método da Matriz Aumentada evita o cálculo explícito de matrizes do tipo $\mathbf{H}^t\mathbf{H}$, o que melhora sensivelmente o condicionamento numérico. Os tempos de computação obtidos aplicando-se o método a problemas de EESP são bastante favoráveis [1].

5.3 Inclusão de Restrições de Igualdade

De forma semelhante àquela descrita nos capítulos anteriores, as barras de transferência são modeladas como restrições de igualdade. No caso do método da matriz aumentada este conjunto de restrições é incluído no problema representado na Eq. (5.2). O vetor de estado é estimado resolvendo-se o problema de otimização

$$\begin{array}{rc} \mathit{Minimizar} & \frac{1}{2}\mathbf{r}^t\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r} \\ \mathit{sujeito\ a} & \mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{r} = \mathbf{0} \\ & -\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{array}$$

onde o conjunto de equações $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ representa as barras com injeção de potência nula.

A solução do problema de mínimos quadrados com restrições de igualdade através do método do tableau esparso requer o mesmo procedimento adotado para resolver o problema expresso pela Eq. (5.2); isto é, a formação da função Lagrangeana, a aplicação das condições de otimalidade de primeira ordem e a solução do conjunto de equações não lineares resultante através do método de Newton. No presente caso, o sistema linear a ser resolvido a cada iteração para a determinação do incremento no vetor de estado é expresso por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{H}^t & \mathbf{G}^t \\ \mathbf{H} & \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda}_1 \\ \Delta\boldsymbol{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ -\mathbf{g}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Neste sistema linear, as submatrizes **R** e **0** (do canto inferior direito) contém respectivamente as variâncias das medidas (com valores não nulos, pois as linhas de **H** correspondem às quantidades medidas) e das injeções de potência nas barras de transferência (com valores nulos, pois as linhas de **G** correspondem a informações determinísticas).

5.4 Considerações Finais

O método da Matriz Aumentada exibe características de simplicidade e estabilidade numérica bastante atraentes quando se considera sua aplicação à estimação de estados em sistemas de potência. É possível se obter como subproduto imediato do método o vetor de resíduos ponderados que, como será visto posteriormente, pode ser utilizado para a identificação de erros grosseiros quando o sistema de medição apresenta um nível relativamente alto de redundância.

5.5 Exercícios

1. Com os mesmos dados do Exercício **3** do Capítulo 3 determine, especificando valores numéricos, a matriz de coeficientes e o vetor do lado direito do método da matriz aumentada. Escreva também o vetor de incógnitas e apresente, na forma matricial, a equação básica do método da matriz aumentada.

Referências Bibliográficas

[1] Gjelsvik A., Aam S. e Holten L., "Hachtel's Augmented Matrix Method - a Rapid Method Improving Numerical Stability in Power System State Estimation", *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, Vol. 6, No. 2, 1991, pp. 2987-2993.

[2] Duff I.S. e Reid J.K., "A Comparison of Some Methods for the Solution of Sparse Overdetermined Systems of Linear Equations", *J. Inst. Math. Applics.*, Vol 17, 1976, pp. 267-280.