

Capítulo 6

Processamento de Medidas com Erros Grosseiros

6.1 Introdução

No contexto da Estimação de Estados em Sistemas de Potência, medidas portadoras de erros grosseiros são aquelas com grau de imprecisão muito maior do que é suposto no modelo de medição. Essas medidas são resultantes de uma variedade de causas, tais como erro nos canais de comunicação, instrumentos de medição defeituosos, erro na modelagem das pseudo-medidas etc. A presença de erros grosseiros no conjunto de medidas processadas pelo estimador de estados é obviamente prejudicial ao desempenho do estimador, devido a deterioração causada no estado estimado. Esta deterioração acontece porque o estimador baseado no Método dos Mínimos Quadrados minimiza a soma ponderada do quadrado dos resíduos, e portanto, os resíduos com grandes magnitudes associados as medidas portadoras de erros grosseiros terão um grande efeito sobre o resultado final da estimação.

Os dados mais flagrantemente errôneos são rejeitados durante o processo de pré-filtragem das medidas. Este procedimento consiste em verificar se as quantidades medidas estão dentro de certos limites, efetuando testes baseados na comparação de medidas redundantes. Dentre os vários testes que são efetuados no estágio do pré-processamento, os seguintes podem ser citados:

- comparação do valor medido com o valor nominal da quantidade;
- comparação do valor medido numa coleta de dados com o valor medido na coleta precedente;
- teste de consistência baseado nas leis de Kirchhoff, comparação entre os valores medidos nas duas extremidades de um circuito, verificação do estado das chaves/disjuntores do circuito onde as medidas são efetuadas, etc.

Apesar de que este processo facilita tanto a estimação do vetor de estados como a detecção e identificação das medidas espúrias, os testes de pré-filtragem não são capazes de detectar os erros grosseiros de maior magnitude. O processamento de erros de magnitude entre 3 e 10 desvios-padrão normalmente requerem técnicas mais elaboradas, como as que serão abordadas neste capítulo. Serão apresentados os procedimentos mais freqüentemente

utilizados para detectar a existência e identificar as medidas espúrias, de tal forma que elas possam ser removidas ou substituídas por pseudo-medidas.

6.2 Detecção de Erros Grosseiros

As técnicas de detecção e identificação de erros grosseiros apresentadas nesta seção, são baseadas na análise dos resíduos de estimação ou numa função dos mesmos. A razão para este procedimento é que os resíduos fornecem informações úteis sobre eventuais violações das suposições feitas em relação ao modelo de medição.

Seja um conjunto de m medidas tomadas ao longo de um sistema de potência de N barras. O vetor $m \times 1$ dos resíduos de medição é definido como

$$\mathbf{r} = \mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}} \quad (6.1)$$

onde, \mathbf{z} é o vetor das quantidades medidas e $\hat{\mathbf{z}}$ é o vetor dos valores estimados para as quantidades medidas.

A diferença mostrada na Eq. (6.1) pode ser interpretada como uma estimativa para o vetor dos erros de medição (sobre cujas média e variância fazem-se certas suposições quando se formula o modelo de medição). Na ausência de erros grosseiros, os resíduos, ou certas funções dos resíduos, tenderão a confirmar estas suposições. Caso contrário, pode-se inferir que medidas com erros grosseiros foram processadas. Além disso, o exame individual dos resíduos deve possibilitar a identificação da medida espúria. A seção seguinte descreve um procedimento de detecção de erros grosseiros baseado numa função dos resíduos de medição.

Para estabelecer o procedimento para a detecção de erros grosseiros, deve ser lembrado que o vetor dos erros de medição é suposto possuir distribuição normal, com média zero e matriz de covariância igual a \mathbf{R} . Esta caracterização possibilita desenvolver um procedimento para a detecção de medidas espúrias baseado no valor dos resíduos de medição. O candidato natural a um processo deste tipo seria um teste individual no valor dos resíduos de forma a verificar se algum deles viola as suposições feitas em relação ao modelo de medição. Esta técnica, entretanto, requer a utilização da matriz de covariância dos resíduos, cuja determinação é computacionalmente dispendiosa. Considerando o fato de que o processo de detecção é executado *on line* após cada estimação de estados, conclui-se que o exame individual dos resíduos não seria uma técnica computacionalmente eficiente para a simples detecção de medidas portadoras de erros grosseiros. Ainda assim, se a presença destas medidas é detectada, uma possível metodologia de identificação dos erros grosseiros é baseada na matriz de covariância, como será posteriormente mostrado.

As dificuldades computacionais associadas à análise individual dos resíduos de medição conduzem a busca de um teste baseado numa função observável dos resíduos, cujo comportamento na presença e na ausência de erros grosseiros seja claramente distinto. A soma ponderada do quadrado dos resíduos é uma função que satisfaz esta condição; isto é, se existem medidas espúrias no conjunto de medidas $J(\hat{\mathbf{x}})$ tende a assumir valores maiores do que quando tais medidas estão ausentes. Assim, tomando como base o valor da soma ponderada dos quadrados dos resíduos é possível concluir sobre a presença de erros grosseiros. Desde que, tanto os resíduos como a soma ponderada do quadrado dos resíduos são variáveis aleatórias é razoável desenvolver um tipo de teste de detecção baseado nas propriedades estatísticas dessas variáveis. O fundamento analítico do processo de detecção de erros grosseiros compreende o *Teste Estatístico de Hipóteses* descrito a seguir.

Teste de Hipóteses

Para estabelecer um procedimento de detecção baseado em testes estatísticos, considere as seguintes definições:

- Hipótese Estatística: conjectura a cerca da distribuição de uma ou mais variáveis aleatórias;
- Hipótese Básica (*Null hypothesis*), H_0 : hipótese principal;
- Hipótese Alternativa, H_1 : complemento da hipótese básica H_0 , isto é, quando H_0 é falsa, H_1 é verdadeira, e vice-versa;
- Teste de Hipótese: procedimento para decidir se a hipótese H_0 deve ser aceita ou rejeitada.

A teoria do Teste de Hipóteses define dois tipos de erros:

- **Erro do tipo I** : rejeição da hipótese básica H_0 quando ela é verdadeira;
- **Erro do tipo II**: aceitação da hipótese básica H_0 quando ela é falsa.

A *Probabilidade de Falso Alarme*, denotada α , é definida como probabilidade de que ocorra um erro do tipo I (α é considerada o nível de significância). De forma semelhante, β representa a probabilidade de que ocorra um erro do tipo II.

A quantidade $(1 - \beta)$ representa a probabilidade que a hipótese básica H_0 seja rejeitada quando ela é falsa. Esta quantidade é chamada *função potência do teste*.

No teste de hipóteses o objetivo principal é reduzir tanto quanto possível a probabilidade de falso alarme α e a função de potência do teste β . O procedimento usual é se fixar α em um valor baixo (entre 0.01 e 0.1, por exemplo) e então achar um teste que maximize a função de potência $(1 - \beta)$ uniformemente sobre todas as hipóteses alternativas (testes uniformemente mais poderosos).

O procedimento prático para a aplicação do teste de hipóteses consiste em achar uma função observável das variáveis aleatórias em estudo, que se comporte diferentemente sob as condições das duas hipóteses. Esta diferença em comportamento é usada para se projetar o teste.

Por exemplo, suponha que S é a estatística que tende a assumir valores menores quando a hipótese básica H_0 é verdadeira do que quando H_0 é falsa. Então, a probabilidade de falso alarme pode ser fixada em um valor pequeno α . A partir de α e da função densidade de probabilidade das variáveis em estudo é possível se definir um limiar K , tal que o teste será rejeitado se $S > K$ e aceito em caso contrário. Diz-se então que os resultados do teste estão a um nível de significância de $(100 \times \alpha) \%$.

Base Estatística

A aplicação do teste de hipóteses descrito na seção anterior é realizada fazendo-se as seguintes suposições:

- o vetor dos erros de medição $\boldsymbol{\eta}$ é distribuído como $N(0, R)$, isto é, possui distribuição normal com média zero e matriz de covariância \mathbf{R} ;

- a estrutura e os parâmetros da rede são conhecidos;
- o modelo de medição é linearizado num ponto próximo a solução.

Sob estas condições, $J(\hat{\mathbf{x}})$ tem a *distribuição do qui-quadrado* (denotada por χ^2) com $m - n$ graus de liberdade, onde m e n são, conforme definido anteriormente, o número de quantidades medidas ao longo do sistema de potência e o número de estados, respectivamente. A Fig. 6.1 apresenta a função densidade de probabilidade da distribuição do χ^2 -quadrado com oito graus de liberdade. Observe que esta função só é definida para valores positivos, já que $J(\hat{\mathbf{x}}) > 0$, e que é assimétrica em relação à moda da distribuição.

Supondo agora que erros grosseiros estão presentes, as hipóteses anteriores não se mantêm e portanto $J(\hat{\mathbf{x}})$ não apresenta a distribuição do χ^2 -quadrado, tendendo a assumir valores elevados.

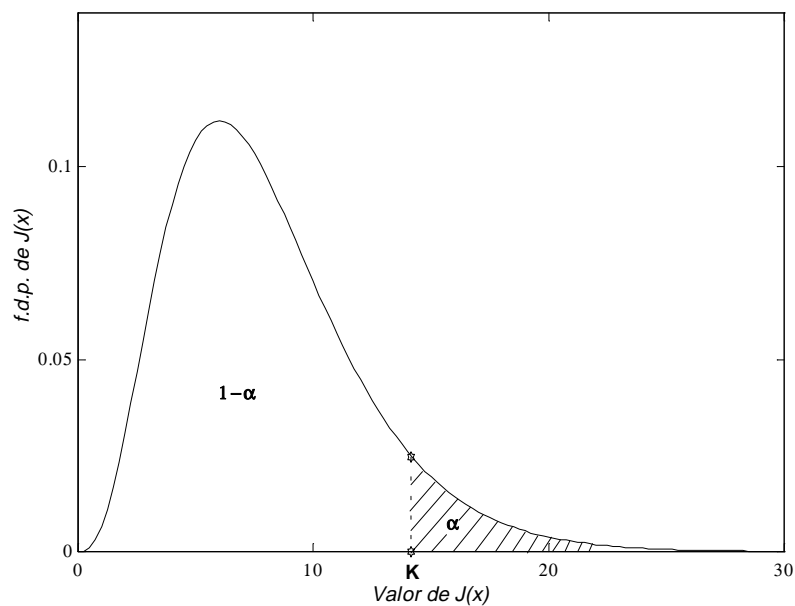


Figura 6.1: Função densidade de probabilidade para a distribuição do Qui-Quadrado com oito graus de liberdade.

Tendo por base as considerações acima, é possível formular o problema de detecção de erros grosseiros através do seguinte teste de hipóteses:

- Hipótese básica, H_0 : a soma ponderada do quadrado dos resíduos $J(\hat{\mathbf{x}})$ apresenta a distribuição do χ^2 ;
- Hipótese alternativa, H_1 : a hipótese básica é falsa.

Seja α o valor fixo da probabilidade de falso alarme (tipicamente estabelecido entre 0,01 e 0,1). Da definição de probabilidade de falso alarme, é possível determinar um limiar K , no qual é baseado o processo de detecção do erro grosseiro, tal que

$$P(J(\hat{\mathbf{x}}) > K \mid J(\hat{\mathbf{x}}) \text{ apresenta a distribuição } \chi^2) = \alpha$$

onde $P(a > b|c)$ representa a probabilidade de que a seja maior do que b supondo que c é verdadeiro.

As probabilidades α e seu complemento $(1 - \alpha)$ podem ser interpretadas como áreas sob a curva da função densidade de probabilidade de $J(\hat{\mathbf{x}})$, conforme indicado na Fig. 6.1. Observe que a especificação de α determina univocamente o limiar K , ou seja, K pode ser obtido como

$$K = \chi_{m-n;1-\alpha}^2$$

onde $\chi_{m-n;1-\alpha}^2$ denota o percentil $(1 - \alpha)$ da distribuição do χ^2 -quadrado com $(m - n)$ graus de liberdade. Os percentis da distribuição do χ^2 com ℓ graus de liberdade podem ser obtidos a partir da tabela que aparece no segundo apêndice deste capítulo.

Em resumo, o teste de detecção de erros grosseiros baseado na soma ponderada do quadrado dos resíduos consiste em comparar o valor de $J(\hat{\mathbf{x}})$ com o valor K , obtido da distribuição cumulativa do χ^2 com $(m - n)$ graus de liberdade e com probabilidade de falso alarme igual a α . Se $J(\hat{\mathbf{x}}) > K$, então há evidência de que existem medidas portadoras de erros grosseiros dentre aquelas que compõem o plano de medição.

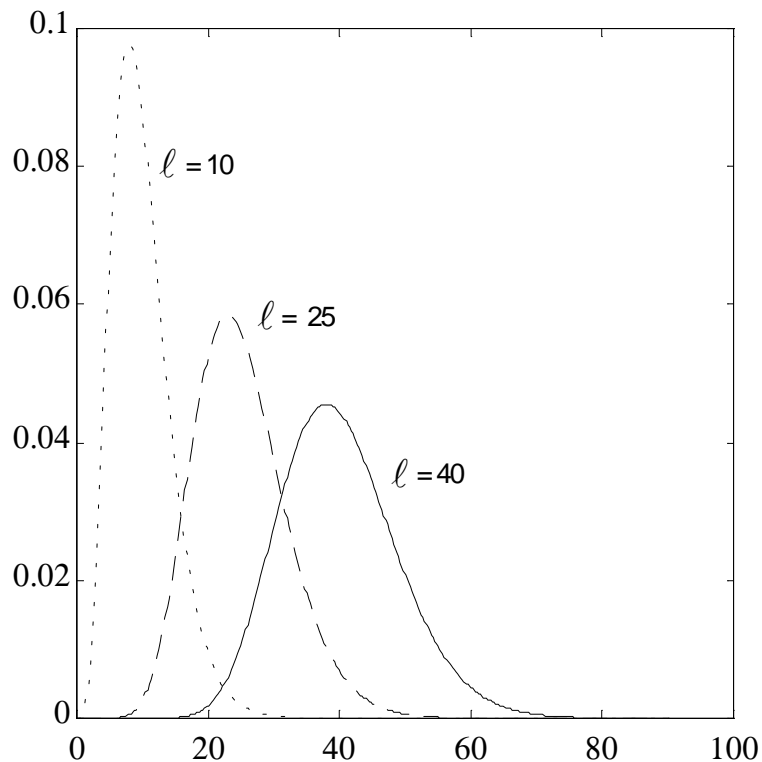


Figura 6.2: Função densidade de probabilidade da distribuição do χ^2 para 3 valores de graus de liberdade.

Quando o número de graus de liberdade se torna elevado (na prática, maior do que 30), o que ocorre frequentemente no caso da EESP, a distribuição do χ^2 tende a se comportar como uma distribuição Gaussiana com média $(m - n)$ e variância $2(m - n)$. Isto é ilustrado na Fig. 6.2, na qual se verifica que, à medida que o número de graus

de liberdade ℓ aumenta, a curva vai tendendo a uma simetria em relação à média. Para valores de ℓ maiores que 30, é possível se demonstrar que a quantidade

$$\frac{J(\hat{\mathbf{x}}) - (m - n)}{\sqrt{2 \times (m - n)}}$$

tende à distribuição normal padrão, de modo que os percentís desta distribuição podem ser usados em substituição aos obtidos da distribuição do χ^2 na especificação do nível K . Em termos analíticos K é expresso como

$$\Phi \left(\frac{K - (m - n)}{\sqrt{2 \times (m - n)}} \right) = 1 - \alpha \quad (6.2)$$

onde $\Phi(\cdot)$ é a distribuição normal cumulativa padrão.

Algoritmo

O teste de detecção de medidas portadoras de erro grosseiro pode ser resumido nos seguintes passos:

- cálculo da soma ponderada do quadrado dos resíduos $J(\hat{\mathbf{x}})$ após cada estimativa do vetor de estados;
- comparação do valor de $J(\hat{\mathbf{x}})$ com o valor K , obtido (a) da distribuição do χ^2 com $(m - n)$ graus de liberdade e probabilidade de falso alarme α ou, se $(m - n) > 30$, através da equação 6.2;
 - se $J(\hat{\mathbf{x}}) > K$, conclui-se que há medidas espúrias no conjunto de medidas;
 - Se $J(\hat{\mathbf{x}}) \leq K$, conclui-se que as quantidades medidas não estão contaminadas com erros grosseiros.

6.3 Identificação de Erros Grosseiros

Método do Máximo Resíduo Normalizado

Com base no resultado do teste de detecção de medidas espúrias, duas alternativas podem ser tomadas. Se o teste indicar a não existência dessas medidas, o processo de estimação é encerrado. Em caso contrário, as medidas portadoras de erro grosseiro devem ser localizadas, o que requer o exame individual dos resíduos da estimação. Se apenas uma única medida está contaminada com erro grosseiro, à primeira vista uma possível estratégia de identificação poderia ser baseada na determinação do máximo resíduo, com a expectativa de que este correspondesse a medida espúria. Entretanto, isto não é necessariamente verdade, pois:

- Medidores de diferentes tipos de quantidades possuem diferentes precisões, tal que as variâncias das quantidades medidas podem ser significativamente afetadas;
- Existe a possibilidade de que os resíduos sejam correlacionados entre si, de modo que o efeito de um erro grosseiro associado a uma medida pode se espalhar sobre os resíduos de outras quantidades.

Estas dificuldades serão contornadas com base nos resultados que seguem.

Considere o modelo de medição linearizado representado pela equação ???. O vetor dos resíduos de estimação é dado por

$$\mathbf{r} = \Delta \mathbf{z} - \Delta \hat{\mathbf{z}} = \Delta \mathbf{z} - \mathbf{H} \Delta \hat{\mathbf{x}}$$

Utilizando-se o vetor $\Delta \hat{\mathbf{x}}$ fornecido pela solução da equação normal, obtêm-se

$$\mathbf{r} = [\mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1}] \Delta \mathbf{z} \quad (6.3)$$

Definindo-se a matriz

$$\mathbf{W} = \mathbf{R} - \mathbf{H} \mathbf{C}_x \mathbf{H}^t \quad (6.4)$$

onde \mathbf{C}_x , a *matriz de covariância dos erros de estimação*, é dada por

$$\mathbf{C}_x = (\mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \quad (6.5)$$

A partir da Eq. (6.3), define-se a *matriz de sensibilidade dos resíduos* como

$$\mathbf{S} \triangleq \mathbf{W} \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \quad (6.6)$$

É conveniente examinarmos com mais detalhes a matriz de sensibilidade dos resíduos antes de continuarmos com a análise do efeito dos erros grosseiros sobre os resíduos. \mathbf{S} apresenta algumas propriedades interessantes, tais como:

1. Como pode ser facilmente verificado, \mathbf{S} é uma matriz *idempotente*, isto é,

$$\mathbf{S}^2 = \mathbf{S}$$

2. Como toda a matriz idempotente diferente da matriz identidade¹, a matriz \mathbf{S} é singular, seu posto é igual a seu traço [1] e é igual a $m - n$;
3. Os autovalores de \mathbf{S} são iguais ou a zero ou à unidade;
4. Pode ser também facilmente verificado que:

$$\mathbf{S} \mathbf{H} = \mathbf{H} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (6.7)$$

5. Por multiplicação direta, verifica-se igualmente que:

$$\mathbf{S} \mathbf{R} \mathbf{S}^t = \mathbf{W}$$

Retomando a análise dos resíduos, vemos da Eq. (6.3) e da definição de \mathbf{S} que

$$\mathbf{r} = \mathbf{S} \Delta \mathbf{z}. \quad (6.8)$$

Além disso, como $\Delta \mathbf{z} = \mathbf{H} \Delta \mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}$ e utilizando a propriedade 4 acima,

$$\mathbf{r} = \mathbf{S} [\mathbf{H} \Delta \mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}] = \mathbf{S} \mathbf{H} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{S} \boldsymbol{\eta},$$

ou seja:

$$\mathbf{r} = \mathbf{S} \boldsymbol{\eta} \quad (6.9)$$

Da Eq. (6.9), concluímos que a i -ésima coluna de \mathbf{S} indica como o efeito de uma medida portadora de erro grosseiro se espalha sobre os elementos do vetor de resíduos.

Os resultados que seguem estabelecem a base teórica para a identificação de erros grosseiros simples.

¹A matriz identidade é a única matriz idempotente não-singular [1].

Teorema 1 A matriz \mathbf{W} definida pela Eq. (6.4) é a matriz de covariância dos resíduos.

Prova. Por definição, a matriz de covariância dos resíduos \mathbf{C}_r é

$$\mathbf{C}_r = E\{\mathbf{r} \mathbf{r}^t\}$$

Utilizando a Eq. (6.9), resulta

$$\mathbf{C}_r = E\{\mathbf{S} \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\eta}^t \mathbf{S}^t\} = \mathbf{S} E\{\boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\eta}^t\} \mathbf{S}^t = \mathbf{S} \mathbf{R} \mathbf{S}^t$$

e portanto, da propriedade 5 da matriz \mathbf{S} acima, concluímos que

$$\mathbf{C}_r = E\{\mathbf{r} \mathbf{r}^t\} = \mathbf{W}$$

■

Definição 2 O vetor de resíduos normalizados é definido como:

$$\mathbf{r}_N \triangleq \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{r} \quad (6.10)$$

onde

$$\mathbf{D} = \text{diag}\{\mathbf{W}\}$$

Em outras palavras, o resíduo normalizado para uma dada medida k é obtido dividindo-se o resíduo da medida k pelo desvio-padrão deste resíduo, isto é:

$$r_{N,k} = \frac{r_k}{\sqrt{w_{kk}}}.$$

O teorema seguinte evidencia a importância dos resíduos normalizados para a identificação de erros grosseiros.

Teorema 3 Seja um sistema de potência monitorado através de um plano de medição que oferece boas condições de redundância. Se apenas uma medida do plano de medição for portadora de erro grosseiro e as demais medidas são perfeitas, então a medida que apresenta o máximo resíduo normalizado em valor absoluto é a medida errônea.

Prova. Se apenas a medida k contém erro grosseiro e as demais são perfeitas, então

$$\boldsymbol{\eta} = \left[0 \ \dots \ 0 \ \beta \ 0 \ \dots \ 0 \right]^t$$

onde β aparece na k -ésima posição de $\boldsymbol{\eta}$ e é a magnitude do erro grosseiro. Usando as Eqs. (6.9) e (6.10) é possível escrever:

$$\mathbf{r}_N = \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{S} \boldsymbol{\eta} = \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{s}_k \beta$$

sendo \mathbf{s}_k a k -ésima coluna da matriz \mathbf{S} . Da equação acima, o j -ésimo resíduo normalizado é dado por

$$r_{N,j} = \frac{s_{jk}}{\sqrt{w_{kk}}} \beta \quad (6.11)$$

Porém, da definição da matriz \mathbf{S} na Eq. (6.6) vemos que

$$s_{jk} = \frac{w_{jk}}{\sigma_k^2}$$

que, substituído na Eq. (6.11) fornece

$$r_{N,j} = \frac{w_{jk}}{\sigma_k^2 \sqrt{w_{kk}}} \beta$$

Pelo fato de \mathbf{W} ser uma matriz de covariância e portanto ser positiva-semidefinida, tem-se que $|w_{kk}| \geq |w_{jk}|$. Conseqüentemente, da equação acima conclui-se que

$$|r_{N,k}| \geq |r_{N,j}|$$

e portanto o máximo resíduo normalizado aponta a medida portadora do erro grosseiro.

■

Seguem-se algumas observações sobre a aplicação do método do máximo resíduo normalizado:

1. A rigor, o resultado do teorema acima aplica-se apenas quando todas as medidas são perfeitas, com exceção da medida portadora do erro grosseiro. Na prática, entretanto, as medidas sempre serão corrompidas por algum nível de ruído, cuja variância é dada pela matriz \mathbf{R} . Entretanto, é possível se mostrar que o aumento da redundância no plano de medição implica no aumento da dominância diagonal na matriz \mathbf{S} . Portanto, para níveis adequados de redundância têm-se que

$$s_{ii} \gg s_{i,j} \quad \text{para } i \neq j$$

O aumento da dominância diagonal em \mathbf{S} resulta em que os efeitos das medidas portadora de erro grosseiro se reflitam predominantemente no resíduo correspondente. Nestas circunstâncias, o resultado teórico do Teorema 3 se manterá válido na prática mesmo considerando-se que as medidas que não contêm erros grosseiros não são perfeitas.

2. A importância da normalização dos resíduos pode ser melhor compreendida se for levado em conta que diferentes tipos de medidores possuem, em geral, variâncias distintas, de modo que um valor de resíduo discrepante para uma medida pode ser perfeitamente aceitável para outra. A normalização dos resíduos de estimação coloca-os todos em uma mesma base, permitindo assim uma comparação justa dos seus valores absolutos;
3. Uma das dificuldades inerentes ao processo de identificação de erros grosseiros baseado na busca do máximo resíduo normalizado é o esforço computacional requerido no cálculo da variância dos resíduos. Apesar de que a normalização requer apenas os elementos diagonais da matriz \mathbf{W} , mesmo assim são necessários elementos da inversa da matriz $(\mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})$, conforme mostrado na Eq. (6.4). Vários métodos tem sido propostos na literatura para reduzir o número de operações requeridas, dentre os quais um dos mais utilizados é o *algoritmo para a determinação da matriz esparsa-inversa* [2], no qual apenas os elementos da matriz de covariância dos erros de estimação \mathbf{C}_x que correspondem aos não-zeros de $(\mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})$ precisam ser calculados;

4. Em razão do esforço computacional requerido para o cálculo dos resíduos normalizados, freqüentemente se considera a possibilidade de substituí-los no processo de identificação pelos chamados *resíduos ponderados*, definidos como:

$$\mathbf{r}_W = \mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{r} \quad (6.12)$$

ou seja,

$$r_{W,i} = \frac{r_i}{\sigma_i}, \quad i = 1, \dots, m$$

Deve ser observado entretanto que os resíduos ponderados não apresentam a mesma sensibilidade aos erros nas medidas que os resíduos normalizados. Conseqüentemente não se pode em geral garantir bons resultados para a identificação baseada em r_W , exceto em situações bastante particulares.

Para uma breve análise da perda de sensibilidade no teste de identificação decorrente do uso de \mathbf{r}_N , observe a partir das Eqs. 6.10 e 6.12 que podemos escrever:

$$r_{W,i} = \sqrt{s_{ii}} r_{N,i} \quad (6.13)$$

onde s_{ii} é o i -ésimo elemento diagonal da matriz \mathbf{S} definida pela Eq. 6.6. Ainda em conseqüência da propriedade de idempotência de \mathbf{S} pode-se mostrar que $0 < s_{ii} < 1$, sendo que $s_{ii} = 0$ quando $m = n$ e $s_{ii} \rightarrow 1$ quando $m \gg n$ [3]. Portanto, $r_{W,i} < r_{N,i}$ e $r_{W,i} \rightarrow r_{N,i}$ quando a redundância do sistema de medição é elevada. Conseqüentemente, para um mesmo limiar, um teste de identificação baseado em $r_{W,i}$ tende a ser menos sensível que o teste \mathbf{r}_N para valores intermediários de redundância. Apenas quando o nível de redundância for alto é que os comportamentos dos testes se aproximam.

6.4 Recuperação de Medidas Portadoras de Erro Grosseiro

A recuperação de medidas portadoras de erros grosseiros em Estimação de Estados em Sistemas de Potência (EESP) consiste fundamentalmente em se estimar a amplitude do erro grosseiro, e assim gerar uma pseudomedida que se aproxime do valor correto da quantidade medida.

Nesta seção, apresenta-se o desenvolvimento teórico de uma técnica de recuperação [?] e sua associação com o método de solução baseado na equação normal. Mostra-se como podem ser vantajosamente exploradas as características do estimador clássico, de forma a permitir que todas as etapas do tratamento - detecção, identificação e recuperação - da medida incorreta sejam executadas após o processo iterativo que fornece as estimativas.

Base Teórica

Considere a existência de apenas uma medida com erro grosseiro num conjunto de medidas. Tal medida pode ser expressa como

$$z_k^e = z_k + \beta \quad (6.14)$$

onde z_k^e é o valor da medida espúria; z_k é o valor da medida sem erro grosseiro; e β representa a amplitude do erro grosseiro.

O vetor correspondente ao modelo linearizado de medidas portadoras e não portadoras de erro grosseiro, mostrado nas seções anteriores, numa dada iteração, é escrito como

$$\Delta \mathbf{z}^e = \Delta \mathbf{z} + \beta \mathbf{e}_k \quad (6.15)$$

onde \mathbf{e}_k é um vetor $m \times 1$, com todos os elementos nulos exceto o k -ésimo elemento, que é unitário. Os vetores $\Delta \mathbf{z}^e$ e $\Delta \mathbf{z}$ são calculados com auxílio do vetor de estados estimado na iteração corrente, o qual está sob efeito da presença do erro grosseiro.

Substituindo a equação 6.15 na equação 6.8, o vetor dos resíduos é expresso como

$$\mathbf{r}^e = \mathbf{S} \Delta \mathbf{z} + \beta \mathbf{s}_k$$

onde \mathbf{s}_k é a k -ésima coluna da matriz de sensibilidade dos resíduos \mathbf{S} .

A recuperação da medida espúria consiste em se estimar a amplitude do erro grosseiro β e gerar uma pseudo-medida subtraindo este valor da medida incorreta. É possível determinar β através da estratégia mostrada a seguir.

Seja $\hat{\beta}$ a estimativa para amplitude do erro grosseiro que minimiza a função objetivo

$$J(\hat{\beta}) = (\mathbf{r}^e - \hat{\beta} \mathbf{s}_k)^t \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{r}^e - \hat{\beta} \mathbf{s}_k)$$

Da condição necessária para mínimo da função $J(\hat{\beta})$, isto é

$$\frac{\partial J(\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}} = 0$$

resulta

$$(\mathbf{s}_k^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}_k) \hat{\beta} = \mathbf{s}_k^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}^e$$

de tal forma que

$$\hat{\beta} = \frac{\mathbf{s}_k^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}^e}{(\mathbf{s}_k^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}_k)} \quad (6.16)$$

A análise da equação 6.16 mostra que o denominador do segundo termo pode ser escrito como

$$(\mathbf{s}_k^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}_k) = [\mathbf{S}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}]_{kk} \quad (6.17)$$

Utilizando a definição de \mathbf{S} dada pela Eq. (6.6), o produto matricial $[\mathbf{S}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}]$ fica

$$\mathbf{S}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S} = (\mathbf{W} \mathbf{R}^{-1})^t \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{W} \mathbf{R}^{-1}) = \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{W} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{W}) \mathbf{R}^{-1} \quad (6.18)$$

Desde que a matriz $\mathbf{R}^{-1} \mathbf{W}$ é idempotente,

$$\mathbf{W} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{W} = \mathbf{W}$$

e a equação 6.18 é reescrita como

$$\mathbf{S}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{W} \mathbf{R}^{-1} \quad (6.19)$$

Substituindo-se a equação 6.19 na equação 6.17, obtém-se

$$(\mathbf{s}_k^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}_k) = [\mathbf{R}^{-1} \mathbf{W} \mathbf{R}^{-1}]_{kk} = \sigma^{-4} W_{kk} \quad (6.20)$$

Com base na definição de \mathbf{s}_k e utilizando as equações 6.8 e 6.19, o numerador da equação 6.16 pode ser expresso como

$$\mathbf{s}_k^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}^e = \sigma^{-2} r_k^e \quad (6.21)$$

A substituição das equações 6.20 e 6.21 na equação 6.16 fornece

$$\hat{\beta} = \frac{\sigma^2}{W_{kk}} r_k^e \quad (6.22)$$

A equação 6.22 permite o cálculo da amplitude do erro grosseiro em função das covariâncias do erro de medição (σ_k) e do resíduo de estimação (W_{kk}), e do resíduo associado a medida k . A medida recuperada é determinada com o auxílio das equações 6.14 e 6.22 e expressa como

$$z_k^{rec} = z_k^e - \frac{\sigma^2}{W_{kk}} r_k^e \quad (6.23)$$

ou, em termos do resíduo normalizado,

$$z_k^{rec} = z_k^e - \frac{\sigma^2}{\sqrt{W_{kk}}} r_{Nk}^e \quad (6.24)$$

onde z_k^{rec} é o valor da medida recuperada.

Para calcular o resíduo associado à medida recuperada, suponha que o procedimento mostrado previamente é aplicado para recuperar o k -ésimo elemento do vetor incremental das quantidades medidas $\Delta \mathbf{z}^e$, o qual corresponde a medida portadora de erro grosseiro. A aplicação da equação 6.23 resulta em

$$\Delta z_k^{rec} = \Delta z_k^e - \frac{\sigma^2}{W_{kk}} r_k^e \quad (6.25)$$

Após a recuperação da medida espúria, o vetor dos resíduos é dado por

$$\mathbf{r}^{rec} = \mathbf{S} \Delta \mathbf{z}^{rec} = \mathbf{W} \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{z}^{rec} \quad (6.26)$$

onde os elementos do vetor $\Delta \mathbf{z}^{rec}$ são os mesmos componentes do vetor $\Delta \mathbf{z}^e$ exceto pelo k -ésimo elemento, o qual é dado pela equação 6.25. A partir desta equação, o k -ésimo resíduo pode ser escrito como

$$\mathbf{r}^{rec} = \sum_{i=1, i \neq k}^m W_{ki} \sigma_i^{-2} \Delta z_i^e - W_{kk} \sigma_k^{-2} \times \frac{\sigma^2}{W_{kk}} r_k^e$$

ou seja

$$\mathbf{r}^{rec} = \sum_{i=1}^m W_{ki} \sigma_i^{-2} \Delta z_i^e - r_k^e$$

A análise da última equação permite observar que o termo correspondente à somatória é o próprio resíduo da k -ésima medida, calculado antes da recuperação. Logo

$$\mathbf{r}^{rec} = 0. \quad (6.27)$$

Conclui-se portanto, que a geração de uma pseudomedida pela subtração do erro grosseiro da medida espúria afeta a soma ponderada do quadrado dos resíduos no sentido de eliminar desta quantidade a contribuição da medida originalmente incorreta.

6.5 O Método \hat{b}

O chamado *Método \hat{b}* para detecção e identificação de erros grosseiros foi originalmente proposto como uma alternativa para o teste χ^2 convencionalmente usado no estágio de detecção. O método baseia-se na consideração de que a variável $\hat{\beta}$ dada pela Eq. 6.22 pode ser interpretada como uma estimativa do erro associado à medida; isto é, de quanto a medida é discrepante das demais. Comparando-se a magnitude desta discrepância com um limiar $\lambda\sigma$, onde σ é o desvio-padrão da medida considerada e λ é um inteiro usualmente considerado igual a 4, é possível se concluir se o erro está ou não fora da faixa esperada de $\pm 3\sigma$.

Portanto, reconsidere a Eq. 6.22, re-escrevendo-a na forma

$$\hat{\beta}_k = \frac{\sigma_k^2}{\sqrt{W_{kk}}} r_{Nk} \quad (6.28)$$

onde o índice k indica quantidades associadas à medida k .

A magnitude do erro, expressa em números de desvios-padrão, é então dada por:

$$\hat{b}_k = \frac{|\hat{\beta}_k|}{\sigma_k} = \frac{\sigma_k}{\sqrt{W_{kk}}} |r_{Nk}| \quad (6.29)$$

A partir das considerações acima, é possível propor o seguinte algoritmo, que na realidade se presta tanto à detecção quanto à identificação de erros grosseiros.

1. Estimar os estados e calcular os resíduos normalizados r_{Nk} para todas as medidas correntemente disponíveis ao estimador;
2. Seja i a medida com a maior magnitude de resíduo normalizado. Calcular \hat{b}_i , a partir da Eq. 6.24;
3. Se $\hat{b}_i \leq \lambda$, a medida k é considerada válida, concluindo-se em consequência que não há erro grosseiro entre as medias consideradas no passo 1. Se $\hat{b}_i > \lambda$, a medida i é considerada portadora de erro grosseiro. Prosseguir com a etapa 4.
4. Eliminar a medida i do plano de medição e retornar ao passo 1.

6.6 Processamento de Erros Grosseiros Múltiplos

O caso mais simples de processamento de erros grosseiros (EGs) é o da ocorrência de uma única medida errônea. O procedimento de identificação mais freqüentemente utilizado é aquele descrito na seção 6.3, em que se supõe errônea a medida cujo resíduo normalizado é o de maior magnitude, após ser constatada presença do EG entre as medidas [4].

As situações mais realísticas e mais abrangentes não são entretanto, as relativas a EGs simples; ao contrário, tais situações se caracterizam pela ocorrência de múltiplas medidas errôneas, interativas ou não. No caso de erros múltiplos não-interativos, o emprego de uma generalização do método descrito no parágrafo anterior pode ser suficiente para identificar corretamente as medidas portadoras de EGs. Na ocorrência de EGs múltiplos interativos, tal generalização pode se mostrar insatisfatória e produzir resultados não condizentes

com a realidade. Isto acontece porque os resíduos são combinações lineares dos erros de medição; por conseguinte, não há, necessariamente, uma correspondência biunívoca entre os resíduos normalizados de maiores magnitudes e os maiores erros de medição. Ou seja, as medidas errôneas podem não ser aquelas relativas aos resíduos normalizados de maiores módulos [3].

As seções seguintes apresentam dois métodos para o processamento de EGs múltiplos. O primeiro, corresponde a uma extensão do procedimento adotado no caso de erros grosseiros simples para o caso múltiplo. O segundo, trata o conjunto de medidas suspeitas coletivamente, e aplica procedimentos baseados em testes de hipóteses para refinar este conjunto.

6.6.1 Identificação por Eliminação

Após ter sido estimado o estado e constatada a presença de EGs, o procedimento de identificação por eliminação (IPE) consiste em proceder a ciclos sucessivos de *eliminação - estimação - detecção* até que o teste de detecção se torne negativo.

O algoritmo descrito a seguir sumariza as etapas principais do método.

1. Estimar os estados;
2. Calcular as variâncias dos resíduos;
3. Calcular as magnitudes dos resíduos normalizados $|r_N|$;
4. Identificar a medida com o maior resíduo normalizado $|r_N|$. Seja k esta medida. Calcular $\hat{\beta}_k$;
5. Teste de detecção: verificar se $\hat{\beta}_k > \lambda$. Em caso negativo, o processo é encerrado. Em caso afirmativo, prosseguir ao próximo passo;
6. Remover (ou recuperar) a medida k , e retornar ao primeiro passo.

O procedimento de detecção-identificação utilizado no passo 5 deste algoritmo é o Método \hat{b} , descrito na seção 6.5, com limiar λ considerado igual a 4.0.

Deve ser observado ainda que, a princípio é possível se cogitar em uma variante do método no qual as variâncias dos resíduos não são atualizadas após a eliminação das medidas errôneas. Isto permitiria uma economia considerável de tempo de cálculo, visto que a etapa de cálculo das variâncias dos resíduos é uma das mais dispendiosas do ponto de vista computacional. As experiências com esta variante, entretanto, não fornecem bons resultados na identificação, conforme relatado na literatura [?].

6.6.2 Identificação Baseada em Testes de Hipóteses

Estimação dos Erros de Medição

A identificação de EGs múltiplos utilizando testes de hipóteses inicia pela partição do conjunto de medidas em *medidas válidas* (v) e *medidas suspeitas de conterem erros grosseiros* (s). O critério para estabelecer esta partição baseia-se normalmente os valores absolutos

dos resíduos normalizado (por exemplo, as medidas cujos resíduos normalizados tem módulo superior a *umcerto* limiar λ são consideradas suspeitas). Conseqüentemente, o vetor de erros de medição passa a ser escrito como:

$$[\boldsymbol{\eta}_v^t \mid \boldsymbol{\eta}_s^t]^t \quad (6.30)$$

Por outro lado, foi visto na Eq. (6.9) que os resíduos se relacionam com os erros de medição através de

$$\mathbf{r} = \mathbf{S}\boldsymbol{\eta} \quad (6.31)$$

A partição do vetor $\boldsymbol{\eta}$ induz partições similares em \mathbf{r} e \mathbf{S} , e portanto:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{vv} & \mathbf{S}_{vs} \\ \mathbf{S}_{sv} & \mathbf{S}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_v \\ \boldsymbol{\eta}_s \end{bmatrix}$$

Da equação matricial acima, podemos escrever:

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{S}_{ss} \boldsymbol{\eta}_s + \mathbf{v}$$

onde $\mathbf{v} \triangleq \mathbf{S}_{vv} \boldsymbol{\eta}_v$. Na hipótese de que nenhuma medida errônea foi incluída entre as supostas válidas, o vetor \mathbf{v} contém apenas erros aleatórios de pequena magnitude. Considerando além disso que a matriz \mathbf{S}_{ss} é quadrada, podemos propor o seguinte estimador para os erros de medição $\boldsymbol{\eta}_s$:

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_s = \mathbf{S}_{ss}^{-1} \mathbf{r}_s \quad (6.32)$$

A não-singularidade de \mathbf{S}_{ss} é assegurada se o estado do sistema é observável com as $m - s$ medidas restantes [3]. Denotaremos por $\boldsymbol{\Gamma}$ a inversa desta matriz, isto é:

$$\boldsymbol{\Gamma} \triangleq \mathbf{S}_{ss}^{-1}$$

No que segue, $N(\mu, \sigma^2)$ denota a distribuição normal de probabilidade com média μ e variância σ^2 . Se a medida i for errônea e todas as medidas com EGs forem consideradas suspeitas, prova-se que a estimativa $\hat{\eta}_s$, obtida da eq. 6.32, apresenta a distribuição normal com média e variância conforme abaixo [3]:

$$\hat{\eta}_{si} \sim N(\eta_{si}, \sigma_i^2(\Gamma_{ii} - 1)) \quad (6.33)$$

Por outro lado, se a medida i for válida e todas as medidas errôneas pertencerem ao conjunto das suspeitas, então

$$\hat{\eta}_{si} \sim N(0, \sigma_i^2 \Gamma_{ii}) \quad (6.34)$$

Na Eq. (6.33), η_{si} é a magnitude (em princípio desconhecida) do erro da medida i .

Teste de Hipóteses com Probabilidade de Falso Alarme Fixada

A fim de identificar se a medida i está contaminada com um erro grosseiro, as seguintes hipóteses básica e alternativa são consideradas:

- H_0 : a medida i é válida;
- H_1 : a medida i é errônea.

Consideremos inicialmente a definição de testes de hipóteses *com probabilidade de falso alarme fixada*. Neste caso, partimos do pressuposto que as medidas suspeitas são em princípio válidas e queremos determinar um limiar a partir do qual rejeitaremos a hipótese H_0 . Seja α o valor escolhido para a probabilidade de falso alarme. Se $L_{\alpha,i}$ é o limiar para a medida i tendo por base a estratégia de probabilidade de falso alarme fixada, podemos escrever:

$$\mathcal{P} [|\hat{\eta}_{si}| > L_{\alpha,i} \mid \text{medida } i \text{ é correta}] = \frac{\alpha}{2} \quad (6.35)$$

onde \mathcal{P} denota probabilidade. Esta situação é ilustrada na Fig. 6.3. A cláusula condicional na expressão acima implica na utilização da função densidade de probabilidade dada por (6.34) para a definição do limiar.

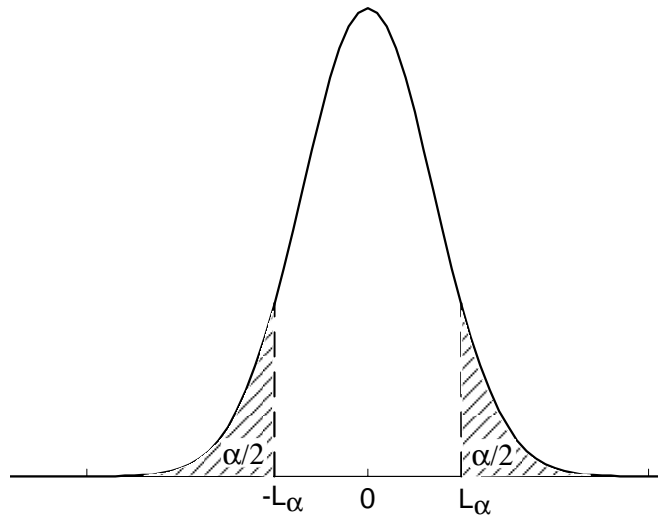


Figura 6.3: Função densidade de probabilidade de $\hat{\eta}_{si}$ e limiar para identificação de EG com probabilidade de falso alarme α fixada.

É desejável expressar $\hat{\eta}_{si}$ na forma da distribuição normal padrão, o que nos habilita a utilizar valores tabelados da distribuição $N(0,1)$. Para isto, podemos utilizar a propriedade (6.34) para re-escrever a Eq. (6.35) como:

$$\mathcal{P} \left[\left| \frac{\hat{\eta}_{si}}{\sigma_i \sqrt{\Gamma_{ii}}} \right| > \frac{L_{\alpha,i}}{\sigma_i \sqrt{\Gamma_{ii}}} \right] = \frac{\alpha}{2} \quad (6.36)$$

Se $N_{1-\frac{\alpha}{2}}$ o percentil $100 \times (1 - \frac{\alpha}{2})$ obtido da distribuição normal padrão, a Eq. (6.36) implica que:

$$\frac{L_{\alpha,i}}{\sigma_i \sqrt{\Gamma_{ii}}} = N_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

o que fornece o seguinte limiar baseado em uma estratégia de probabilidade α de falso alarme fixada para decidir sobre a aceitação da hipótese H_0 :

$$L_{\alpha,i} = N_{(1-\frac{\alpha}{2})} \sigma_i \sqrt{\Gamma_{ii}} \quad (6.37)$$

A Eq. (6.37) conduz à seguinte regra de decisão:

Rejeitar a medida i como errônea se $|\hat{\eta}_{si}| > L_{\alpha,i}$; aceitá-la em caso contrário.

Teste de Hipóteses com Probabilidade de Identificação Fixada

Nos testes de hipóteses convencionais usados para processamento de erros grosseiros, o parâmetro α é previamente especificado. Entretanto pode-se argumentar que, ao invés de fixar a probabilidade de falso alarme, e mais desejável assegurar uma dada probabilidade de identificação isto é, a probabilidade de rejeitar uma certa medida quando esta é de fato errônea [3]. Nesta situação, consideramos inicialmente que a medida em análise está contaminada com um EG de magnitude η_{si} , e desejamos determinar um limiar abaixo do qual aceitaremos a hipótese H_0 .

Seja β a probabilidade de cometermos um *erro do tipo II* (ver Seção 6.2), isto é, de aceitarmos H_0 quando de fato esta hipótese é falsa. O complemento desta hipótese, $(1 - \beta)$, é a probabilidade de *rejeitarmos* H_0 quando H_0 é falsa. Chamaremos $(1 - \beta)$ de *probabilidade de identificação*. A Fig. 6.4 ilustra a estratégia de determinar um limiar $L_{\beta i}$ para a medida i a partir da fixação de um valor para β . Na figura são mostradas as funções densidade de probabilidade considerando tanto a hipótese de que a medida i é errônea quanto a hipótese de que i é válida. Observe que estas hipóteses correspondem às distribuições dadas por (6.33) e (6.34), respectivamente.

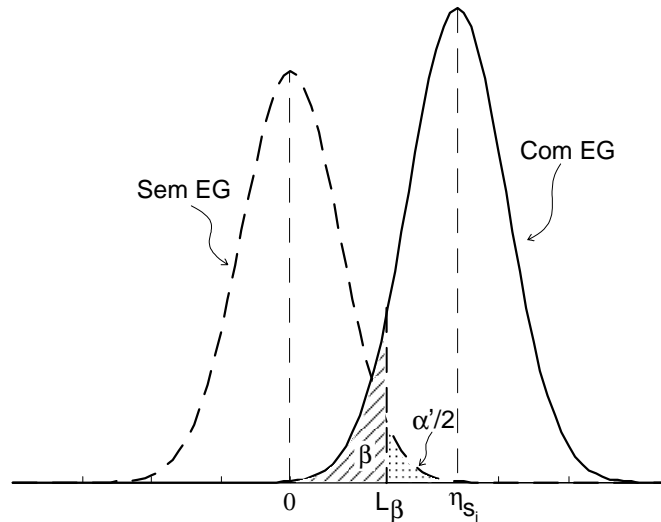


Figura 6.4: Funções densidade de probabilidade de $\hat{\eta}_{si}$ considerando que a medida i é errônea (curva sólida) e válida (curva tracejada) e limiar $L_{\beta i}$.

Da Fig. 6.4, podemos escrever:

$$\mathcal{P} [\hat{\eta}_{si} < L_{\beta i} \mid \text{medida } i \text{ é errônea}] = \beta \tag{6.38}$$

onde $L_{\beta i}$ é o limiar a ser determinado para uma *probabilidade de identificação fixada*. Agora a cláusula condicional implica em que o $L_{\beta i}$ será definido utilizando-se a função densidade de probabilidade dada pela expressão (6.33). Como antes, é interessante aplicar uma transformação à relação (6.38) de modo a permitir o uso de tabelas da normal padrão, o que fornece:

$$\mathcal{P} \left[\frac{\hat{\eta}_{si} - \eta_{si}}{\sigma_i \sqrt{\Gamma_{ii} - 1}} < \frac{L_{\beta i} - \eta_{si}}{\sigma_i \sqrt{\Gamma_{ii} - 1}} \right] = \beta \tag{6.39}$$

Definindo N_β como o percentil 100β da distribuição normal padrão, a Eq. (6.39) implica que:

$$\frac{L_{\beta i} - \eta_{si}}{\sigma_i \sqrt{\Gamma_{ii} - 1}} = N_\beta$$

e portanto o limiar desejado será dado por:

$$L_{\beta i} = \eta_{si} + \sigma_i N_\beta \sqrt{\Gamma_{ii} - 1} \quad (6.40)$$

A aplicação prática da EQ. (6.40) esbarra no desconhecimento de η_{si} . Para contornar esta dificuldade, seja η'_{si} uma constante definida como:

$$\eta'_{si} \triangleq \frac{\eta_{si}}{\sigma_i} \quad (6.41)$$

Observe que η'_{si} estabelece um nível de sensibilidade do teste de hipóteses em termos do número de desvios-padrão do erro a ser identificado. Por exemplo, η'_{si} igual a 10 torna o teste sensível para a identificação de erros de magnitude igual ou superior a dez desvios-padrão (da medida i). Usando a definição (6.41) na Eq. (6.40), obtemos:

$$L_{\beta i} = \left(\eta'_{si} + N_\beta \sqrt{\Gamma_{ii} - 1} \right) \sigma_i \quad (6.42)$$

Tanto a Fig. 6.4 quanto o desenvolvimento acima consideram apenas o caso em que $\eta_{si} > 0$, mas obviamente é necessário considerar também o caso de erros negativos. A curva da função densidade de probabilidade no caso de erros negativos seria a reflexão da curva com EG na Fig. 6.4 em relação ao eixo vertical que passa pela origem. Não é difícil se concluir que, para incluir o caso de erros grosseiros menores que zero, a expressão (6.38) deve ser estendida para:

$$\mathcal{P} [|\hat{\eta}_{si}| < L_{\beta i} \mid \text{medida } i \text{ é errônea}] = \beta$$

sendo o limiar $L_{\beta i}$ o mesmo dado pela Eq. (6.42).

Portanto, tendo-se especificado-se a probabilidade de identificação β e o nível de sensibilidade do teste η'_{si} , a regra de decisão consiste em:

Rejeitar a medida i como errônea se $|\hat{\eta}_{si}| > L_{\beta,i}$; aceitá-la em caso contrário.

A principal característica deste procedimento é a ênfase dada à identificação dos EGs, ao contrário do método convencional baseada na fixação da probabilidade de falso alarme, que enfatiza a minimização das identificações errôneas. Alguns cuidados adicionais devem entretanto ser tomados quanto à aplicação do critério baseado em β fixado para situações reais, onde baixos níveis de redundância podem levar a valores altos de Γ_{ii} , o que em casos extremos pode acarretar limiares com valor negativo. Mili e outros [3] sugerem a imposição de limites aos valores calculados para evitar situações como estas.

A Fig. 6.4 ilustra também as dificuldades em fixar simultaneamente os valores de α e β . Note que a estratégia ilustrada na figura, baseada na fixação de β para a curva com EG pode ser interpretada como se se estivesse definindo uma probabilidade de falso alarme a partir da curva sem EG. Neste caso, conforme ilustrado na Fig. 6.4, teríamos uma probabilidade de falso alarme igual a α' , já que a área sob a cauda da curva sem EG à direita do limiar é $\alpha'/2$. Se reduzirmos o valor de β , e assim aumentarmos a probabilidade

de identificação, o limiar L_β se deslocará para a esquerda e portanto a probabilidade de falso alarme aumentará. Ou seja, em geral temos que privilegiar uma das duas estratégias, possivelmente em detrimento da outra.

Levando-se em conta fatores tais como: capacidade de identificar todas as medidas espúrias sem falsos alarmes, tempo de cálculo e informações adicionais fornecidas pelos métodos, verifica-se que o método de identificação por testes de hipóteses apresenta desempenho superior ao do algoritmo de identificação por eliminação, particularmente no caso do processamento de erros grosseiros múltiplos interativos.

6.7 Processamento de Erros Grosseiros Usando o Método das Rotações de Givens

6.7.1 Detecção

O procedimento para detecção de erros grosseiros usado com o método de Givens é uma variante do teste do qui-quadrado em geral empregado com os métodos tipo *batch* clássicos. Conforme descrito nas seções anteriores, este teste consiste na comparação da soma ponderada dos quadrados dos resíduos (SPQR), obtida após o cálculo das estimativas, com um limiar K dada por

$$K = \chi_{(m-n);(1-\alpha)}^2 \quad (6.43)$$

onde $\chi_{(m-n);(1-\alpha)}^2$ denota o percentil $(1 - \alpha)$ da distribuição do qui-quadrado com $(m - n)$ graus de liberdade e α é a probabilidade de falso alarme utilizada.

Um procedimento para detecção a ser usado com o método de Givens deve tirar proveito da disponibilidade da SPQR acumulada após o processamento de cada medida. Isto equivale à realização de um teste de detecção logo após a completa anulação dos elementos de cada linha do Jacobiano (aumentada pelo elemento correspondente do vetor $\Delta \mathbf{z}$). Uma das vantagens desta abordagem é restringir a busca da medida com erro grosseiro apenas ao conjunto de medidas processadas até o ponto onde o teste for positivo. Naturalmente esta estratégia exigirá um limiar variável com a ordem da medida que está sendo processada.

Uma análise mais cuidadosa do problema mostra que, na realidade, o teste não deve ser realizado após o processamento de certas linhas da matriz Jacobiana \mathbf{H} . Para esclarecer este ponto, considere que i , $l < i < m$, seja a ordem da linha de \mathbf{H} aumentada que acabou de ser completamente zerada através de sucessivas rotações de Givens. O exame da SPQR resultante pode revelar que: (a) o valor da SPQR permaneceu inalterado; ou (b) o processamento da linha i provocou um aumento na SPQR. É claro que não há nenhum objetivo em se aplicar o teste de detecção para as medidas associadas com o caso (a). Estas medidas serão chamadas *medidas básicas*. O fato de que a SPQR não se altera após o processamento de uma medida básica implica que, até aquele ponto, nenhuma medida redundante com a medida básica foi processada. O número total de medidas básicas é igual à dimensão do vetor de estado, n .

O limiar usado no teste de detecção para o método de Givens é similar ao da Eq. 6.43, com a diferença de que o número de graus de liberdade é agora uma variável que depende da ordem da medida cujo processamento antecedeu ao teste. O procedimento completo para detecção é descrito a seguir.

Seja i a ordem da linha aumentada de \mathbf{H} que acabou de ser processada. Verifica-se inicialmente se a SPQR sofreu ou não variação com respeito ao valor correspondente à linha anteriormente processada. Em caso negativo, nenhum teste é realizado e passa-se ao processamento da linha seguinte. Em caso positivo, incrementa-se de 1 o número de graus de liberdade do qui-quadrado e em seguida compara-se o valor da nova SPQR com $\chi_{k;(1-\alpha)}^2$. Se $SPQR > \chi_{k;(1-\alpha)}^2$, conclui-se que ao menos uma medida com erro grosseiro foi processada até aquele ponto.

Ao cabo do processamento das m medidas, o número total de graus de liberdade será exatamente igual a $m - n$, de modo que um teste de detecção realizado neste ponto confunde-se com o teste usado para métodos tipo *batch* dado pela Eq. 6.43.

6.7.2 Identificação

Quando o teste de detecção for positivo, torna-se necessário identificar as medidas portadoras de erro grosseiro. O procedimento para identificação dessas medidas utilizado com o método de Givens é baseado na busca do máximo resíduo normalizado. Este também é o procedimento usado em conexão com o método da equação normal. Contudo, como acontece com o teste de detecção, é possível se tirar vantagem do caráter seqüencial do método de Givens para aumentar a eficiência do procedimento de identificação.

Sabe-se que a maior dificuldade na obtenção dos resíduos normalizados é o cálculo dos fatores de normalização, que são os inversos dos desvios padrões dos resíduos. Para obtê-los, torna-se necessário calcular os elementos diagonais da matriz de covariância dos resíduos, dada por:

$$\mathbf{W} = \mathbf{R} - \mathbf{H}\mathbf{C}_x\mathbf{H}^t \quad (6.44)$$

As matrizes \mathbf{H} e \mathbf{R} são as mesmas definidas previamente. Nota-se que é necessário o cálculo explícito da inversa $\mathbf{C}_x = (\mathbf{H}^t\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H})^{-1}$, o que requer um considerável esforço computacional.

Os problemas computacionais associados com a Eq. 6.44 são sensivelmente minorados quando o método de máximo resíduo normalizado é utilizado com as rotações de Givens.

As características das rotações de Givens permitem que:

1. O cálculo da matriz \mathbf{C}_x , e conseqüentemente de \mathbf{W} , seja facilitado expressando-se \mathbf{C}_x em termos das matrizes \mathbf{D} e $\bar{\mathbf{U}}$ da Eq. 4.9;
2. Haja necessidade de obter apenas os primeiros d elementos diagonais de \mathbf{W} , onde d é a ordem da medida após a qual o teste de detecção foi positivo

Com referência ao item (1), deve ser observado que as matrizes \mathbf{D} e $\bar{\mathbf{U}}$ já estão disponíveis, uma vez que são obtidas do processamento da linha de \mathbf{H} através das rotações de Givens. Em termos destas matrizes, mostra-se [2] que o i -ésimo elemento diagonal de \mathbf{W} , denotado por w_{ii} , pode ser escrito como

$$w_{ii} = \mathbf{R}_{ii} - \sum_{k=1}^n \left(\frac{V_{ik}}{D_{kk}} \right)^2, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (6.45)$$

onde

$$\mathbf{V} = \mathbf{H}\bar{\mathbf{U}}^{-1} \quad (6.46)$$

O cálculo da matriz \mathbf{V} requer a inversa da matriz triangular unitária $\bar{\mathbf{U}}$. A j -ésima coluna de $\bar{\mathbf{U}}^{-1}$ pode ser obtida como o vetor solução de um problema de substituição inversa cuja matriz de coeficientes é $\bar{\mathbf{U}}$ e cujo lado direito é a j -ésima coluna da matriz identidade.

O item (2) decorre do procedimento descrito no item (1) e implica em que, se d é a ordem da última medida processada pelo método de Givens antes do teste do qui-quadrado ser positivo, então basta se examinar os resíduos normalizados das medidas $1, 2, \dots, d$. O resultado é uma redução de esforço computacional, já que a matriz \mathbf{H} na Eq. 6.46 passa a ser a submatriz do Jacobiano formada por suas d primeiras linhas e $\sigma_{r_i}^2$ da Eq. 6.45 passa a ser calculado apenas para $i = 1, 2, \dots, d$. As vantagens propiciadas por este procedimento serão tanto maiores quanto mais próxima a medida espúria estiver do início da lista de medidas.

Embora a presença de um erro grosseiro possa ser detectada muito antes do processamento do último elemento do conjunto de medidas, é conveniente que a identificação seja realizada após o processamento de todas as medidas, a fim de que a redundância utilizada seja a máxima possível. Observe-se contudo que o fato de a detecção ter ocorrido antes é ainda de muita valia, pois restringe o conjunto de medidas que podem ser portadoras de erro grosseiro, conforme descrito no parágrafo anterior.

6.7.3 Remoção

No método da equação normal, a detecção de um erro grosseiro entre as medidas processadas pelo estimador invalida os resultados da estimação de estados, já que estas estão contaminadas pelos efeitos da(s) medida(s) espúria(s).

Quando se utiliza as rotações de Givens, é possível adotar um procedimento decorrente da ortogonalidade do método, o qual permite a remoção dos efeitos de erros sobre as matrizes $\bar{\mathbf{U}}$ e \mathbf{D} tão logo a medida portadora do erro grosseiro tenha sido identificada. Este procedimento consiste simplesmente em se reprocessar esta medida, com peso igual ao negativo do valor do peso original [5].

Um efeito imediato da remoção dos efeitos de uma medida espúria sobre as matrizes $\bar{\mathbf{U}}$ e \mathbf{D} é que a SPQR sofre imediatamente um decréscimo, do valor inicialmente afetado pela presença do erro grosseiro grosseiro para o valor que existiria se a medida não houvesse sido processada.

Como resultado da remoção de um erro grosseiro, torna-se agora possível aproveitar os cálculos já executados para obtenção de estimativas para os estados, até a iteração onde se realizou a detecção, identificação e remoção da medida espúria. Além disso, esta medida pode ser eliminada do conjunto de medidas a serem processadas nas iterações subsequentes. Deve-se mencionar contudo que há o risco de não se obter convergência para o processo iterativo, já que o método de Newton sofreu a influência da presença do erro grosseiro na primeira iteração. Não obstante, verifica-se para exemplos estudados que, se a matriz Jacobiana for atualizada durante algumas iterações após a remoção inicial do erro grosseiro, os riscos de divergência são muito pequenos.

6.8 Exercícios

1. Seja o sistema de potência da Fig. (6.5). As leituras dos medidores são as seguintes

$$\begin{aligned} & P_1 = 2,97 \quad t_{2,12} = 1,65 \quad t_{2,21} = -1,72 \\ \text{(em p.u.):} & \\ & P_2 = -2,94 \quad t_{1,21} = -1,9 \end{aligned}$$

As variâncias dos medidores próximos à barra 1 são iguais a 0,02 p.u., enquanto que as daqueles próximos à barra 2 são de 0,04 p.u..

- (a) Use o método dos mínimos quadrados ponderados para estimar δ_2 e as quantidades medidas, tomando o ângulo da barra 1 como referência;
- (b) Use o teste $J(\hat{\mathbf{x}})$ com probabilidade de falso alarme de 10% para investigar a presença de erros grosseiros;
- (c) Sabendo-se que os elementos diagonais da matriz de sensibilidade dos resíduos são dados por:

$$\text{diag}(\mathbf{S}) = \{0,952 \quad 0,850 \quad 0,925 \quad 0,515 \quad 0,757\}$$

onde a mesma ordenação das leituras dos medidores é utilizada, encontre o vetor de resíduos normalizados;

- (d) Se o teste no item (1a) foi positivo:
 - i. Identifique a medida portadora de erro grosseiro;
 - ii. Recupere-a.

2. Para o Exercício 2 do Capítulo 2, aplique um teste $J(\hat{\mathbf{x}})$ com probabilidade de falso alarme de 5% para detectar a presença de erros grosseiros, e identifique as medidas errôneas se a detecção for positiva.

3. Após a estimação de estados para um sistema de duas barras e plano de medição composto por seis medidas, foram observados os valores constantes da Tabela 6.1. As variâncias das medidas são iguais a $(1/9) \times 10^{-4}$ para as medidas de tensão e $(1/9) \times 10^{-2}$ para as demais medidas.

- (a) Aplique o teste- \hat{b} para detectar e identificar uma possível medida portadora de erro grosseiro;
- (b) Na hipótese de apenas uma medida ser grosseira, recupere-a.

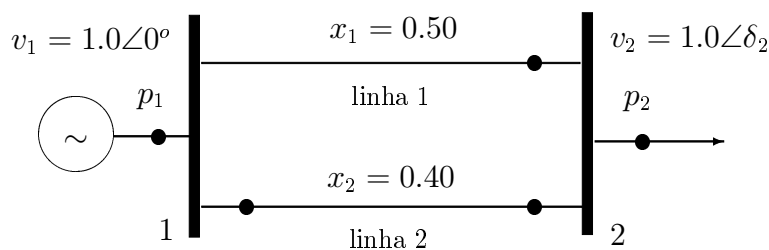


Figura 6.5: Sistema para Exercício 1.

Tabela 6.1: Tabela de dados para Exercício 3

Medida	v_1	v_2	t_{12}	t_{21}	u_{12}	u_{21}
valor de z_i	1.003	1.002	5.05	-5.02	2.06	1.31
r_i	-0.0075	0.022	-0.121	0.151	0.290	0.155
$w_{ii} \times 10^6$	5.00	4.80	695.	695.	465.	502.

Tabela 6.2: Tabela para exercício 6

Medida	q_9	t_{2-7}	u_{1-5}	u_{2-7}	p_9	v_7
resíduo	0,069	0,069	0,058	0,060	0,050	0,053

4. Para o sistema do Exercício 3 do Capítulo 2:

- (a) Calcule $J(\hat{\theta})$ e faça o teste de detecção com probabilidade de falso alarme de 1 %. Se houver erro grosseiro, identifique-o, usando o método dos resíduos ponderados;
- (b) Aplique o teste- \hat{b} para confirmar o resultado apontado pela solução do item 4a. Em caso de se concluir pela presença de erro grosseiro, identifique e recupere a medida contaminada pelo mesmo.

5. Mostre que a soma ponderada dos quadrados dos resíduos no método da equação normal pode ser expressa como:

$$J = \Delta \mathbf{z}^T \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{z} + \hat{\theta}^T \mathbf{G} \hat{\theta} - 2 \hat{\theta}^T \mathbf{b}$$

onde \mathbf{G} é a matriz ganho e $\mathbf{b} = \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{z}$.

6. Após a estimação de estados em um sistema de potência, as medidas da Tabela 6.2 foram consideradas suspeitas de serem errôneas: Todas as medidas tem variância igual a 4×10^{-4} pu e a matriz de covariância dos resíduos é dada por:

$$\mathbf{W} = 1. \times 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0,1649 & -0,0200 & 0,1000 & -0,1040 & 0,0992 & 0,0224 \\ -0,0320 & 0,2936 & 0,0808 & -0,0284 & -0,0064 & 0,0360 \\ 0,0960 & -0,1280 & 0,3280 & 0,0160 & 0,1008 & -0,1160 \\ -0,1200 & -0,0300 & 0,0160 & 0,3444 & 0,1040 & -0,0172 \\ 0,0988 & 0,0960 & 0,0920 & -0,1240 & 0,2080 & 0,0944 \\ 0,0244 & -0,1760 & -0,1160 & -0,1212 & 0,0944 & 0,2352 \end{bmatrix}$$

- (a) A partir da adoção do critério $|r_{N,i}| > 4,0$, refine a lista dada;
- (b) Aplique um teste de hipóteses com probabilidade de identificação de 98 % e $\eta'_{Si} = 10$ para identificar os erros grosseiros.

7. Para o Exercício 1 do Capítulo 4:

- (a) Faça o teste do qui-quadrado utilizando um limiar igual a 0,211 e comprove a existência de erro grosseiro em uma das medidas processadas pelo estimador;
- (b) Supondo que apenas um erro grosseiro foi processado, use o teste dos resíduos ponderados para identificar a medida errônea;
- (c) Aplique a propriedade do reprocessamento de medidas do estimador ortogonal para remover os efeitos do erro grosseiro e re-estimar os estados. Certifique-se de seu resultado re-aplicando o teste- χ^2 .

8. Uma matriz \mathbf{S} é *idempotente* se $\mathbf{S}^2 = \mathbf{S}$. Verifique que:

- (a) Os autovalores de \mathbf{S} só podem ser nulos ou iguais a 1 (Sugestão: parta de $(\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$);
- (b) A única matriz idempotente não-singular é a matriz identidade;
- (c) O posto de uma matriz idempotente é igual ao seu traço, isto é:

$$\sum_{i=1}^m s_{ii} = \text{posto}(\mathbf{S})$$

- (d) se $\mathbf{W}\mathbf{M}\mathbf{W} = \mathbf{W}$, então tanto $\mathbf{M}\mathbf{W}$ quanto $\mathbf{W}\mathbf{M}$ são idempotentes.

9. Considere um sistema de potência com N barras e m medidas, sendo $n = 2N - 1$ o número de estados a serem estimados.

- (a) Calcule o valor médio \bar{s} dos elementos diagonais da matriz de sensibilidade dos resíduos, definido como:

$$\bar{s} = \frac{\sum_{i=1}^m s_{ii}}{m}$$

e verifique que:

- i. O mínimo valor possível de \bar{s} é zero, e corresponde ao mínimo valor de m que ainda garante a observabilidade do sistema;
 - ii. O máximo valor de \bar{s} é igual a 1, e corresponde à redundância “infinita”.
- (b) se \mathbf{W} é a matriz de covariância dos resíduos, defina o valor médio das variâncias dos resíduos como:

$$\bar{\sigma}_r^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (C_r)_{ii}}{m}$$

Supondo que a matriz de covariância dos erros de medição é dada por $\mathbf{R} = \sigma_m^2 \mathbf{I}$, onde σ_m^2 são as variâncias dos erros de medição (supostas todas iguais), mostre que o valor médio das variâncias dos resíduos é dado por:

$$\bar{\sigma}_r^2 = \frac{(m - n)}{m} \sigma_m^2$$

- (c) Usando os resultados anteriores, mostre que a relação entre os resíduos normalizados (calculados com $\bar{\sigma}_r^2$) e os resíduos ponderados é dada por:

$$r_{N,i} = \sqrt{\frac{m}{m-n}} \times r_{W,i}$$

- (d) Comprove a partir do item anterior que, se $m \rightarrow n$, então $r_{W,i} \rightarrow r_{N,i}$.

Referências Bibliográficas

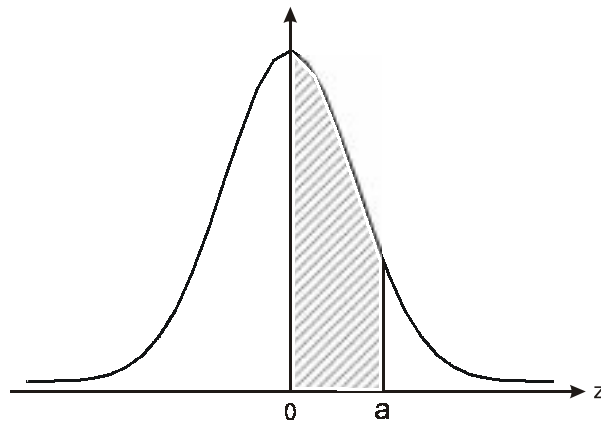
- [1] Noble B. e Daniel J. W., “Applied Linear Algebra”, 2a. edição, Prentice Hall, 1977.
- [2] Broussolle F. “State estimation in power systems: detecting bad data through the sparse inverse matrix method”, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. 97, Mai-Jun 1978.
- [3] Mili L., Van Cutsem T. e Ribbens-Pavella M. “Hypothesis testing identification: a new method for bad data analysis in power system state estimation”, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. 103 (11): 3239-3252, 1984.
- [4] Handschin E., Schweppe F. C., Kohlas J. e Fiechter A., “Bad data analysis for power system state estimation”, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. 94 (2): 329-337, 1975.
- [5] Gentleman M. W., “Least-squares computations by Givens transformations without square roots”, Journal of the Inst. Math. Applics., 12:329-336, 1973.

Apêndice

Tabelas de Distribuições Estatísticas

1. Distribuição Normal Padrão

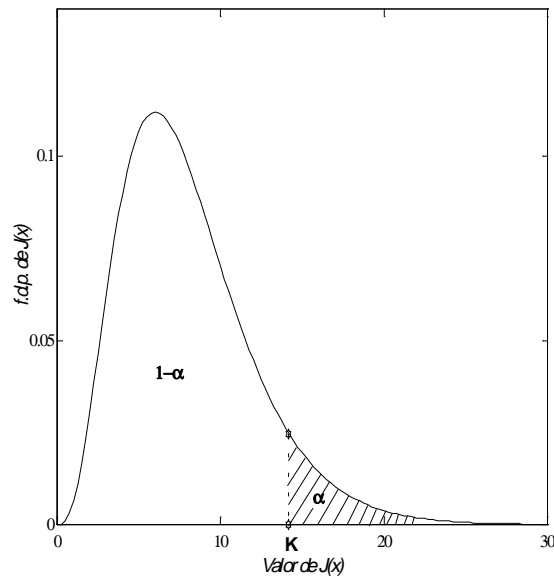
A tabela da página seguinte apresenta a relação entre a abcissa $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ da função densidade de probabilidade da distribuição normal e a probabilidade $\mathcal{P}(0 \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{a})$. A figura abaixo ilustra os valores relacionados na tabela.



$\mathcal{P}(0 \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{a})$										
a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

2. Distribuição do Qui-Quadrado

A tabela da página seguinte fornece os percentís da distribuição do Qui-Quadrado com ℓ graus de liberdade, para diversos valores de $(1 - \alpha)$. A figura abaixo ilustra a relação entre os parâmetros apresentados na tabela.



Percentis da Distribuição do Qui-Quadrado com ℓ graus de liberdade										
ℓ	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.990}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.950}$	$\chi^2_{.900}$	$\chi^2_{.750}$	$\chi^2_{.500}$	$\chi^2_{.250}$	$\chi^2_{.100}$	$\chi^2_{.050}$
1	7,88	6,63	5,02	3,84	2,71	1,32	0,455	0,102	0,0158	0,0039
2	10,6	9,21	7,38	5,99	4,61	2,77	1,39	0,575	0,211	0,103
3	12,8	11,3	9,35	7,81	6,25	4,11	2,37	1,21	0,584	0,352
4	14,9	13,3	11,1	9,49	7,78	5,39	3,36	1,92	1,06	0,711
5	16,7	15,1	12,8	11,1	9,24	6,63	4,35	2,67	1,61	1,15
6	18,5	16,8	14,4	12,6	10,6	7,84	5,35	3,45	2,20	1,64
7	20,3	18,5	16,0	14,1	12,0	9,04	6,35	4,25	2,83	2,17
8	22,0	20,1	17,5	15,5	13,4	10,2	7,34	5,07	3,49	2,73
9	23,6	21,7	19,0	16,9	14,7	11,4	8,34	5,90	4,17	3,33
10	25,2	23,2	20,5	18,3	16,0	12,5	9,34	6,74	4,87	3,94
11	26,8	24,7	21,9	19,7	17,3	13,7	10,3	7,58	5,58	4,57
12	28,3	26,2	23,3	21,0	18,5	14,8	11,3	8,44	6,30	5,23
13	29,8	27,7	24,7	22,4	19,8	16,0	12,3	9,30	7,04	5,89
14	31,3	29,1	26,1	23,7	21,1	17,1	13,3	10,2	7,79	6,57
15	32,8	30,6	27,5	25,0	22,3	18,2	14,3	11,0	8,55	7,26
16	34,3	32,0	28,8	26,3	23,5	19,4	15,3	11,9	9,31	7,96
17	35,7	33,4	30,2	27,6	24,8	20,5	16,3	12,8	10,1	8,67
18	37,2	34,8	31,5	28,9	26,0	21,6	17,3	13,7	10,9	9,39
19	38,6	36,2	32,9	30,1	27,2	22,7	18,3	14,6	11,7	10,1
20	40,0	37,6	34,2	31,4	28,4	23,8	19,3	15,5	12,4	10,9
21	41,4	38,9	35,5	32,7	29,6	24,9	20,3	16,3	13,2	11,6
22	42,8	40,3	36,8	33,9	30,9	26,0	21,3	17,2	14,0	12,3
23	44,2	41,6	38,1	35,2	32,0	27,1	22,3	18,1	14,8	13,1
24	45,6	43,0	39,4	36,4	33,2	28,2	23,3	19,0	15,7	13,8
25	46,9	44,3	40,6	37,7	34,4	29,3	24,3	19,9	16,5	14,6
26	48,3	45,6	41,9	38,9	35,6	30,4	25,3	20,8	17,3	15,4
27	49,6	47,0	43,2	40,1	36,7	31,5	26,3	21,7	18,1	16,2
28	51,0	48,3	44,5	41,3	37,9	32,6	27,3	22,7	18,9	16,9
29	52,3	49,6	45,7	42,6	39,1	33,7	28,3	23,6	19,8	17,7
30	53,7	50,9	47,0	43,8	40,3	34,8	29,3	24,5	20,6	18,5