

## *Identificação de erros grosseiros*

Tipos de teste:

- ▶ identificação por eliminação;
  - ▶ baseada nos resíduos normalizados;
  - ▶ executa sucessivos testes de detecção-identificação-eliminação (ou recuperação).
- ▶ identificação por teste de hipóteses;
  - ▶ baseada numa estimativa dos erros;
  - ▶ trata coletivamente as medidas errôneas;

## *Identificação por Eliminação*

Base: ciclos sucessivos de *eliminação - estimação - detecção* até que o teste de detecção se torne negativo.

*Algoritmo:*

1. Estimar os estados;
2. Calcular as variâncias dos resíduos e as magnitudes dos resíduos normalizados  $|r_N|$ ;
3. Identificar a medida com o maior resíduo normalizado  $|r_N|$ . Estimar a amplitude do erro na medida  $\hat{\beta}_k$ ;
4. Teste de detecção: verificar se  $\hat{\beta}_k > \lambda$ . Em caso negativo, o processo é encerrado. Em caso afirmativo, remover (ou recuperar) a medida  $k$ , e retornar ao primeiro passo.

## *Identificação Baseada em Testes de Hipóteses*

Partição das medidas:

- ▶ *medidas válidas* ( $v$ );
- ▶ *medidas suspeitas de conterem erros grosseiros* ( $s$ );

Critério: valores absolutos dos resíduos normalizados. (medidas cujos resíduos normalizados tem módulo superior a *um* certo limiar  $\lambda$ , por exemplo).

Vetor de erros de medição:

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_v \\ \eta_s \end{bmatrix}$$

$\eta_v$  e  $\eta_s$ : medidas válidas e suspeitas.

# Processamento de Erros Grosseiros Múltiplos

Resíduos  $\Leftrightarrow$  erros de medição:

$$\mathbf{r} = \mathbf{S}\boldsymbol{\eta}$$

Partições similares em  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{S}$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_V \\ \mathbf{r}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{VV} & \mathbf{S}_{VS} \\ \mathbf{S}_{SV} & \mathbf{S}_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_V \\ \boldsymbol{\eta}_S \end{bmatrix}$$

tal que,

$$\mathbf{r}_S = \mathbf{S}_{SS}\boldsymbol{\eta}_S + \mathbf{S}_{SV}\boldsymbol{\eta}_V$$

e

$$\mathbf{r}_S = \mathbf{S}_{SS} \boldsymbol{\eta}_S + \mathbf{v}$$

$$\mathbf{v} \triangleq \mathbf{S}_{SV} \boldsymbol{\eta}_V$$

# Processamento de Erros Grosseiros Múltiplos

Inexistência de medidas espúrias  $\Rightarrow$  erros aleatórios de pequena magnitude em  $\mathbf{v}$ .

Estimativa dos erros de medição  $\boldsymbol{\eta}_s$ :

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_s = \mathbf{S}_{ss}^{-1} \mathbf{r}_s$$

Não-singularidade de  $\mathbf{S}_{ss}$ : assegurada se o estado do sistema é observável com as  $(m - s)$  medidas restantes.

*Caracterização Estatística das Estimativas dos Erros de Medição*

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_s = \boldsymbol{\eta}_s + \mathbf{S}_{ss}^{-1} \mathbf{S}_{sv} \boldsymbol{\eta}_v$$

Valor esperado do erro das medidas suspeitas:

$$E \{ \hat{\boldsymbol{\eta}}_s \} = E \{ \boldsymbol{\eta}_s \} + \mathbf{S}_{ss}^{-1} \mathbf{S}_{sv} E \{ \boldsymbol{\eta}_v \}$$

$E \{ \boldsymbol{\eta}_v \} = 0$ , então

$$E \{ \hat{\boldsymbol{\eta}}_s \} = E \{ \boldsymbol{\eta}_s \}$$

# Processamento de Erros Grosseiros Múltiplos

Covariância do erro das medidas suspeitas:

$$\text{Cov} \{ \hat{\eta}_s \} = \text{Cov} \{ \eta_s \} + \mathbf{S}_{SS}^{-1} (\mathbf{S}_{SV} \mathbf{R}_V \mathbf{S}_{SV}^t) \mathbf{S}_{SS}^{-t}$$

onde

$$\mathbf{SRS}^t = \mathbf{SR}$$

e portanto

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{SS} & \mathbf{S}_{SV} \\ \mathbf{S}_{VS} & \mathbf{S}_{VV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{SS}^t & \mathbf{S}_{VS}^t \\ \mathbf{S}_{SV}^t & \mathbf{S}_{VV}^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{SS} \mathbf{R}_S & \mathbf{S}_{SV} \mathbf{R}_V \\ \mathbf{S}_{VS} \mathbf{R}_S & \mathbf{S}_{VV} \mathbf{R}_V \end{bmatrix}$$

tal que,

$$\mathbf{S}_{SS} \mathbf{R}_S \mathbf{S}_{SS}^t + \mathbf{S}_{SV} \mathbf{R}_V \mathbf{S}_{SV}^t = \mathbf{S}_{SS} \mathbf{R}_S$$

$$\mathbf{S}_{SV} \mathbf{R}_V \mathbf{S}_{SV}^t = \mathbf{S}_{SS} \mathbf{R}_S - \mathbf{S}_{SS} \mathbf{R}_S \mathbf{S}_{SS}^t$$

$$\text{Cov} \{ \hat{\eta}_s \} = \text{Cov} \{ \eta_s \} + \mathbf{R}_S (\mathbf{\Gamma}^t - \mathbf{I})$$

onde,  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{S}_{SS}^{-1}$  e  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade.

# Processamento de Erros Grosseiros Múltiplos

Variância da  $i$ -ésima medida:

$$\text{Var} \{ \hat{\eta}_{s_i} \} = \text{Var} \{ \eta_{s_i} \} + \sigma_i^2 (\Gamma_{ii} - 1)$$

Se a  $i$ -ésima medida suspeita é portadora de erro grosseiro,  $\eta_{s_i}$  é determinístico e

$$\begin{aligned} E \{ \eta_{s_i} \} &= \eta_{s_i} \\ \text{Var} \{ \eta_{s_i} \} &= 0 \end{aligned}$$

tal que,

$$\begin{aligned} E \{ \hat{\eta}_{s_i} \} &= \eta_{s_i} \\ \text{Var} \{ \hat{\eta}_{s_i} \} &= 0 + \sigma_i^2 (\Gamma_{ii} - 1) \end{aligned}$$

$$\hat{\eta}_{s_i} \sim N(\eta_{s_i}, \sigma_i^2 (\Gamma_{ii} - 1))$$

$N(\mu, \sigma^2)$ : distribuição normal de probabilidade com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ .

# Processamento de Erros Grosseiros Múltiplos

Conclusão:

- ▶ medida  $i$  for errônea, todas as medidas com erro grosseiro consideradas suspeitas  $\Rightarrow \hat{\eta}_s \sim N(\eta_{s_i}, \sigma_i^2(\Gamma_{ii} - 1))$ ;
- ▶ se a medida  $i$  for válida e todas as medidas errôneas pertencerem ao conjunto das suspeitas,

$$E\{\eta_{s_i}\} = 0$$

$$\text{Cov}\{\eta_{s_i}\} = \sigma_i^2$$

tal que,

$$E\{\hat{\eta}_{s_i}\} = 0$$

$$\text{Cov}\{\hat{\eta}_{s_i}\} = \sigma_i^2 + \sigma_i^2(\Gamma_{ii} - 1) = \sigma_i^2\Gamma_{ii}$$

e,

$$\hat{\eta}_{s_i} \sim N(0, \sigma_i^2\Gamma_{ii})$$



## *Teste de Hipóteses com Probabilidade de Falso Alarme Fixada*

Hipóteses básica e alternativa:

- ▶  $H_0$ : a medida  $i$  é válida;
- ▶  $H_1$ : a medida  $i$  é errônea.

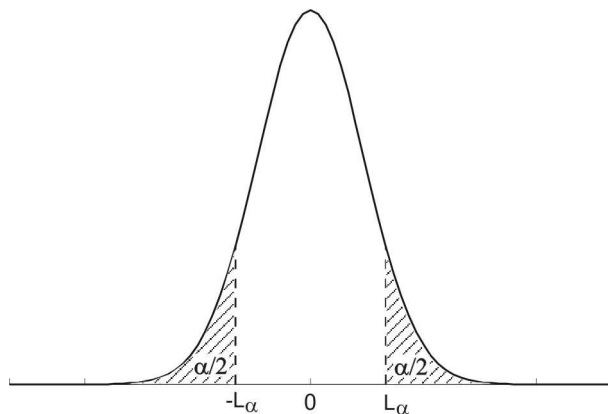
$\alpha$ : probabilidade de falso alarme.

$L_{\alpha,i}$ : limiar para a medida  $i$  tendo por base a estratégia de probabilidade de falso alarme fixada.

$$\mathcal{P} [|\hat{\eta}_{si}| > L_{\alpha,i} \mid \text{medida } i \text{ é correta}] = \frac{\alpha}{2}$$

# Processamento de erros grosseiros Múltiplos

F. D. P. de  $\hat{\eta}_{si}$  e limiar para identificação de EG com probabilidade de falso alarme  $\alpha$  fixada.



# Processamento de Erros Grosseiros Múltiplos

$$\mathcal{P} \left[ \left| \frac{\hat{\eta}_{si}}{\sigma_i \sqrt{\Gamma_{ii}}} \right| > \lambda_\alpha \right] = \frac{\alpha}{2}$$

$N_{1-\frac{\alpha}{2}}$ : percentil  $100 \times (1 - \frac{\alpha}{2})$  obtido da distribuição normal padrão.

$$\lambda_\alpha = N_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Estratégia para decidir sobre a aceitação de  $H_0$ :

$$L_{\alpha,i} = N_{(1-\frac{\alpha}{2})} \sigma_i \sqrt{\Gamma_{ii}}$$

Regra de decisão:

- ▶ rejeitar a medida  $i$  como errônea se  $|\hat{\eta}_{si}| > L_{\alpha,i}$
- ▶ aceitá-la em caso contrário.

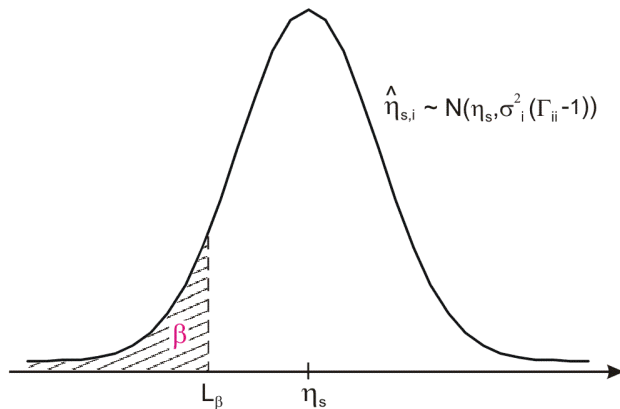
## *Teste de Hipóteses com Probabilidade de Identificação Fixada*

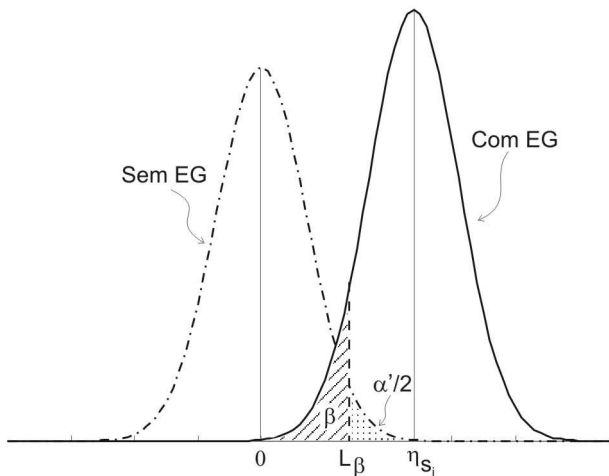
$\beta$ : probabilidade de cometermos um *erro do tipo II* (aceitarmos  $H_0$  quando esta é falsa).

$(1 - \beta)$ : probabilidade de *rejeitarmos*  $H_0$  quando  $H_0$  é falsa (*probabilidade de identificação*).

# Processamento de erros grosseiros Múltiplos

Identificação de EG com  $\beta$  fixado.





Processamento de erros grosseiros Múltiplos - F. D. P. de  $\hat{\eta}_{s_i}$  -  
 medidas errônea e válida e limiar  $L_{\beta_i}$ .

# Processamento de Erros Grosseiros Múltiplos

Da figura:

$$\mathcal{P} [\hat{\eta}_{si} < L_{\beta i} \mid \text{medida } i \text{ é errônea}] = \beta$$

$L_{\beta i}$ : limiar a ser determinado para uma *probabilidade de identificação fixada*.

Cláusula condicional:

$$\mathcal{P} \left[ \frac{\hat{\eta}_{si} - \eta_{si}}{\sigma_i \sqrt{\Gamma_{ii} - 1}} < \lambda_{\beta} \right] = \beta$$

$N_{\beta}$ : percentil  $100\beta$  da distribuição normal padrão.

$$\lambda_{\beta} = N_{\beta}$$

Limiar desejado:

$$L_{\beta i} = \eta_{si} + \sigma_i N_{\beta} \sqrt{\Gamma_{ii} - 1}$$

Dificuldade: desconhecimento de  $\eta_{si}$ .

$$\eta'_{si} \triangleq \frac{\eta_{si}}{\sigma_i}$$

$\eta'_{si}$ : estabelece um nível de sensibilidade do teste de hipóteses em termos do número de desvios-padrão do erro a ser identificado.

$$L_{\beta i} = \left( \eta'_{si} + N_{\beta} \sqrt{\Gamma_{ii} - 1} \right) \sigma_i$$



# Processamento de Erros Grosseiros Múltiplos

Erros grosseiros  $< 0$ :

$$\mathcal{P} [|\hat{\eta}_{si}| < L_{\beta i} \mid \textit{medida } i \textit{ é errônea}] = \beta$$

Regra de decisão:

- ▶ rejeitar a medida  $i$  como errônea se  $|\hat{\eta}_{si}| > L_{\beta,i}$ ;
- ▶ aceitá-la em caso contrário.

Principal característica: ênfase dada à identificação dos EGs.

Cuidados adicionais: baixos níveis de redundância podem levar a valores altos de  $\Gamma_{ii}$ , o que em casos extremos pode acarretar limiares com valor negativo.

# Processamento de Erros Grosseiros Múltiplos - Exemplo

Sistema de 3 barras, 6 medidas, variâncias dos erros de medição iguais a  $1 \times 10^{-4}$ .

Resultados da EESP:

- ▶ vetor de resíduos de estimação:

$$\mathbf{r} = [ 0,062 \quad 0,255 \quad 0,092 \quad 0,017 \quad 0,146 \quad 0,137 ]^t$$

- ▶ matriz de sensibilidade dos resíduos:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0,780 & -0,083 & -0,043 & -0,303 & 0,263 & 0,040 \\ -0,083 & 0,896 & 0,099 & -0,186 & -0,016 & 0,202 \\ -0,043 & 0,099 & 0,807 & 0,056 & 0,236 & 0,292 \\ -0,303 & -0,186 & 0,056 & 0,510 & 0,247 & 0,242 \\ 0,263 & -0,016 & 0,236 & 0,247 & 0,500 & 0,252 \\ 0,040 & 0,202 & 0,292 & 0,242 & 0,252 & 0,506 \end{bmatrix}$$

# Processamento de Erros Grosseiros Múltiplos - Exemplo

- ▶ resíduos normalizados:

$$\mathbf{r}_{N,i} = \frac{r_i}{\sqrt{W_{ii}}}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{SR} = \mathbf{1} \times 10^{-4} \mathbf{S}$$

$$\mathbf{r}_N = [ 7,027 \quad \boxed{26,900} \quad 10,250 \quad 2,345 \quad \boxed{20,610} \quad \boxed{19,326} ]^t$$

- ▶ *Definição das medidas suspeitas*

Medidas com os três maiores resíduos normalizados:

$$\mathbf{z}_s = [z_2, z_5, z_6]^t$$

Resíduos associados:

$$\mathbf{r}_s = [ 0,255 \quad 0,146 \quad 0,137 ]^t$$

# Processamento de Erros Grosseiros Múltiplos - Exemplo

► *Estimação dos erros de medição*

Partição na matriz **S**:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0,780 & -0,083 & -0,043 & -0,303 & 0,263 & 0,040 \\ -0,083 & \mathbf{0,896} & 0,099 & -0,186 & \mathbf{-0,016} & \mathbf{0,202} \\ -0,043 & 0,099 & 0,807 & 0,056 & 0,236 & 0,292 \\ -0,303 & -0,186 & 0,056 & 0,510 & 0,247 & 0,242 \\ 0,263 & \mathbf{-0,016} & 0,236 & 0,247 & \mathbf{0,500} & \mathbf{0,252} \\ 0,040 & \mathbf{0,202} & 0,292 & 0,242 & \mathbf{0,252} & \mathbf{0,506} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{ss} = \begin{bmatrix} 0,896 & -0,016 & 0,202 \\ -0,016 & 0,500 & 0,252 \\ 0,202 & 0,252 & 0,506 \end{bmatrix}$$

- ▶ matriz de sensibilidade inversa:

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{S}_{ss}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{1,283} & 0,399 & -0,712 \\ 0,399 & \mathbf{2,790} & -1,550 \\ -0,712 & -1,550 & \mathbf{3,034} \end{bmatrix}$$

Vetor de estimativas para os erros de medição:

$$\hat{\eta}_s = \mathbf{\Gamma} \mathbf{r}_s = \begin{bmatrix} 0,287 \\ 0,295 \\ 0,010 \end{bmatrix}$$

- ▶ *Teste de hipóteses com probabilidade de falso alarme fixada*  
( $\alpha = 0,01$ )

$$N_{1-\frac{\alpha}{2}} = N_{0,995} = 2,575$$

# Tabela da Distribuição Normal

$\mathcal{P}(0 \leq z \leq a)$										
<b>a</b>	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,000	0,004	0,008	0,012	0,016	0,019	0,023	0,027	0,031	0,035
0,2	0,079	0,083	0,087	0,091	0,094	0,098	0,102	0,106	0,110	0,114
0,4	0,155	0,159	0,162	0,166	0,170	0,173	0,177	0,180	0,184	0,188
0,6	0,225	0,229	0,232	0,235	0,238	0,242	0,245	0,248	0,251	0,254
0,8	0,288	0,291	0,293	0,296	0,299	0,302	0,305	0,307	0,310	0,313
1,0	0,341	0,343	0,346	0,348	0,350	0,353	0,355	0,357	0,359	0,361
1,2	0,384	0,386	0,388	0,390	0,392	0,394	0,396	0,398	0,399	0,401
1,4	0,419	0,420	0,422	0,423	0,425	0,426	0,427	0,429	0,430	0,431
1,5	0,433	0,434	0,435	0,437	0,438	0,439	0,440	0,441	0,442	0,443
1,6	0,445	0,446	0,447	0,448	0,449	0,450	0,451	0,452	0,453	0,454
1,7	0,455	0,456	0,457	0,458	0,459	0,459	0,460	0,461	0,462	0,463
1,8	0,464	0,464	0,465	0,466	0,467	0,467	0,468	0,469	0,469	0,470

# Tabela da Distribuição Normal

$P(0 \leq z \leq a)$										
<b>a</b>	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,9	0,471	0,471	0,472	0,473	0,473	0,474	0,475	0,475	0,476	0,477
2,0	0,477	0,477	0,478	0,478	0,479	0,479	0,480	0,480	0,481	0,482
2,1	0,482	0,482	0,483	0,483	0,483	0,484	0,484	0,485	0,485	0,486
2,2	0,486	0,486	0,486	0,487	0,487	0,487	0,488	0,488	0,488	0,489
2,3	0,489	0,489	0,489	0,490	0,490	0,490	0,490	0,491	0,491	0,492
2,4	0,491	0,492	0,492	0,492	0,492	0,492	0,493	0,493	0,493	0,494
2,5	0,493	0,494	0,494	0,494	0,494	0,494	0,494	0,494	0,495	0,495
2,6	0,495	0,495	0,495	0,495	0,495	0,496	0,496	0,496	0,496	0,497
2,7	0,496	0,496	0,496	0,496	0,496	0,497	0,497	0,497	0,497	0,498
2,8	0,497	0,497	0,497	0,497	0,497	0,497	0,497	0,497	0,498	0,498
2,9	0,498	0,498	0,498	0,498	0,498	0,498	0,498	0,498	0,498	0,499
3,0	0,498	0,498	0,498	0,498	0,498	0,498	0,498	0,498	0,499	0,499

► Limiares:

$$L_{\alpha,i} = N_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma_i \sqrt{\Gamma_{ii}}$$

$$L_{\alpha,2} = 2,575 \times 0,01 \times \sqrt{1,283} = 0,029$$

$$L_{\alpha,5} = 2,575 \times 0,01 \times \sqrt{2,790} = 0,043$$

$$L_{\alpha,6} = 2,575 \times 0,01 \times \sqrt{3,034} = 0,045$$

$$\eta_{s,2} > \lambda_2$$

$$\eta_{s,5} > \lambda_5$$

$$\eta_{s,6} < \lambda_6$$

**Conclusão:**  $z_2$  e  $z_5$  são errôneas.



- ▶ *Teste de hipóteses com probabilidade de identificação fixada -  $\beta = 0,01$*

Limiaries:

$$L_{\beta,i} = \sigma_i (\eta'_{si} + N_{\beta} \sqrt{\Gamma_{ii} - 1})$$

$$\beta = 0,01 \Rightarrow N_{\beta} = -2,33$$

$$\eta'_{si} = 10$$

$$L_{\beta_2} = 0,01 \times (10 - 2,33\sqrt{0,283}) = 0,087$$

$$L_{\beta_5} = 0,01 \times (10 - 2,33\sqrt{1,790}) = 0,068$$

$$L_{\beta_6} = 0,01 \times (10 - 2,33\sqrt{2,034}) = 0,067$$

**Conclusão:** Os resultados da identificação baseada em  $\beta$  fixado confirmam os resultados anteriores.