Processamento de erros grosseiros - Recuperação

Suposição: apenas uma medida com erro grosseiro

$$z_k^e = z_k + \beta$$

z_k^e: valor da medida espúria;
z_k: valor da medida sem erro grosseiro;
β: amplitude do erro grosseiro.
Modelo linearizado:

$$\mathbf{\Delta z}^e = \mathbf{\Delta z} + \beta \mathbf{e}_k$$

$\mathbf{e}_k$: vetor $m \times 1$, com todos os elementos nulos exceto o $k-$*ésimo* elemento, que é unitário.

Vetor dos resíduos:

$$\mathbf{r}^e = \mathbf{S}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{z} + \beta\mathbf{s}_k$$

$\mathbf{s}_k$: $k - \textit{ésima}$ coluna da matriz $\mathbf{S}$.
Recuperação da medida espúria:

- estimativa da amplitude do erro grosseiro β
- geração de pseudo-medida subtraindo este valor da medida incorreta.

$\hat{\beta}$: estimativa para amplitude do erro grosseiro que minimiza a função objetivo

$$J(\hat{\beta}) = (\mathbf{r}^e - \hat{\beta}\mathbf{s}_k)^t\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{r}^e - \hat{\beta}\mathbf{s}_k)$$

Processamento de erros grosseiros - Recuperação

Condição necessária para mínimo:

$$\frac{\partial J(\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{s}_k^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}_k)\hat{\beta} = \mathbf{s}_k^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}^e$$

$$\hat{\beta} = \frac{\mathbf{s}_k^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}^e}{(\mathbf{s}_k^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}_k)}$$

Denominador do segundo termo:

$$(\mathbf{s}_k^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}_k) = [\mathbf{S}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}]_{kk}$$

$$\mathbf{S}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S} = (\mathbf{W}\mathbf{R}^{-1})^t \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{W}\mathbf{R}^{-1}) = \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{W}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{W}) \mathbf{R}^{-1}$$

$$\mathbf{W}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{W} = \mathbf{W}$$

$$\mathbf{S}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{W} \mathbf{R}^{-1}$$

$$(\mathbf{s}_k^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}_k) = [\mathbf{R}^{-1} \mathbf{W} \mathbf{R}^{-1}]_{kk} = \sigma_k^{-4} W_{kk}$$

Processamento de erros grosseiros - Recuperação

$$\mathbf{s}_k^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}^e = \sigma_k^{-2} r_k^e$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sigma_k^2}{W_{kk}} r_k^e$$

Medida recuperada:

$$z_k^{rec} = z_k^e - \frac{\sigma_k^2}{W_{kk}} r_k^e$$

Em termos do resíduo normalizado,

$$z_k^{rec} = z_k^e - \frac{\sigma_k^2}{\sqrt{W_{kk}}} r_{N_k}^e$$

Resíduo associado à medida recuperada

$$\Delta z_k^{rec} = \Delta z_k^e - \frac{\sigma_k^2}{W_{kk}} r_k^e$$

$$\mathbf{r}^{rec} = \mathbf{S}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{z}^{rec} = \mathbf{W}\mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{z}^{rec}$$

k-ésimo resíduo:

$$r_k^{rec} = \sum_{i=1}^{m} W_{ki}\sigma_i^{-2}\Delta z_i^e - W_{kk}\sigma_k^{-2}\frac{\sigma^2}{W_{kk}}\ r_k^e$$

$$r_k^{rec} = \sum_{i=1}^{m} W_{ki}\sigma_i^{-2}\Delta z_i^e - r_k^e$$

Logo,

$$r_k^{rec} = 0$$

Conclusão: *o resíduo associado à medida recuperada é nulo.*