Estimação de Estados pelo Método do *Tableau* Esparso

Inclusão de Informações *A Priori* e Restrições de Igualdade

EEL 6302 - Análise de Segurança de Sistemas de Potência
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Prof. Antonio Simões Costa

LABSPOT - EEL - UFSC

Formulação Completa do Problema de Estimação de Estados - Método do Tableau Esparso

Considerando:

- Informações *a priori* e
- Restrições de igualdade

o problema completo de EESP pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} \min \quad & J(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\, \mathbf{r}_m^T\, \mathbf{R}_m^{-1}\, \mathbf{r}_m \,+\, \frac{1}{2}\, (\hat{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}})^T\, \mathbf{P}^{-1}\, (\hat{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}) \\ \textit{sujeito a} \quad & \\ & \mathbf{z} - \mathbf{h}_m(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{r}_m = \mathbf{0} \\ & -\mathbf{h}_e(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Formulação Matemática e Função Lagrangeana

- Formulação como problema de otimização:

$$
\begin{array}{ll}
\min & J(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\, \mathbf{r}_m^T\, \mathbf{R}_m^{-1}\, \mathbf{r}_m + \frac{1}{2}\, (\hat{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}})^T\, \mathbf{P}^{-1}\, (\hat{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}) \\
s.\ a & \\
 & \begin{aligned} \mathbf{z} - \mathbf{h}_m(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{r}_m &= \mathbf{0} \\ -\mathbf{h}_e(\hat{\mathbf{x}}) &= \mathbf{0} \end{aligned}
\end{array}
$$

Formulação Matemática e Função Lagrangeana

- Formulação como problema de otimização:

$$\min \quad J(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\,\mathbf{r}_m^T\,\mathbf{R}_m^{-1}\,\mathbf{r}_m + \frac{1}{2}\,(\hat{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{x}})^T\,\mathbf{P}^{-1}\,(\hat{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{x}})$$

$$s.\,a$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z} - \mathbf{h}_m(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{r}_m &= \mathbf{0} \\ -\mathbf{h}_e(\hat{\mathbf{x}}) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

- Função Lagrangeana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \; & \frac{1}{2}\,\mathbf{r}_m^T\,\mathbf{R}_m^{-1}\,\mathbf{r}_m + \frac{1}{2}\,(\hat{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{x}})^T\,\mathbf{P}^{-1}\,(\hat{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{x}}) + \\ & \boldsymbol{\lambda}_m^T\,[\mathbf{z} - \mathbf{h}_m(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{r}_m] + \boldsymbol{\lambda}_e^T\,[-\mathbf{h}_e(\hat{\mathbf{x}})] \end{aligned}$$

Condições de Otimalidade

- Condições de factibilidade dual:

$$\nabla_{\mathbf{r}_m}\mathcal{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_m^{-1}\ \mathbf{r}_m - \boldsymbol{\lambda}_m = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{r}_m = \mathbf{R}\ \boldsymbol{\lambda}_m}$$

$$\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\mathcal{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}^{-1}\ (\hat{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{x}}) - \mathbf{H}_m^T(\hat{\mathbf{x}})\ \boldsymbol{\lambda}_m - \mathbf{H}_e^T(\hat{\mathbf{x}})\ \boldsymbol{\lambda}_e = \mathbf{0} \quad (1)$$

onde $\mathbf{H}_m(\hat{\mathbf{x}}) = \left[\frac{\partial \mathbf{h}_m(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}}\right]$ e $\mathbf{H}_e(\hat{\mathbf{x}}) = \left[\frac{\partial \mathbf{h}_e(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}}\right]$;

Condições de Otimalidade

- Condições de factibilidade dual:

$$\nabla_{\mathbf{r}_m}\mathcal{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_m^{-1}\ \mathbf{r}_m - \boldsymbol{\lambda}_m = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{r}_m = \mathbf{R}\ \boldsymbol{\lambda}_m}$$

$$\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\mathcal{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}^{-1}\ (\hat{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{x}}) - \mathbf{H}_m^T(\hat{\mathbf{x}})\ \boldsymbol{\lambda}_m - \mathbf{H}_e^T(\hat{\mathbf{x}})\ \boldsymbol{\lambda}_e = \mathbf{0} \quad (1)$$

onde $\mathbf{H}_m(\hat{\mathbf{x}}) = \left[\frac{\partial \mathbf{h}_m(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}}\right]$ e $\mathbf{H}_e(\hat{\mathbf{x}}) = \left[\frac{\partial \mathbf{h}_e(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}}\right]$;

- Condições de factibilidade primal:

$$\nabla_{\lambda_m}\mathcal{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{z} - \mathbf{h}_m(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{r}_m = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{z} - \mathbf{h}_m(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{R}_m\ \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (2)$$

$$\nabla_{\lambda_e}\mathcal{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\mathbf{h}_e(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad (3)$$

Condições de Otimalidade Linearizadas (I)

- Condições de otimalidade:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1}\ (\hat{\mathbf{x}}-\overline{\mathbf{x}}) - \mathbf{H}_m^T(\hat{\mathbf{x}})\ \lambda_m - \mathbf{H}_e^T(\hat{\mathbf{x}})\ \lambda_e &= \mathbf{0} & \quad (1) \\ \mathbf{z} - \mathbf{h}_m(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{R}_m\ \lambda_{\mathbf{m}} &= \mathbf{0} & \quad (2) \\ -\mathbf{h}_e(\hat{\mathbf{x}}) &= \mathbf{0} & \quad (3) \end{aligned}$$

Condições de Otimalidade Linearizadas (I)

- Condições de otimalidade:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}^{-1}\ (\hat{\mathbf{x}}-\overline{\mathbf{x}}) - \mathbf{H}_m^T(\hat{\mathbf{x}})\ \boldsymbol{\lambda}_m - \mathbf{H}_e^T(\hat{\mathbf{x}})\ \boldsymbol{\lambda}_e &= \mathbf{0} \qquad (1) \\
\mathbf{z} - \mathbf{h}_m(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{R}_m\ \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{m} &= \mathbf{0} \qquad (2) \\
-\mathbf{h}_e(\hat{\mathbf{x}}) &= \mathbf{0} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

- Equações que traduzem as condições de otimalidade são não-lineares em $\hat{\mathbf{x}}$, embora sejam lineares em $\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{m}$ e $\boldsymbol{\lambda}_e$;

Condições de Otimalidade Linearizadas (I)

- Condições de otimalidade:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1}\ (\hat{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{H}_m^T(\hat{\mathbf{x}})\ \boldsymbol{\lambda}_m - \mathbf{H}_e^T(\hat{\mathbf{x}})\ \boldsymbol{\lambda}_e &= \mathbf{0} \qquad (1) \\ \mathbf{z} - \mathbf{h}_m(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{R}_m\ \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{m} &= \mathbf{0} \qquad (2) \\ -\mathbf{h}_e(\hat{\mathbf{x}}) &= \mathbf{0} \qquad (3) \end{aligned}$$

- Equações que traduzem as condições de otimalidade são não-lineares em $\hat{\mathbf{x}}$, embora sejam lineares em $\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{m}$ e $\boldsymbol{\lambda}_e$;
- Linearizando-se $\mathbf{h}_m(\hat{\mathbf{x}})$ da Eq. (2) em torno de $\mathbf{x}^k$:

$$\mathbf{h}_m(\hat{\mathbf{x}}) \approx \mathbf{h}_m(\mathbf{x}^k) + \mathbf{H}_m(\mathbf{x}^k)\ (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^k)$$

Condições de Otimalidade Linearizadas (I)

- Condições de otimalidade:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1}\ (\hat{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{H}_m^T(\hat{\mathbf{x}})\ \boldsymbol{\lambda}_m - \mathbf{H}_e^T(\hat{\mathbf{x}})\ \boldsymbol{\lambda}_e &= \mathbf{0} \qquad (1) \\ \mathbf{z} - \mathbf{h}_m(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{R}_m\ \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{m} &= \mathbf{0} \qquad (2) \\ -\mathbf{h}_e(\hat{\mathbf{x}}) &= \mathbf{0} \qquad (3) \end{aligned}$$

- Equações que traduzem as condições de otimalidade são não-lineares em $\hat{\mathbf{x}}$, embora sejam lineares em $\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{m}$ e $\boldsymbol{\lambda}_e$;
- Linearizando-se $\mathbf{h}_m(\hat{\mathbf{x}})$ da Eq. (2) em torno de $\mathbf{x}^k$:

$$\mathbf{h}_m(\hat{\mathbf{x}}) \approx \mathbf{h}_m(\mathbf{x}^k) + \mathbf{H}_m(\mathbf{x}^k)\ (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^k)$$

- Substituindo-se $\mathbf{h}_m(\hat{\mathbf{x}})$ na Eq. (2) obtêm-se sua forma linearizada:

$$\underbrace{\mathbf{z} - \mathbf{h}_m(\mathbf{x}^k)}_{\Delta\mathbf{z}} - \mathbf{H}_m(\mathbf{x}^k)\ \underbrace{(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^k)}_{\Delta\mathbf{x}} - \mathbf{R}_m\ \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{m} = \mathbf{0}$$

ou

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{x}^k)\ \Delta\mathbf{x} - \mathbf{R}_m\ \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{m} = \Delta\mathbf{z} \qquad (2')$$

Condições de Otimalidade Linearizadas (II)

- Desconsiderando-se as variações de segunda ordem de $\mathbf{h}_m$ e $\mathbf{h}_e$ com respeito a $\hat{\mathbf{x}}$, a Equação (1) torna-se linear em $\hat{\mathbf{x}}$, $\boldsymbol{\lambda}_m$ e $\boldsymbol{\lambda}_e$:

$$\mathbf{P}^{-1} \ (\hat{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{H}_m^T(\mathbf{x}^k) \ \boldsymbol{\lambda}_m - \mathbf{H}_e^T(\mathbf{x}^k) \ \boldsymbol{\lambda}_e \quad = \quad \mathbf{0}.$$

Porém deve-se expressar $\hat{\mathbf{x}}$ em termos da nova variável incremental como

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^k + \Delta\mathbf{x}$$

o que resulta em

$$-\mathbf{P}^{-1} \ \Delta\mathbf{x} + \mathbf{H}_m^T(\mathbf{x}^k) \ \boldsymbol{\lambda}_m + \mathbf{H}_e^T(\mathbf{x}^k) \ \boldsymbol{\lambda}_e = \mathbf{P}^{-1} \ \left(\mathbf{x}^k - \bar{\mathbf{x}}\right) \qquad (1')$$

Condições de Otimalidade Linearizadas (III)

- Finalmente, deve-se linearizar a terceira condição de otimalidade:

$$-\mathbf{h}_e(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad (3)$$

Condições de Otimalidade Linearizadas (III)

- Finalmente, deve-se linearizar a terceira condição de otimalidade:

$$-\mathbf{h}_e(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad (3)$$

- o que resulta em:

$$\mathbf{H}_e(\mathbf{x}^k)\ \Delta\mathbf{x} = -\mathbf{h}_e(\mathbf{x}^k) \qquad (3')$$

Condições de Otimalidade Linearizadas - Síntese

- As três condições de otimalidade na forma linearizada são:

$$
\begin{array}{rcll}
-\mathbf{P}^{-1}\ \Delta\mathbf{x} + \mathbf{H}_m^T(\mathbf{x}^k)\ \boldsymbol{\lambda}_m + \mathbf{H}_e^T(\mathbf{x}^k)\ \boldsymbol{\lambda}_e & = & \mathbf{P}^{-1}\ \left(\mathbf{x}^k - \bar{\mathbf{x}}\right) & \color{red}{(1')} \\
\mathbf{H}_m(\mathbf{x}^k)\ \Delta\mathbf{x} - \mathbf{R}_m\ \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{m} & = & \Delta\mathbf{z} & \color{red}{(2')} \\
\mathbf{H}_e(\mathbf{x}^k)\ \Delta\mathbf{x} & = & -\mathbf{h}_e(\mathbf{x}^k) & \color{red}{(3')}
\end{array}
$$

Condições de Otimalidade Linearizadas - Síntese

- As três condições de otimalidade na forma linearizada são:

$$\begin{aligned} -\mathbf{P}^{-1}\ \Delta\mathbf{x} + \mathbf{H}_m^T(\mathbf{x}^k)\ \boldsymbol{\lambda}_m + \mathbf{H}_e^T(\mathbf{x}^k)\ \boldsymbol{\lambda}_e &= \mathbf{P}^{-1}\ \left(\mathbf{x}^k - \bar{\mathbf{x}}\right) & \text{(1')} \\ \mathbf{H}_m(\mathbf{x}^k)\ \Delta\mathbf{x} - \mathbf{R}_m\ \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{m} &= \Delta\mathbf{z} & \text{(2')} \\ \mathbf{H}_e(\mathbf{x}^k)\ \Delta\mathbf{x} &= -\mathbf{h}_e(\mathbf{x}^k) & \text{(3')} \end{aligned}$$

- Na forma matricial, estas equações são conhecidas como Tableau Esparso:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{H}_m^T & \mathbf{H}_e^T \\ \mathbf{H}_m & \mathbf{R}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_e & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda}_m \\ \boldsymbol{\lambda}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}\ \left(\mathbf{x}^k - \bar{\mathbf{x}}\right) \\ \mathbf{z} - \mathbf{h}_m(\mathbf{x}^k) \\ -\mathbf{h}_e(\mathbf{x}^k) \end{bmatrix}$$

Condições de Otimalidade Linearizadas - Síntese

- As três condições de otimalidade na forma linearizada são:

$$\begin{array}{rcll} -\mathbf{P}^{-1}\ \Delta\mathbf{x} + \mathbf{H}_m^T(\mathbf{x}^k)\ \boldsymbol{\lambda}_m + \mathbf{H}_e^T(\mathbf{x}^k)\ \boldsymbol{\lambda}_e & = & \mathbf{P}^{-1}\ (\mathbf{x}^k - \bar{\mathbf{x}}) & (1') \\ \mathbf{H}_m(\mathbf{x}^k)\ \Delta\mathbf{x} - \mathbf{R}_m\ \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{m} & = & \Delta\mathbf{z} & (2') \\ \mathbf{H}_e(\mathbf{x}^k)\ \Delta\mathbf{x} & = & -\mathbf{h}_e(\mathbf{x}^k) & (3') \end{array}$$

- Na forma matricial, estas equações são conhecidas como Tableau Esparso:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{H}_m^T & \mathbf{H}_e^T \\ \mathbf{H}_m & \mathbf{R}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_e & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda}_m \\ \boldsymbol{\lambda}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}\ (\mathbf{x}^k - \bar{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{z} - \mathbf{h}_m(\mathbf{x}^k) \\ -\mathbf{h}_e(\mathbf{x}^k) \end{bmatrix}$$

- A solução a cada iteração permite a atualização iterativa de $\hat{\mathbf{x}}$.