Solução de Sistemas Lineares Modificados

Antonio Simões Costa

GSP - LABSPOT

Enunciado do Problema

- Dado um sistema linear de dimensão n

$$\mathbf{A}\ \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Enunciado do Problema

- Dado um sistema linear de dimensão n

$$\mathbf{A}\ \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

  - O esforço computacional necessário para solução via fatoração LU é dominado pelas $n^3/3$ *flops* exigidas pelos algoritmos da fatoração;

Enunciado do Problema

- Dado um sistema linear de dimensão n

$$\mathbf{A}\ \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

  - O esforço computacional necessário para solução via fatoração LU é dominado pelas $n^3/3$ *flops* exigidas pelos algoritmos da fatoração;
- Suponha que os fatores de **A** já foram calculados e que a solução **x** já foi determinada;

Enunciado do Problema

- Dado um sistema linear de dimensão n

$$\mathbf{A}\ \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

  - O esforço computacional necessário para solução via fatoração LU é dominado pelas $n^3/3$ *flops* exigidas pelos algoritmos da fatoração;

- Suponha que os fatores de **A** já foram calculados e que a solução **x** já foi determinada;
- *Problema:* Encontrar a solução do sistema

$$\overline{\mathbf{A}}\ \overline{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$$

onde

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{V}\ \mathbf{W}^T$$

é uma *modificação de posto k* de **A**.

Alternativas de solução

- *Abordagem trivial:* dado o sistema modificado

$$\overline{\mathbf{A}}\ \overline{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$$

determinar a fatoração LU de $\overline{\mathbf{A}}$ e resolver o sistema usando substituições direta e inversa;

Alternativas de solução

- *Abordagem trivial:* dado o sistema modificado

$$\overline{\mathbf{A}}\ \overline{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$$

  determinar a fatoração LU de $\overline{\mathbf{A}}$ e resolver o sistema usando substituições direta e inversa;
- Contudo, se o posto k for relativamente pequeno, isto é,

$$k \lll n$$

  há a expectativa de resolver o sistema modificado com com esforço computacional significativamente menor;

Alternativas de solução

- *Abordagem trivial:* dado o sistema modificado

$$\overline{\mathbf{A}}\ \overline{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$$

  determinar a fatoração LU de $\overline{\mathbf{A}}$ e resolver o sistema usando substituições direta e inversa;
- Contudo, se o posto k for relativamente pequeno, isto é,

$$k \lll n$$

  há a expectativa de resolver o sistema modificado com com esforço computacional significativamente menor;
- Algoritmos para resolver sistemas modificados podem ser desenvolvidos empregando-se a *fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury.*

Fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury

- Partindo-se da relação entre $\overline{\mathbf{A}}$ e $\mathbf{A}$

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{V}\ \mathbf{W}^T,$$

Fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury

- Partindo-se da relação entre $\overline{\mathbf{A}}$ e $\mathbf{A}$

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{V}\,\mathbf{W}^T,$$

- a fórmula de *S-M-W* preconiza que

$$\overline{\mathbf{A}}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{V}\,\underbrace{\left(\mathbf{I} + \mathbf{W}^T\,\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{V}\right)^{-1}}_{\stackrel{\Delta}{=}\,\mathbf{C}}\,\mathbf{W}^T\,\mathbf{A}^{-1}$$

Fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury

- Partindo-se da relação entre $\overline{\mathbf{A}}$ e $\mathbf{A}$

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{V}\,\mathbf{W}^T,$$

- a fórmula de *S-M-W* preconiza que

$$\overline{\mathbf{A}}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{V}\,\underbrace{\left(\mathbf{I} + \mathbf{W}^T\,\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{V}\right)^{-1}}_{\triangleq\,\mathbf{C}}\,\mathbf{W}^T\,\mathbf{A}^{-1}$$

- Portanto,

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}} &= \overline{\mathbf{A}}^{-1}\,\mathbf{b} \\ &= \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{V}\,\mathbf{C}\,\mathbf{W}^T\,\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}\end{aligned}$$

Cálculo da matriz C - (I)

- Conforme vimos, a matriz **C**, de dimensão $k \times k$, é definida como

$$\mathbf{C} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{W}^T\ \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{V}\right)^{-1}$$

Cálculo da matriz C - (I)

- Conforme vimos, a matriz **C**, de dimensão $k \times k$, é definida como

$$\mathbf{C} = (\mathbf{I} + \mathbf{W}^T \ \mathbf{A}^{-1} \ \mathbf{V})^{-1}$$

- Considerando que $\mathbf{A} = \mathbf{L} \ \mathbf{U}$, temos que

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}$$

Cálculo da matriz C - (I)

- Conforme vimos, a matriz $\mathbf{C}$, de dimensão $k \times k$, é definida como

$$\mathbf{C} = (\mathbf{I} + \mathbf{W}^T \ \mathbf{A}^{-1} \ \mathbf{V})^{-1}$$

- Considerando que $\mathbf{A} = \mathbf{L} \ \mathbf{U}$, temos que

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}$$

- Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= (\mathbf{I} + \mathbf{W}^T \ \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1} \ \mathbf{V})^{-1} \\ &= (\mathbf{I} + \overline{\mathbf{W}}^T \ \overline{\mathbf{V}})^{-1} \end{aligned}$$

  onde $\overline{\mathbf{W}}$ e $\overline{\mathbf{V}}$ devem ser obtidos resolvendo-se os sistemas triangulares inferiores:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^T \ \overline{\mathbf{W}} &= \mathbf{W} \\ \mathbf{L} \ \overline{\mathbf{V}} &= \mathbf{V} \end{aligned}$$

Cálculo da matriz C - (II)

- A solução dos dois sistemas triangulares

$$\mathbf{U}^T \, \overline{\mathbf{W}} \;=\; \mathbf{W}$$

$$\mathbf{L} \, \overline{\mathbf{V}} \;=\; \mathbf{V}$$

  requer $O(n^2 k)$ flops;

Cálculo da matriz C - (II)

- A solução dos dois sistemas triangulares

$$\mathbf{U}^T \overline{\mathbf{W}} = \mathbf{W}$$

$$\mathbf{L} \overline{\mathbf{V}} = \mathbf{V}$$

  requer $O(n^2 k)$ flops;
- A inversão de $(\mathbf{I} + \overline{\mathbf{W}}^T \overline{\mathbf{V}})$ requer $O(k^3)$;

Cálculo da matriz C - (II)

- A solução dos dois sistemas triangulares

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^T \, \overline{\mathbf{W}} &= \mathbf{W} \\ \mathbf{L} \, \overline{\mathbf{V}} &= \mathbf{V} \end{aligned}$$

  requer $O(n^2 k)$ flops;
- A inversão de $(\mathbf{I} + \overline{\mathbf{W}}^T \, \overline{\mathbf{V}})$ requer $O(k^3)$;
- Como se supõe que $k \ll n$, conclui-se que o cálculo de **C** implica em $O(n^2 k)$ flops.

Variantes da Aplicação da Fórmula de S-M-W

Há três variantes para resolver a equação resultante da aplicação da fórmula de S-M-W:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{V}\ \mathbf{C}\ \mathbf{W}^{T}\ \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{b}$$

- Método da *pós-compensação;*
- Método da *pré-compensação;*
- Método da *compensação intermediária.*

Método da pós-compensação (I)

- Reconsidere a equação básica obtida da fórmula de S-M-W:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{V}\,\mathbf{C}\,\mathbf{W}^{T}\,\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$$

Método da pós-compensação (I)

- Reconsidere a equação básica obtida da fórmula de S-M-W:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{V}\ \mathbf{C}\ \mathbf{W}^{T}\ \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{b}$$

- O método da pós-compensação é obtido re-escrevendo-se a equação acima como

$$\bar{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{V}\ \mathbf{C}\ \mathbf{W}^{T}\right)\ \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{b}$$

Método da pós-compensação (I)

- Reconsidere a equação básica obtida da fórmula de S-M-W:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{V}\,\mathbf{C}\,\mathbf{W}^{T}\,\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$$

- O método da pós-compensação é obtido re-escrevendo-se a equação acima como

$$\bar{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{V}\,\mathbf{C}\,\mathbf{W}^{T}\right)\,\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$$

- ou seja,

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}} &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{V}\,\mathbf{C}\,\mathbf{W}^{T}\right)\,\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x} - \mathbf{U}^{-1}\,\overline{\mathbf{V}}\,\mathbf{C}\,\mathbf{W}^{T}\,\mathbf{x}\end{aligned}$$

Método da pós-compensação (I)

- Reconsidere a equação básica obtida da fórmula de S-M-W:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{V}\,\mathbf{C}\,\mathbf{W}^{T}\,\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$$

- O método da pós-compensação é obtido re-escrevendo-se a equação acima como

$$\bar{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{V}\,\mathbf{C}\,\mathbf{W}^{T}\right)\,\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$$

- ou seja,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{V}\,\mathbf{C}\,\mathbf{W}^{T}\right)\,\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x} - \mathbf{U}^{-1}\,\overline{\mathbf{V}}\,\mathbf{C}\,\mathbf{W}^{T}\,\mathbf{x} \end{aligned}$$

- O segundo termo acima corresponde à modificação na solução do "caso base".

Método da pós-compensação (II)

- Equação básica do método da pós-compensação:

$$\bar{\mathbf{x}} \;=\; \mathbf{x} \;+\; \underbrace{\left(-\mathbf{U}^{-1}\overline{\mathbf{V}}\;\mathbf{C}\;\mathbf{W}^{T}\;\mathbf{x}\right)}_{\Delta\mathbf{x}}$$

Método da pós-compensação (II)

- Equação básica do método da pós-compensação:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \underbrace{\left(-\mathbf{U}^{-1}\overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{C}\ \mathbf{W}^{T}\ \mathbf{x}\right)}_{\Delta\mathbf{x}}$$

- O termo $\Delta\mathbf{x}$, que modifica a solução do sistema original, será calculado da direita para a esquerda;

Método da pós-compensação (II)

- Equação básica do método da pós-compensação:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \underbrace{\left(-\mathbf{U}^{-1}\overline{\mathbf{V}}\,\mathbf{C}\,\mathbf{W}^{T}\,\mathbf{x}\right)}_{\Delta\mathbf{x}}$$

- O termo $\Delta\mathbf{x}$, que modifica a solução do sistema original, será calculado da direita para a esquerda;
- Será suposto que:

Método da pós-compensação (II)

- Equação básica do método da pós-compensação:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \underbrace{\left(-\mathbf{U}^{-1}\overline{\mathbf{V}}\,\mathbf{C}\,\mathbf{W}^T\,\mathbf{x}\right)}_{\Delta\mathbf{x}}$$

- O termo $\Delta\mathbf{x}$, que modifica a solução do sistema original, será calculado da direita para a esquerda;
- Será suposto que:
  - Os fatores de $\mathbf{A} = \mathbf{L}\;\mathbf{U}$ já foram calculados e estão disponíveis;

Método da pós-compensação (II)

- Equação básica do método da pós-compensação:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \underbrace{\left(-\mathbf{U}^{-1}\overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{C}\ \mathbf{W}^{T}\ \mathbf{x}\right)}_{\Delta\mathbf{x}}$$

- O termo $\Delta\mathbf{x}$, que modifica a solução do sistema original, será calculado da direita para a esquerda;
- Será suposto que:
  - Os fatores de $\mathbf{A} = \mathbf{L}\ \mathbf{U}$ já foram calculados e estão disponíveis;
  - $\overline{\mathbf{V}}$ e $\overline{\mathbf{W}}$ são calculados como solução dos sistemas triangulares já indicados;

Método da pós-compensação (II)

- Equação básica do método da pós-compensação:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \underbrace{\left(-\mathbf{U}^{-1}\overline{\mathbf{V}}\,\mathbf{C}\,\mathbf{W}^T\,\mathbf{x}\right)}_{\Delta\mathbf{x}}$$

- O termo $\Delta\mathbf{x}$, que modifica a solução do sistema original, será calculado da direita para a esquerda;
- Será suposto que:
  - Os fatores de $\mathbf{A} = \mathbf{L}\ \mathbf{U}$ já foram calculados e estão disponíveis;
  - $\overline{\mathbf{V}}$ e $\overline{\mathbf{W}}$ são calculados como solução dos sistemas triangulares já indicados;
  - A matriz $\mathbf{C}$, de dimensão $k \times k$, é obtida a partir de $\overline{\mathbf{V}}$ e $\overline{\mathbf{W}}$, conforme já mostrado.

Algoritmo do método da pós-compensação

- Deseja-se calcular o vetor $\Delta\mathbf{x}$ que modifica a solução do sistema original:

$$\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{U}^{-1}\overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{C}\ \mathbf{W}^{T}\ \mathbf{x}$$

Algoritmo do método da pós-compensação

- Deseja-se calcular o vetor $\Delta\mathbf{x}$ que modifica a solução do sistema original:

$$\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{U}^{-1}\overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{C}\ \mathbf{W}^{T}\ \mathbf{x}$$

- Etapas do algoritmo:

Algoritmo do método da pós-compensação

- Deseja-se calcular o vetor $\Delta\mathbf{x}$ que modifica a solução do sistema original:

$$\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{U}^{-1}\overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{C}\ \mathbf{W}^{T}\ \mathbf{x}$$

- Etapas do algoritmo:

1. Calcular $\mathbf{f} = \mathbf{W}^{T}\ \mathbf{x}$;

Algoritmo do método da pós-compensação

- Deseja-se calcular o vetor $\Delta \mathbf{x}$ que modifica a solução do sistema original:

$$\Delta \mathbf{x} = -\mathbf{U}^{-1}\overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{C}\ \mathbf{W}^T\ \mathbf{x}$$

- Etapas do algoritmo:

1. Calcular $\mathbf{f} = \mathbf{W}^T\ \mathbf{x}$;
2. Calcular $\mathbf{g} = \mathbf{C}\ \mathbf{f}$;

Algoritmo do método da pós-compensação

- Deseja-se calcular o vetor $\Delta\mathbf{x}$ que modifica a solução do sistema original:

$$\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{U}^{-1}\overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{C}\ \mathbf{W}^{T}\ \mathbf{x}$$

- Etapas do algoritmo:

1. Calcular $\mathbf{f} = \mathbf{W}^{T}\ \mathbf{x}$;
2. Calcular $\mathbf{g} = \mathbf{C}\ \mathbf{f}$;
3. Calcular $\mathbf{y} = \overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{g}$;

Algoritmo do método da pós-compensação

- Deseja-se calcular o vetor $\Delta\mathbf{x}$ que modifica a solução do sistema original:

$$\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{U}^{-1}\overline{\mathbf{V}}\;\mathbf{C}\;\mathbf{W}^T\;\mathbf{x}$$

- Etapas do algoritmo:

1. Calcular $\mathbf{f} = \mathbf{W}^T\;\mathbf{x}$;
2. Calcular $\mathbf{g} = \mathbf{C}\;\mathbf{f}$;
3. Calcular $\mathbf{y} = \overline{\mathbf{V}}\;\mathbf{g}$;
4. Resolver sistema triangular:

$$\mathbf{U}\;\Delta\mathbf{x} = -\;\mathbf{y}$$

Algoritmo do método da pós-compensação

- Deseja-se calcular o vetor $\Delta\mathbf{x}$ que modifica a solução do sistema original:

$$\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{U}^{-1}\overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{C}\ \mathbf{W}^T\ \mathbf{x}$$

- Etapas do algoritmo:

1. Calcular $\mathbf{f} = \mathbf{W}^T\ \mathbf{x}$;
2. Calcular $\mathbf{g} = \mathbf{C}\ \mathbf{f}$;
3. Calcular $\mathbf{y} = \overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{g}$;
4. Resolver sistema triangular:

$$\mathbf{U}\ \Delta\mathbf{x} = -\ \mathbf{y}$$

5. Calcular $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$.

Desempenho do Algoritmo do método da pós-compensação

- Requer $\approx O(n^2k)$ flops, se $k \ll n$;

Desempenho do Algoritmo do método da pós-compensação

- Requer $\approx O(n^2 k)$ flops, se $k \ll n$;
- Para n grande, isto é muito menor do que $O(n^3/3)$ flops requeridos pela solução direta do sistema modificado;

Desempenho do Algoritmo do método da pós-compensação

- Requer $\approx O(n^2 k)$ flops, se $k \ll n$;
- Para n grande, isto é muito menor do que $O(n^3/3)$ flops requeridos pela solução direta do sistema modificado;
- Exemplo:

Desempenho do Algoritmo do método da pós-compensação

- Requer $\approx O(n^2 k)$ flops, se $k \ll n$;
- Para n grande, isto é muito menor do que $O(n^3/3)$ flops requeridos pela solução direta do sistema modificado;
- Exemplo:
    - $n = 1000 \Rightarrow n^3/3 = (1/3) \times 10^9$;

Desempenho do Algoritmo do método da pós-compensação

- Requer $\approx O(n^2 k)$ flops, se $k \ll n$;
- Para n grande, isto é muito menor do que $O(n^3/3)$ flops requeridos pela solução direta do sistema modificado;
- Exemplo:
  - $n = 1000 \Rightarrow n^3/3 = (1/3) \times 10^9$;
  - $n = 1000$ e $k = 2 \Rightarrow n^2 k = 2 \times 10^6$.

Método da pré-compensação (I)

- Reconsidere a equação básica obtida da fórmula de S-M-W:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{V}\,\mathbf{C}\,\mathbf{W}^{T}\,\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$$

Método da pré-compensação (I)

- Reconsidere a equação básica obtida da fórmula de S-M-W:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{V}\ \mathbf{C}\ \mathbf{W}^{T}\ \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{b}$$

- O método da pré-compensação é obtido re-escrevendo-se a equação acima como

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1} \left(\mathbf{b} - \mathbf{V}\ \mathbf{C}\ \mathbf{W}^{T}\ \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{b} \right)$$

Método da pré-compensação (I)

- Reconsidere a equação básica obtida da fórmula de S-M-W:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{V}\,\mathbf{C}\,\mathbf{W}^{T}\,\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$$

- O método da pré-compensação é obtido re-escrevendo-se a equação acima como

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{b} - \mathbf{V}\,\mathbf{C}\,\mathbf{W}^{T}\,\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}\right)$$

- ou seja

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\underbrace{\left(\mathbf{b} - \mathbf{V}\,\mathbf{C}\,\mathbf{W}^{T}\,\mathbf{x}\right)}_{\bar{\mathbf{b}}}$$

Método da pré-compensação (I)

- Reconsidere a equação básica obtida da fórmula de S-M-W:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{V}\,\mathbf{C}\,\mathbf{W}^{T}\,\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$$

- O método da pré-compensação é obtido re-escrevendo-se a equação acima como

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{b} - \mathbf{V}\,\mathbf{C}\,\mathbf{W}^{T}\,\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}\right)$$

- ou seja

$$\bar{\mathbf{x}} \;=\; \mathbf{A}^{-1}\;\underbrace{\left(\mathbf{b} - \mathbf{V}\,\mathbf{C}\,\mathbf{W}^{T}\,\mathbf{x}\right)}_{\bar{\mathbf{b}}}$$

- que pode ser re-interpretado como

$$\mathbf{A}\,\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{b}}$$

Método da pré-compensação (I)

- Reconsidere a equação básica obtida da fórmula de S-M-W:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{V}\;\mathbf{C}\;\mathbf{W}^T\;\mathbf{A}^{-1}\;\mathbf{b}$$

- O método da pré-compensação é obtido re-escrevendo-se a equação acima como

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{b} - \mathbf{V}\;\mathbf{C}\;\mathbf{W}^T\;\mathbf{A}^{-1}\;\mathbf{b}\right)$$

- ou seja

$$\bar{\mathbf{x}} \;=\; \mathbf{A}^{-1}\;\underbrace{\left(\mathbf{b} - \mathbf{V}\;\mathbf{C}\;\mathbf{W}^T\;\mathbf{x}\right)}_{\bar{\mathbf{b}}}$$

- que pode ser re-interpretado como

$$\mathbf{A}\;\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{b}}$$

- Este método, portanto, *modifica o vetor independente* para obter a solução do sistema modificado. O novo vetor independente $\bar{\mathbf{b}}$ depende da solução do sistema original, $\mathbf{x}$.

Método da pré-compensação (II)

- Equação básica do método da pré-compensação:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1} \underbrace{\left(\mathbf{b} - \mathbf{V}\,\mathbf{C}\,\mathbf{W}^{T}\,\mathbf{x}\right)}_{\bar{\mathbf{b}}}$$

Método da pré-compensação (II)

- Equação básica do método da pré-compensação:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1} \underbrace{\left(\mathbf{b} - \mathbf{V}\ \mathbf{C}\ \mathbf{W}^T\ \mathbf{x}\right)}_{\bar{\mathbf{b}}}$$

- O termo que modifica o vetor independente será calculado da direita para a esquerda;

Método da pré-compensação (II)

- Equação básica do método da pré-compensação:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1} \underbrace{\left(\mathbf{b} - \mathbf{V}\ \mathbf{C}\ \mathbf{W}^{T}\ \mathbf{x}\right)}_{\bar{\mathbf{b}}}$$

- O termo que modifica o vetor independente será calculado da direita para a esquerda;
- Será suposto que:

Método da pré-compensação (II)

- Equação básica do método da pré-compensação:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1} \underbrace{\left(\mathbf{b} - \mathbf{V}\,\mathbf{C}\,\mathbf{W}^T\,\mathbf{x}\right)}_{\bar{\mathbf{b}}}$$

- O termo que modifica o vetor independente será calculado da direita para a esquerda;
- Será suposto que:
    - Os fatores de $\mathbf{A} = \mathbf{L}\;\mathbf{U}$ já foram calculados e estão disponíveis;

Método da pré-compensação (II)

- Equação básica do método da pré-compensação:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1} \underbrace{\left(\mathbf{b} - \mathbf{V}\,\mathbf{C}\,\mathbf{W}^T\,\mathbf{x}\right)}_{\bar{\mathbf{b}}}$$

- O termo que modifica o vetor independente será calculado da direita para a esquerda;
- Será suposto que:
  - Os fatores de $\mathbf{A} = \mathbf{L}\,\mathbf{U}$ já foram calculados e estão disponíveis;
  - $\overline{\mathbf{V}}$ e $\overline{\mathbf{W}}$ são calculados como solução dos sistemas triangulares já indicados;

Método da pré-compensação (II)

- Equação básica do método da pré-compensação:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1} \underbrace{\left(\mathbf{b} - \mathbf{V}\ \mathbf{C}\ \mathbf{W}^T\ \mathbf{x}\right)}_{\bar{\mathbf{b}}}$$

- O termo que modifica o vetor independente será calculado da direita para a esquerda;
- Será suposto que:
  - Os fatores de $\mathbf{A} = \mathbf{L}\ \mathbf{U}$ já foram calculados e estão disponíveis;
  - $\overline{\mathbf{V}}$ e $\overline{\mathbf{W}}$ são calculados como solução dos sistemas triangulares já indicados;
  - A matriz $\mathbf{C}$, de dimensão $k \times k$, é obtida a partir de $\overline{\mathbf{V}}$ e $\overline{\mathbf{W}}$, conforme já mostrado.

Algoritmo do método da pré-compensação

- Deseja-se calcular a solução do sistema modificado através de uma modificação aplicada ao vetor independente:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}\left(\mathbf{b} - \mathbf{V}\ \mathbf{C}\ \mathbf{W}^{T}\ \mathbf{x}\right)$$

Algoritmo do método da pré-compensação

- Deseja-se calcular a solução do sistema modificado através de uma modificação aplicada ao vetor independente:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}\left(\mathbf{b} - \mathbf{V}\ \mathbf{C}\ \mathbf{W}^{T}\ \mathbf{x}\right)$$

- Etapas do algoritmo:

Algoritmo do método da pré-compensação

- Deseja-se calcular a solução do sistema modificado através de uma modificação aplicada ao vetor independente:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}\left(\mathbf{b} - \mathbf{V}\;\mathbf{C}\;\mathbf{W}^{T}\;\mathbf{x}\right)$$

- Etapas do algoritmo:

1. Calcular $\mathbf{f} = \mathbf{W}^{T}\;\mathbf{x}$;

Algoritmo do método da pré-compensação

- Deseja-se calcular a solução do sistema modificado através de uma modificação aplicada ao vetor independente:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}\left(\mathbf{b} - \mathbf{V}\ \mathbf{C}\ \mathbf{W}^T\ \mathbf{x}\right)$$

- Etapas do algoritmo:

1. Calcular $\mathbf{f} = \mathbf{W}^T\ \mathbf{x}$;
2. Calcular $\mathbf{g} = \mathbf{C}\ \mathbf{f}$;

Algoritmo do método da pré-compensação

- Deseja-se calcular a solução do sistema modificado através de uma modificação aplicada ao vetor independente:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}\left(\mathbf{b} - \mathbf{V}\ \mathbf{C}\ \mathbf{W}^T\ \mathbf{x}\right)$$

- Etapas do algoritmo:

1. Calcular $\mathbf{f} = \mathbf{W}^T\ \mathbf{x}$;
2. Calcular $\mathbf{g} = \mathbf{C}\ \mathbf{f}$;
3. Calcular $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - \mathbf{V}\ \mathbf{g}$;

Algoritmo do método da pré-compensação

- Deseja-se calcular a solução do sistema modificado através de uma modificação aplicada ao vetor independente:

$$\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}\left(\mathbf{b} - \mathbf{V}\ \mathbf{C}\ \mathbf{W}^T\ \mathbf{x}\right)$$

- Etapas do algoritmo:

1. Calcular $\mathbf{f} = \mathbf{W}^T\ \mathbf{x}$;
2. Calcular $\mathbf{g} = \mathbf{C}\ \mathbf{f}$;
3. Calcular $\overline{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - \mathbf{V}\ \mathbf{g}$;
4. Resolver sistema triangular:

$$\mathbf{L}\ \overline{\mathbf{x}}' = \overline{\mathbf{b}}$$

Algoritmo do método da pré-compensação

- Deseja-se calcular a solução do sistema modificado através de uma modificação aplicada ao vetor independente:

$$\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}\left(\mathbf{b} - \mathbf{V}\ \mathbf{C}\ \mathbf{W}^{T}\ \mathbf{x}\right)$$

- Etapas do algoritmo:

1. Calcular $\mathbf{f} = \mathbf{W}^{T}\ \mathbf{x}$;
2. Calcular $\mathbf{g} = \mathbf{C}\ \mathbf{f}$;
3. Calcular $\overline{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - \mathbf{V}\ \mathbf{g}$;
4. Resolver sistema triangular:

$$\mathbf{L}\ \overline{\mathbf{x}}' = \overline{\mathbf{b}}$$

5. Resolver sistema triangular:

$$\mathbf{U}\ \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}}'$$

Método da compensação intermediária (I)

- Reconsidere a equação básica obtida da fórmula de S-M-W:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{V}\ \mathbf{C}\ \mathbf{W}^{T}\ \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{b}$$

Método da compensação intermediária (I)

- Reconsidere a equação básica obtida da fórmula de S-M-W:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{V}\ \mathbf{C}\ \mathbf{W}^T\ \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{b}$$

- Considerando que os fatores triangulares de **A** estão disponíveis e que portanto:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\ \mathbf{U} \Longrightarrow \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}$$

Método da compensação intermediária (I)

- Reconsidere a equação básica obtida da fórmula de S-M-W:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{V}\ \mathbf{C}\ \mathbf{W}^{T}\ \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{b}$$

- Considerando que os fatores triangulares de **A** estão disponíveis e que portanto:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\ \mathbf{U} \Longrightarrow \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}$$

- temos que

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}\ \mathbf{b} - \mathbf{U}^{-1}\underbrace{\mathbf{L}^{-1}\ \mathbf{V}}\ \mathbf{C}\ \underbrace{\mathbf{W}^{T}\ \mathbf{U}^{-1}}\mathbf{L}^{-1}\ \mathbf{b}$$

Método da compensação intermediária (I)

- Reconsidere a equação básica obtida da fórmula de S-M-W:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{V}\ \mathbf{C}\ \mathbf{W}^{T}\ \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{b}$$

- Considerando que os fatores triangulares de **A** estão disponíveis e que portanto:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\ \mathbf{U} \Longrightarrow \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}$$

- temos que

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}\ \mathbf{b} - \mathbf{U}^{-1}\underbrace{\mathbf{L}^{-1}\ \mathbf{V}}\ \mathbf{C}\ \underbrace{\mathbf{W}^{T}\ \mathbf{U}^{-1}}\mathbf{L}^{-1}\ \mathbf{b}$$

- Usando as definições de $\overline{\mathbf{V}}$ e $\overline{\mathbf{W}}$, explicitando $\mathbf{U}^{-1}$ como fator pré-multiplicativo e $\mathbf{L}^{-1}\ \mathbf{b}$ como fator pós-multiplicativo:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1}\left(\mathbf{I} - \overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{C}\ \overline{\mathbf{W}}^{T}\right)\ \mathbf{L}^{-1}\ \mathbf{b}$$

Método da compensação intermediária (II)

- Do passo anterior:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1} \left(\mathbf{I} - \overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{C}\ \overline{\mathbf{W}}^T \right)\ \mathbf{L}^{-1}\ \mathbf{b}$$

Método da compensação intermediária (II)

- Do passo anterior:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1} \left(\mathbf{I} - \overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{C}\ \overline{\mathbf{W}}^{T} \right)\ \mathbf{L}^{-1}\ \mathbf{b}$$

- Denotando por $\mathbf{x}' = \mathbf{L}^{-1}\ \mathbf{b}$ a *solução intermediária* do sistema original, concluimos que

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{U}^{-1} \left(\mathbf{I} - \overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{C}\ \overline{\mathbf{W}}^{T} \right)\ \mathbf{x}' \\ &= \mathbf{U}^{-1} \left(\mathbf{x}' - \overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{C}\ \overline{\mathbf{W}}^{T}\ \mathbf{x}' \right) \end{aligned}$$

Método da compensação intermediária (II)

- Do passo anterior:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1} \left(\mathbf{I} - \overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{C}\ \overline{\mathbf{W}}^{T} \right)\ \mathbf{L}^{-1}\ \mathbf{b}$$

- Denotando por $\mathbf{x}' = \mathbf{L}^{-1}\ \mathbf{b}$ a *solução intermediária* do sistema original, concluimos que

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{U}^{-1} \left(\mathbf{I} - \overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{C}\ \overline{\mathbf{W}}^{T} \right)\ \mathbf{x}' \\ &= \mathbf{U}^{-1} \left(\mathbf{x}' - \overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{C}\ \overline{\mathbf{W}}^{T}\ \mathbf{x}' \right) \end{aligned}$$

- Este método, portanto, *modifica a solução intermediária* do sistema original para obter a solução do sistema modificado.

Método da compensação intermediária (III)

- Equação básica do método da compensação intermediária:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1}\left(\mathbf{x}' - \overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{C}\ \overline{\mathbf{W}}^{T}\ \mathbf{x}'\right)$$

Método da compensação intermediária (III)

- Equação básica do método da compensação intermediária:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1} \left(\mathbf{x}' - \overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{C}\ \overline{\mathbf{W}}^{T}\ \mathbf{x}' \right)$$

- Será suposto que:

Método da compensação intermediária (III)

- Equação básica do método da compensação intermediária:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1}\left(\mathbf{x}' - \overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{C}\ \overline{\mathbf{W}}^{T}\ \mathbf{x}'\right)$$

- Será suposto que:
  - Os fatores de $\mathbf{A} = \mathbf{L}\ \mathbf{U}$ já foram calculados e estão disponíveis;

Método da compensação intermediária (III)

- Equação básica do método da compensação intermediária:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1}\left(\mathbf{x}' - \overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{C}\ \overline{\mathbf{W}}^{T}\ \mathbf{x}'\right)$$

- Será suposto que:
  - Os fatores de $\mathbf{A} = \mathbf{L}\ \mathbf{U}$ já foram calculados e estão disponíveis;
  - $\overline{\mathbf{V}}$ e $\overline{\mathbf{W}}$ são calculados como solução dos sistemas triangulares já indicados;

Método da compensação intermediária (III)

- Equação básica do método da compensação intermediária:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1} \left(\mathbf{x}' - \overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{C}\ \overline{\mathbf{W}}^{T}\ \mathbf{x}' \right)$$

- Será suposto que:
  - Os fatores de $\mathbf{A} = \mathbf{L}\ \mathbf{U}$ já foram calculados e estão disponíveis;
  - $\overline{\mathbf{V}}$ e $\overline{\mathbf{W}}$ são calculados como solução dos sistemas triangulares já indicados;
  - A matriz $\mathbf{C}$, de dimensão $k \times k$, é obtida a partir de $\overline{\mathbf{V}}$ e $\overline{\mathbf{W}}$, conforme já mostrado.

Algoritmo do método da compensação intermediária

- Deseja-se calcular a solução do sistema modificado através de uma modificação aplicada ao vetor independente:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1}\left(\mathbf{x}' - \overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{C}\ \overline{\mathbf{W}}^{T}\ \mathbf{x}'\right)$$

Algoritmo do método da compensação intermediária

- Deseja-se calcular a solução do sistema modificado através de uma modificação aplicada ao vetor independente:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1}\left(\mathbf{x}' - \overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{C}\ \overline{\mathbf{W}}^{T}\ \mathbf{x}'\right)$$

- Etapas do algoritmo:

Algoritmo do método da compensação intermediária

- Deseja-se calcular a solução do sistema modificado através de uma modificação aplicada ao vetor independente:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1} \left(\mathbf{x}' - \overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{C}\ \overline{\mathbf{W}}^T\ \mathbf{x}' \right)$$

- Etapas do algoritmo:

1. Calcular $\mathbf{f} = \overline{\mathbf{W}}^T\ \mathbf{x}'$;

Algoritmo do método da compensação intermediária

- Deseja-se calcular a solução do sistema modificado através de uma modificação aplicada ao vetor independente:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1} \left(\mathbf{x}' - \overline{\mathbf{V}} \; \mathbf{C} \; \overline{\mathbf{W}}^T \; \mathbf{x}' \right)$$

- Etapas do algoritmo:

1. Calcular $\mathbf{f} = \overline{\mathbf{W}}^T \; \mathbf{x}'$;
2. Calcular $\mathbf{g} = \mathbf{C} \; \mathbf{f}$;

Algoritmo do método da compensação intermediária

- Deseja-se calcular a solução do sistema modificado através de uma modificação aplicada ao vetor independente:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1}\left(\mathbf{x}' - \overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{C}\ \overline{\mathbf{W}}^{T}\ \mathbf{x}'\right)$$

- Etapas do algoritmo:

1. Calcular $\mathbf{f} = \overline{\mathbf{W}}^{T}\ \mathbf{x}'$;
2. Calcular $\mathbf{g} = \mathbf{C}\ \mathbf{f}$;
3. Calcular $\bar{\mathbf{x}}' = \mathbf{x}' - \overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{g}$;

Algoritmo do método da compensação intermediária

- Deseja-se calcular a solução do sistema modificado através de uma modificação aplicada ao vetor independente:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1}\left(\mathbf{x}' - \overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{C}\ \overline{\mathbf{W}}^{T}\ \mathbf{x}'\right)$$

- Etapas do algoritmo:

1. Calcular $\mathbf{f} = \overline{\mathbf{W}}^{T}\ \mathbf{x}'$;
2. Calcular $\mathbf{g} = \mathbf{C}\ \mathbf{f}$;
3. Calcular $\bar{\mathbf{x}}' = \mathbf{x}' - \overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{g}$;
4. Resolver sistema triangular:

$$\mathbf{U}\ \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}'$$