Exemplo sobre a Aplicação de Testes de Hipóteses para a Identificação de Erros Grosseiros Múltiplos

Considere um sistema de 3 barras em que 6 medidas são realizadas para fins de estimação de estados. As variâncias dos erros de medição são supostas todas iguais a 1×10^{-4}. Após a execução do estimador, verifica-se que:

- O vetor de resíduos de estimação obtido é:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0,062 & 0,255 & 0,092 & 0,017 & 0,146 & 0,137 \end{bmatrix}^T$$

- A matriz de sensibilidade dos resíduos é:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0,780 & -0,083 & -0,043 & -0,303 & 0,263 & 0,040 \\ -0,083 & 0,896 & 0,099 & -0,186 & -0,016 & 0,202 \\ -0,043 & 0,099 & 0,807 & 0,056 & 0,236 & 0,292 \\ -0,303 & -0,186 & 0,056 & 0,510 & 0,247 & 0,242 \\ 0,263 & -0,016 & 0,236 & 0,247 & 0,500 & 0,252 \\ 0,040 & 0,202 & 0,292 & 0,242 & 0,252 & 0,506 \end{bmatrix}$$

Solução:

1. *Resíduos Normalizados* - Os resíduos normalizados são definidos como:

$$\mathbf{r}_{N,i} = \frac{r_i}{\sqrt{W_{ii}}}$$

onde as variâncias dos resíduos podem ser calculadas como os elementos diagonais de

$$\mathbf{W} = \mathbf{SR} = \mathbf{1} \times \mathbf{10}^{-4}\,\mathbf{S}$$

Resulta:

$$\mathbf{r}_N = \begin{bmatrix} 7,027 & \boxed{26,900} & 10,250 & 2,345 & \boxed{20,610} & \boxed{19,326} \end{bmatrix}^T$$

2. *Definição das medidas suspeitas* - Consideraremos como medidas suspeitas as medidas correspondentes aos 3 maiores resíduos normalizados, o que fornece:

$$\mathbf{z}_s = [z_2, z_5, z_6]^T$$

Os resíduos associados a estas medidas são:

$$\mathbf{r}_s = \begin{bmatrix} 0,255 & 0,146 & 0,137 \end{bmatrix}^T$$

3. *Estimação dos erros de medição* - A definição de $\mathbf{z}_s$ induz a seguinte partição na matriz $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0,780 & -0,083 & -0,043 & -0,303 & 0,263 & 0,040 \\ -0,083 & \boxed{\mathbf{0,896}} & 0,099 & -0,186 & \boxed{\mathbf{-0,016}} & \boxed{\mathbf{0,202}} \\ -0,043 & 0,099 & 0,807 & 0,056 & 0,236 & 0,292 \\ -0,303 & -0,186 & 0,056 & 0,510 & 0,247 & 0,242 \\ 0,263 & \boxed{\mathbf{-0,016}} & 0,236 & 0,247 & \boxed{\mathbf{0,500}} & \boxed{\mathbf{0,252}} \\ 0,040 & \boxed{\mathbf{0,202}} & 0,292 & 0,242 & \boxed{\mathbf{0,252}} & \boxed{\mathbf{0,506}} \end{bmatrix}$$

de modo que:

$$\mathbf{S}_{ss} = \begin{bmatrix} 0,896 & -0,016 & 0,202 \\ -0,016 & 0,500 & 0,252 \\ 0,202 & 0,252 & 0,506 \end{bmatrix}$$

e portanto

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{S}_{ss}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{1,283} & 0,399 & 0,712 \\ 0,399 & \mathbf{2,790} & -1,550 \\ 0,712 & -1,550 & \mathbf{3,034} \end{bmatrix}$$

Finalmente, o vetor de estimativas para os erros de medição das medidas suspeitas é determinado como:

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_s = \mathbf{\Gamma}\,\mathbf{r}_s = \begin{bmatrix} 0,287 \\ 0,295 \\ 0,010 \end{bmatrix}$$

4. *Teste de hipóteses com probabilidade de falso alarme fixada* $(\alpha = 0,01)$

$$N_{1-\frac{\alpha}{2}} = N_{0,995} = 2,575$$

Os limiares para as 3 medidas suspeitas são dados por

$$\lambda_i = N_{1-\frac{\alpha}{2}}\,\sigma_i\,\sqrt{\Gamma_{ii}}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= 2,575 \times 0,01 \times \sqrt{1,283} = 0,029 \\ \lambda_5 &= 2,575 \times 0,01 \times \sqrt{2,790} = 0,043 \\ \lambda_6 &= 2,575 \times 0,01 \times \sqrt{3,034} = 0,045 \end{aligned}$$

Como:

$$\begin{aligned} \eta_{s,2} &> \lambda_2 \\ \eta_{s,5} &> \lambda_5 \\ \eta_{s,6} &< \lambda_6 \end{aligned}$$

concluimos que as medidas z_2 e z_5 são errôneas.

5. *Teste de hipóteses com probabilidade de identificação fixada* - $\beta = 0,01$

Neste caso, o limiar de identificação é dado por:

$$\lambda_i = (N_{1-\frac{a}{2}})_i \; \sigma_i \sqrt{\Gamma_{ii}}$$

onde:

$$(N_{1-\frac{a}{2}})_i \;=\; \frac{\eta'_{si} + N_\beta \sqrt{\Gamma_{ii} - 1}}{\sqrt{\Gamma_{ii}}}$$

ou, combinando as duas equações:

$$\lambda_i = \sigma_i \, (\eta'_{si} + N_\beta \sqrt{\Gamma_{ii} - 1})$$

Para $\beta = 0,01$, $N_\beta = -2,33$. Se além disso adotarmos um valor de magnitude estimada de erro grosseiro $\eta'_{si} = 10$, teremos:

$$\begin{aligned}
\lambda_2 = &\quad 0,01 \times (10 - 2,33\sqrt{0,283}) = \quad 0,087 \\
\lambda_5 = &\quad 0,01 \times (10 - 2,33\sqrt{1,790}) = \quad 0,068 \\
\lambda_6 = &\quad 0,01 \times (10 - 2,33\sqrt{2,034}) = \quad 0,067
\end{aligned}$$

Tendo em conta os valores dos erros estimados de medição calculados no item 3, verificamos que os resultados da identificação baseada em β fixado confirmam os resultados do item 4.