ESTIMAÇÃO DE ESTADOS COM RESTRIÇÕES ESTRUTURAIS E OPERACIONAIS

$$
\begin{array}{lrcll}
\min & c(r_m) & = & \frac{1}{2}\, r_m^T\, R_m^{-1}\, r_m & \\
\text{sujeita a:} & & & & \\
 & z_m - H_m\,\hat{x} & = & r_m & \text{(plano de medição)} \\
 & -H_s\,\hat{x} & = & 0 & \text{(restrições estruturais)} \\
 & -H_o\,\hat{x} & = & 0 & \text{(restrições operacionais)}
\end{array}
$$

Supondo que n é o número de estados e m, N_s e N_o são o número de medidas, o número de restrições estruturais e o número de restrições operacionais,as matrizes H_m H_s e H_o terão dimensões $m \times n$, $N_s \times n$ e $N_o \times n$, respectivamente. A função Lagrangeana para este problema de otimização é

$$
\mathcal{L} \;=\; \frac{1}{2}\, r_m^T\, R_m^{-1}\, r_m + \lambda_m^T\,(z_m - H_m\,\hat{x} - r_m) + \lambda_s^T\,(-H_s\,\hat{x}) + \lambda_o^T\,(-H_o\,\hat{x})
$$

e as condições de otimalidade de primeira ordem são dadas por:

$$
\begin{array}{rclclrcl}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_m} & = & R_m^{-1}\, r_m - \lambda_m & = & 0 \;\Rightarrow & r_m & = & R_m\,\lambda_m \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_m} & = & z_m - H_m\,\hat{x} - r_m & = & 0 \;\Rightarrow & H_m\,\hat{x} + R_m\,\lambda_m & = & z_m \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_s} & = & -H_s\,\hat{x} & = & 0 \;\Rightarrow & H_s\,\hat{x} & = & 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_o} & = & -H_o\,\hat{x} & = & 0 \;\Rightarrow & H_o\,\hat{x} & = & 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{x}} & = & H_m^T\,\lambda_m + H_s^T\,\lambda_s + H_o^T\,\lambda_o & = & 0 & & &
\end{array}
$$

Utilizando-se a primeira relação acima, as incógnitas do problema podem ser reduzidas ao conjunto$\{\lambda_m, \lambda_s, \lambda_o, \hat{x}\}$. Das demais equações, obtemos o seguinte sistema de equações lineares:

$$
\begin{bmatrix} R_m & 0 & 0 & H_m \\ 0 & 0 & 0 & H_s \\ 0 & 0 & 0 & H_o \\ H_m^T & H_s^T & H_o^T & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \lambda_m \\ \lambda_s \\ \lambda_o \\ \hat{x} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} z_m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\tag{1}
$$

Por conveniência, definimos o vetor $nmr \times 1$ de multiplicadores de Lagrange como:

$$
\lambda \triangleq \begin{bmatrix} \lambda_m^T & \lambda_s^T & \lambda_o^T \end{bmatrix}^T
$$

onde:

$$
nmr \triangleq m + N_s + N_o
$$

O problema de estimação de estados restrita pode ser resolvido pelo algoritmo do tableau esparso de Hachtel, que soluciona o sistema linear descrito em (1).

Além de λ_m, o vetor λ contém os multiplicadores de Lagrange associados às restrições estruturais e operacionais. Os valores destes multiplicadores representam a sensibilidade da função objetivo $J(\hat{x})$ com relação a variações nestas restrições.

O multiplicador de Lagrange *normalizado* λ_i^N é definido como:

$$\lambda_i^N \triangleq \frac{\lambda_i}{\sqrt{W_{ii}}} \tag{2}$$

onde W é a matriz de covariância de λ. Pode-se demonstrar que, na ausência de erros grosseiros em medidas e supondo que as restrições modelam corretamente a rede, os multiplicadores de Lagrange λ são variáveis aleatórias de média zero. Portanto, sob as mesmas condições, o multiplicador de Lagrange *normalizado* λ_i^N é uma variável aleatória de média zero e variância unitária. Além disso, verifica-se que os multiplicadores de Lagrange normalizados referentes às medidas, λ_m^N, são equivalentes aos resíduos normalizados e, como estes, podem ser utilizados para a identificação de erros grosseiros em medidas. Estendendo este raciocínio a λ_s e λ_o, podemos concluir que λ_s^N e λ_o^N fornecem uma ferramenta para a detecção e identificação de erros em restrições, da mesma forma que os resíduos normalizados são utilizados na detecção e identificação de erros grosseiros em medidas.

A matriz W pode ser obtida a partir da esparsa inversa da matriz de coeficientes da equação (1):

$$\begin{pmatrix} W & C \\ C^T & -\sum \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} R & H \\ H^T & 0 \end{pmatrix}^{-1} \tag{3}$$

onde:

$$H \triangleq \begin{pmatrix} H_m \\ H_s \\ H_o \end{pmatrix}; \; R \triangleq \begin{pmatrix} R_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

e Σ, C e W são partições da inversa do lado direito da equação (3), com dimensões correspondentes às das respectivas submatrizes no lado direito da Eq. (3).