

# Capítulo 6

## Estabilidade de Sistemas de Potência

### 6.1 Introdução

Este capítulo trata do problema de estabilidade de Sistemas Elétricos de Potência. Dois tipos de estudos de estabilidade são abordados. A análise da *estabilidade transitória* diz respeito aos fenômenos que se seguem à ocorrência de uma grande e súbita perturbação em um sistema de potência. Para sistemas que podem ser aproximados por um modelo máquina-barra infinita ou por um modelo de duas máquinas pode-se utilizar um método gráfico conhecido como *critério das áreas iguais*, enquanto para sistemas multimáquinas a solução é obtida no domínio do tempo. O período de tempo sob estudo pode variar de uma fração de segundo, quando a estabilidade da primeira oscilação é determinada, para períodos superiores a 10 segundos, nos casos em que a estabilidade para múltiplas oscilações deve ser examinada. Segundo a definição do IEEE<sup>4</sup>, diz-se que um sistema de potência é *estável do ponto de vista da estabilidade transitória* para uma condição de operação particular e para uma dada grande perturbação se, após a ocorrência da perturbação, o sistema é capaz de alcançar uma condição de operação aceitável.

O termo “Estabilidade em Regime Permanente” (ou “Estabilidade a Pequenos Sinais”) é empregado para descrever a resposta de um sistema a pequenas perturbações. Ainda segundo o IEEE, diz-se que um sistema de potência é *estável em regime permanente* para uma dada condição de operação se, após uma pequena perturbação, o sistema atinge uma condição de operação que é idêntica ou próxima à condição de operação anterior à perturbação. Os métodos de análise correspondentes baseiam-se tanto em ferramentas no domínio do tempo quanto no domínio da frequência.

Após uma revisão do modelo máquina-barra infinita, este capítulo aborda inicialmente o problema da estabilidade a pequenos sinais. Em seguida, é introduzido o critério das áreas iguais para análise de estabilidade transitória e cálculo dos ângulos críticos de chaveamento. As seções finais do capítulo descrevem em detalhes as etapas do método de análise no domínio do tempo para sistemas multimáquinas baseada no uso do modelo clássico de máquina.

### 6.2 Sistema Máquina-Barra Infinita

#### 6.2.1 O Conceito de Barra Infinita

Um tipo de análise frequente em estudos de estabilidade envolve o comportamento de um gerador síncrono conectado através de um sistema de transmissão a grande sistema de potên-

---

<sup>4</sup> IEEE Task Force on Terms & Definitions, “Proposed Terms & Definitions for Power System Stability”, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-101, No. 7, Julho de 1982, págs. 1894-1898.

cia, face a perturbações na carga do gerador ou do grande sistema, ou a contingências/faltas no sistema de transmissão. Nestes casos, o “grande sistema” é custumeiramente representado por uma *barra infinita*. Este termo corresponde ao modelo de um sistema cujo porte é tão maior que o da máquina sob estudo que se justifica adotar a hipótese de que pode ser representado por uma barra cuja freqüência (ou, equivalentemente,  $d\delta / dt$ ) e cuja tensão permanecem substancialmente constantes independentemente da potência que o sistema gera ou absorve ou das perturbações aplicadas.

Supor que  $d\delta / dt$  não varia é equivalente a considerar que a *inércia* da máquina equivalente ao grande sistema é *infinita* face ao da máquina ou máquinas a que ele está conectado. Por outro lado, tensão constante na barra infinita corresponde a considerar nula a impedância interna da máquina equivalente.

### 6.2.2 Modelo de Máquina Conectada a Barra Infinita

O modelo de máquina conectada a barra infinita pode ser facilmente derivado a partir da equação de oscilação e da Eq. (1.3), que representa a potência transferida entre 2 barras. Supondo que o gerador da Seção 1 entrega potência a uma barra infinita ao invés de a um motor síncrono, devemos introduzir as seguintes considerações adicionais:

- A reatância  $X_M$  deve ser suposta nula;
- A inércia do motor deve ser suposta infinita, isto é, sua velocidade deve ser constante.

Adicionalmente, consideraremos agora que, ao invés do gerador estar conectado à barra infinita por uma única linha de transmissão de reatância  $X_L$ , tal conexão poderá se dar através de um sistema de transmissão mais complexo, cuja reatância equivalente é  $x_e$ . Finalmente, a tensão da barra infinita será tomada como referência angular e seu módulo será denotado por  $V$  (ver Fig. 89).

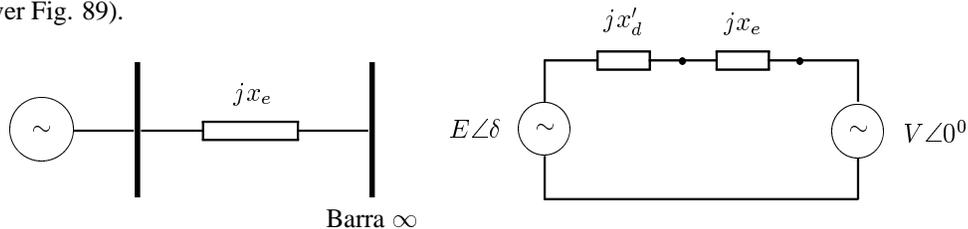


Figura 89: Sistema máquina-barra infinita e seu circuito equivalente

Definindo:

$$x_{eq} \triangleq x'_d + x_e$$

e levando em conta as considerações acima, concluímos que a potência entregue pelo gerador

síncrono à barra infinita será dada por:

$$P_e = \frac{EV}{x_{eq}} \text{sen } \delta \quad (6.200)$$

### 6.2.3 Equação de Oscilação para o Caso Máquina-Barra Infinita

A partir das equações (2.11) e (6.200), é possível escrever a equação de oscilação para o caso máquina-barras infinita como:

$$\frac{2H}{w_s} \ddot{\delta} = P_m - \frac{EV}{x_{eq}} \text{sen } \delta \quad (6.201)$$

## 6.3 Análise de Pequenas Perturbações - Estabilidade em Regime Permanente

Suponha que a potência mecânica de entrada do gerador sofre uma pequena perturbação  $\Delta P_m$  em relação ao seu valor de regime permanente  $P_m^0$ , ou seja:

$$P_m = P_m^0 + \Delta P_m \quad (6.202)$$

Em conseqüência, o ângulo do rotor sofrerá uma perturbação  $\Delta\delta$ , o que provocará por sua vez uma variação na potência elétrica em relação ao seu valor de regime permanente,  $P_e^0$ . Esta variação pode ser determinada via expansão em série de Taylor da Eq. (6.200) truncada no termo linear da série:

$$P_e \approx P_e^0 + \left. \frac{\partial P_e}{\partial \delta} \right|_{\delta=\delta_0} \Delta\delta = P_e^0 + \left( \frac{EV}{x_{eq}} \cos \delta_0 \right) \Delta\delta$$

O coeficiente entre parênteses na segunda parcela da expressão acima é conhecido como *Coefficiente de Potência de Sincronização (ou Sincronizante)* e é denotado por  $P_s$ . Assim:

$$P_s = \frac{EV}{x_{eq}} \cos \delta_0$$

e

$$P_e = P_e^0 + P_s \Delta\delta \quad (6.203)$$

Considerando as Eqs. (6.202) e (6.203) e a variação do ângulo de torque com respeito ao valor de regime permanente, a equação (6.201) para pequenas perturbações pode ser escrita como:

$$\frac{2H}{w_s} \frac{d^2}{dt^2} (\Delta\delta) + P_s \Delta\delta = \Delta P_m \quad (6.204)$$

Seção 6.3 Análise de Pequenas Perturbações - Estabilidade em Regime Permanente

onde se levou em conta o fato de que, na condição pré-perturbação,  $P_m^0 = P_e^0$ . Re-definindo:

$$M = \frac{2H}{w_s}$$

e aplicando a transformada de Laplace à Eq. (6.204), obtemos:

$$(M s^2 + P_s) \Delta\delta(s) = \Delta P_m(s) + M s \Delta\delta(0^+) + M \Delta\delta'(0^+)$$

As raízes da equação característica  $M s^2 + P_s = 0$  são:

$$s_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{P_s}{M}}$$

Quando  $P_s < 0$ , o sistema terá pólos reais e simétricos em relação à origem. A presença de um pólo com parte real positiva implica em que o sistema será monotonicamente instável.

Se, por outro lado, o coeficiente de potência de sincronização  $P_s$  é maior que zero, ambas as raízes são imaginárias, o que implica que o comportamento do sistema oscilatório sem amortecimento, com frequência natural igual a:

$$w_n = \sqrt{\frac{P_s}{M}} = \sqrt{\frac{EV \cos \delta_0}{x_{eq} M}} \text{ rad/s} \quad (6.205)$$

Nossa análise até agora ignorou o efeito amortecedor devido à variação dos enlaces de fluxo com o rotor do gerador e às cargas (este último está normalmente presente devido principalmente ao efeito dos motores de indução). As cargas reais são normalmente sensíveis à frequência e, para pequenas perturbações, esta sensibilidade pode ser representada por um efeito aproximadamente linear: quando a frequência aumenta (isto é, quando  $d\delta / dt > 0$ ), a potência exigida pela carga aumenta proporcionalmente. Se  $d\delta / dt < 0$ , a potência da carga se reduz na mesma proporção.

Assim, se representarmos por  $D > 0$  (em  $pu / (rad/s)$ ) o coeficiente de amortecimento que representa o efeito combinado do amortecimento intrínseco da própria máquina e a sensibilidade da carga à frequência, a equação (6.204) será modificada da seguinte forma:

$$M \frac{d^2}{dt^2} (\Delta\delta) + D \frac{d\delta}{dt} + P_s \Delta\delta = \Delta P_m \quad (6.206)$$

cuja equação característica é:

$$M s^2 + D s + P_s = 0$$

Como sabemos da Teoria do Controle Linear, este sistema só será estável se *todos* os coeficientes da equação característica forem positivos. Assim, mais uma vez  $P_s$  tem que ser maior que zero para estabilidade.

No caso em que as condições para estabilidade se aplicam, a resposta do sistema no tempo

a um degrau de potência mecânica de amplitude  $\Delta p$  será dada por:

$$\Delta\delta(t) = \Delta p \left[ 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta w_n t} \text{sen}(w_n \beta t + \theta) \right] \quad (6.207)$$

onde a razão de amortecimento  $\zeta$  é dada por

$$\zeta = \frac{D}{2\sqrt{P_s M}}$$

e

$$\beta = \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\theta = \text{tg}^{-1}(\beta/\zeta)$$

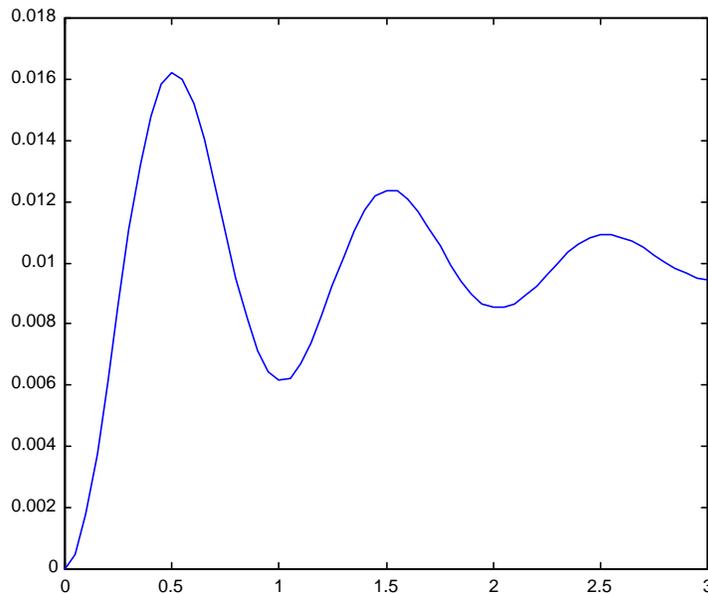


Figura 90: Ângulo de torque de um gerador síncrono ligado a barra infinita sujeito a uma perturbação em degrau de potência mecânica.

A figura 90 mostra a resposta de um gerador síncrono ligado a barra infinita a um degrau de 0,01 pu. Considera-se que  $w_n = 1,0 \text{ Hz}$  e que a razão de amortecimento é  $\zeta = 0,15$ .

Em sistemas de potência, a razão de amortecimento costuma ter um valor bastante baixo, de modo que a frequência não-amortecida  $w_p = w_n \beta = w_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  é muito aproximadamente

igual à frequência natural  $w_n$ . Valores típicos para o caso máquina-barras infinita situam-se no entorno de 1 Hz (esta frequência caracteriza o chamado *modo local de oscilação*, que envolve uma máquina oscilando contra o resto do sistema elétrico). Para o caso de oscilações de um grande sistema contra outro ao qual está conectado (por exemplo, o Sistema Sul do Brasil oscilando contra o Sistema Sudeste), temos o chamado *modo inter-área*, cuja frequência característica é substancialmente menor, na faixa de 0,5 Hz (observe que  $w_n$  é inversamente proporcional a  $\sqrt{M}$ !).

### 6.3.1 Interpretação Física do Coeficiente de Potência Sincronizante

Como vimos, um requisito para a estabilidade em regime permanente é que o coeficiente de potência de sincronização seja positivo, isto é:

$$P_s = \frac{EV}{x_{eq}} \cos \delta_0 > 0$$

Em outras palavras, isto significa que, se o ângulo do gerador sofre uma perturbação *positiva*  $\Delta\delta$  em relação ao ponto de operação corrente (isto é, no sentido do aumento de  $\delta$ ), então a potência elétrica gerada deve aumentar, de modo que o rotor da máquina desacelere e portanto  $\delta$  tenda a diminuir. Por outro lado, se a perturbação de ângulo for *negativa* (no sentido da redução de  $\delta$ ), então  $P_e$  deve diminuir, para que o rotor acelere e o ângulo de torque tenda a aumentar. Isto é ilustrado na Fig. 91, na qual o ponto de operação  $A$  é estável (pois  $0 < \delta_0 < \pi/2$ , e portanto  $P_s > 0$ ), enquanto o ponto  $B$  é instável (verifique!). Os pontos  $A'$  e  $B'$  correspondem a variações positivas de ângulo com relação a  $A$  e  $B$ , respectivamente, enquanto que para  $A''$  e  $B''$  as variações de  $\delta$  são negativas.

### 6.3.2 O Torque de Amortecimento

Embora os métodos clássicos de avaliação da estabilidade em regime permanente concentrem sua atenção nos torques de sincronização (isto é, nos *torques proporcionais ao ângulo de torque*  $\delta$ ), o papel dos torques de amortecimento (ou seja, os *torques proporcionais à velocidade*  $\dot{\delta}$ ) para a estabilidade tem assumido importância cada vez mais relevante em anos recentes. Isto se deve principalmente à utilização da tecnologia de eletrônica de potência nos sistemas de excitação de geradores síncronos. O uso de tiristores permitiu a redução acentuada dos tempos de resposta das excitatrizes, o que é benéfico para auxiliar a manutenção da estabilidade transitória, porém tem o efeito colateral de praticamente cancelar o chamado torque de amortecimento *intrínseco* da máquina. Em sistemas cuja geração é predominantemente de origem hidráulica, que conseqüentemente contêm linhas de transmissão longas, como é o caso do Sistema Brasileiro, situações de baixo amortecimento tendem a se manifestar em condições de operação de carga pesada, provocando oscilações significativas dos fluxos de potência nas linhas. Tais oscilações podem levar à atuação da proteção e saída de operação de componentes importantes do sistema de transmissão.

Para manter os benefícios dos modernos sistemas de excitação rápidos e ainda dispor de amortecimento suficiente para operação segura em regime permanente, a solução encontrada

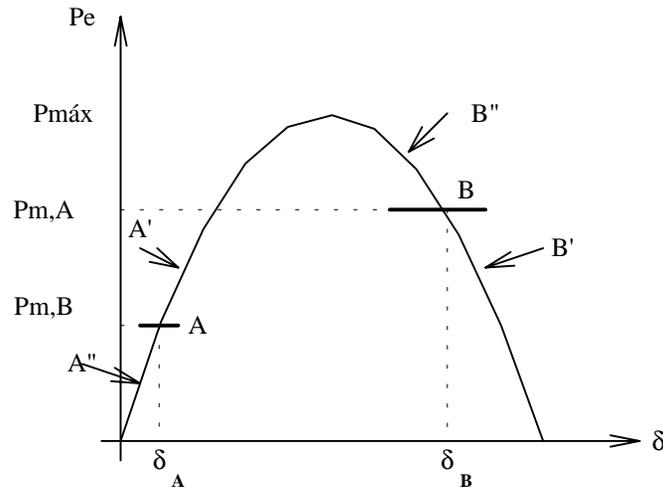


Figura 91: Interpretação do coeficiente de potência de sincronização.

foi a sofisticação dos controles ligados ao sistema de excitação. Os modernos hidrogeradores destinados à operação nas condições descritas acima são dotados de malhas de controle e dispositivos adicionais, cuja principal finalidade é a produção de torque de amortecimento capaz de assegurar uma rápida absorção das oscilações de ângulo que sucedem às variações normais de carga. Tais dispositivos são chamados *estabilizadores de sistemas de potência*. O projeto integrado destes estabilizadores para sistemas de grande porte é um problema importante e atual para os engenheiros de controle das empresas geradoras de energia elétrica.

#### 6.4 Análise de Estabilidade Transitória

O problema de estabilidade de sistemas de potência abordado na seção anterior relacionava-se aos efeitos de perturbações de pequena amplitude. Conseqüentemente, o estudo destes problemas pode ser feito a partir do uso de modelos linearizados, o que permite a utilização de ferramentas da teoria de sistemas lineares.

Nesta seção concentraremos nossa atenção nos problemas resultantes da ocorrência de grandes perturbações em sistemas de potência, tais como curtos-circuitos, súbito desligamento de linhas de transmissão, etc. A magnitude destas perturbações não mais permite a utilização de modelos linearizados. Em outras palavras, faz-se necessário agora o uso de modelos não-lineares para as máquinas e outros equipamentos presentes no sistema na análise dos

problemas de estabilidade transitória.

No caso de sistemas formados por um gerador conectado a barra infinita, podemos lançar mão de um método derivado da interpretação gráfica do problema de estabilidade transitória, chamado de *Critério das Áreas Iguais*. Trata-se de uma técnica gráfica de análise que permite um excelente entendimento dos fenômenos físicos envolvidos nos problemas de estabilidade transitória. O Critério das Áreas Iguais será abordado nas próximas subseções.

Para a situação mais geral do estudo dos efeitos de grandes perturbações em sistemas de várias máquinas, entretanto, a aplicação do Critério das Áreas Iguais não se mostra mais viável. Nestes casos é necessário que sejam utilizados métodos quantitativos para a análise do problema. Estes métodos são baseados na integração numérica das equações diferenciais não-lineares que modelam o sistema. Serão vistos no final desta seção alguns aspectos relacionados ao uso do modelo clássico para estudos de estabilidade transitória. Especificamente, daremos atenção à representação das cargas, ao cálculo das tensões internas das máquinas e à redução da rede elétrica às barras internas das máquinas.

## 6.5 O Critério das Áreas Iguais

### 6.5.1 Introdução e Hipóteses Básicas

A análise da estabilidade transitória no caso geral de um sistema multimáquinas é feita com o auxílio de programas que simulam o modelo matemático do sistema para cada contingência selecionada. Em outras palavras, a análise da estabilidade baseia-se na integração numérica das equações matemáticas que representam as máquinas e os demais componentes do sistema de potência. Se for verificado que o ângulo entre quaisquer duas máquinas do sistema, determinado via integração numérica, tende a aumentar sem limites após o instante de aplicação da perturbação, conclui-se que o sistema é instável. Se, por outro lado, as diferenças angulares entre as máquinas atingem um valor máximo e depois decrescem, conclui-se que a tendência é que o sistema permaneça estável. A conclusão definitiva sobre a estabilidade requer todavia a observação das oscilações subseqüentes à primeira, já que, em sistemas multimáquinas, é possível que uma máquina permaneça em sincronismo com as demais na primeira oscilação e perca esta condição nas oscilações seguintes, em razão das interações dinâmicas com as outras máquinas.

Para o caso de um sistema formado por duas máquinas ou por uma máquina conectada a uma barra infinita, entretanto, é possível se concluir sobre a estabilidade transitória a partir do comportamento das máquinas após a primeira oscilação. Neste caso, pode ser aplicado um método gráfico que, apesar de sua simplicidade, propicia uma excelente interpretação física dos fenômenos dinâmicos envolvidos no problema de estabilidade transitória. Este método é chamado, por razões que ficarão claras mais adiante, de *Critério das Áreas Iguais*.

No que diz respeito à representação das máquinas, o Critério das Áreas Iguais baseia-se nas seguintes hipóteses:

- a) A potência mecânica de entrada das máquinas é suposta constante;

- b) As máquinas síncronas são representadas por uma tensão constante atrás de sua reatância transitória;
- c) O Amortecimento das máquinas, assim como outras fontes de amortecimento (resistência da armadura, resistência das linhas de transmissão) são desconsiderados.

As seguintes observações podem ser feitas para justificar a adoção das hipóteses simplificadoras acima.

#### Potência Mecânica Constante

As variações de potência mecânica são devidas à ação dos reguladores de velocidade dos geradores. Todavia, esta ação não se faz sentir, em geral, na primeira oscilação, já que as constantes de tempo dos reguladores de velocidade e das turbinas são muito altas para permitir a variação de potência mecânica em tão curto espaço de tempo.

**Amortecimento**  $\approx 0$

Esta é uma hipótese conservadora, já que o amortecimento tende a reduzir a amplitude das oscilações eletromecânicas. Assim, se a aplicação do critério das áreas iguais indicar que o sistema permanece estável após a primeira oscilação, considera-se que os torques de amortecimento devidos aos enrolamentos amortecedores, sinais estabilizadores, resistências, etc., provocará a redução da amplitude das oscilações subseqüentes, favorecendo portanto a manutenção da estabilidade.

#### Tensão Constante atrás de Reatância Transitória

Logo após a ocorrência de um curto-circuito, a corrente de campo do gerador aumenta, para contrabalançar o efeito desmagnetizante da reação da armadura decorrente do curto, ou seja, de modo a garantir que os enlaces de fluxo com o enrolamento do campo permaneçam aproximadamente constantes logo após a falta. Decorridos alguns instantes, o fluxo tende de fato a cair (o mesmo acontecendo com a tensão atrás da reatância transitória), mas então o regulador de tensão já estará iniciando sua atuação, em resposta à queda da tensão terminal da máquina que se segue ao curto. A combinação dos dois efeitos (aumento da corrente de campo e ação do regulador de tensão) justifica a hipótese durante os primeiros momentos após a falta.

O critério das áreas iguais se aplica portanto à análise da estabilidade transitória baseada no comportamento da primeira oscilação, com as 3 hipóteses simplificadoras acima, para sistemas máquina-barra infinita. O método pode ser estendido para o caso de duas máquinas finitas.

### 6.5.2 Critério das Áreas Iguais Para Sistema Máquina - Barra Infinita

A Fig. (92) representa um sistema máquina-barra infinita e seu circuito equivalente. Considerando as hipóteses discutidas na seção anterior, a equação de oscilação para o sistema é dada por:

$$M \frac{d^2 \delta}{dt^2} = P_a \quad (6.208)$$

Seção 6.5 O Critério das Áreas Iguais

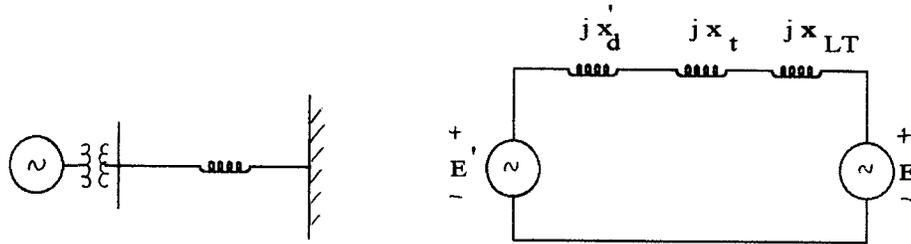


Figura 92: Sistema máquina-barra infinita e circuito equivalente.

onde:

$M$ : Constante de inércia da máquina;

$\delta$ : ângulo entre a tensão interna da máquina e a tensão da barra infinita;

$P_a = P_m - P_e$ : Potência de aceleração da máquina.

A potência elétrica fornecida pela máquina à barra infinita é dada por:

$$P_e = \frac{E' \times E_\infty}{x_{eq}} \text{sen} \delta \quad (6.209)$$

onde  $x_{eq}$  é a reatância equivalente entre a barra interna da máquina e a barra infinita.

Multiplicando-se a Eq. (6.208) por  $\frac{2}{M} \frac{d\delta}{dt}$ , obtêm-se:

$$2 \times \frac{d^2 \delta}{dt^2} \frac{d\delta}{dt} = 2 \times \frac{P_a}{M} \frac{d\delta}{dt} \quad (6.210)$$

Entretanto, já que:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d\delta}{dt} \right)^2 = 2 \times \frac{d\delta}{dt} \times \frac{d^2 \delta}{dt^2}$$

a Eq. (6.210) pode ser re-escrita como:

$$d \left[ \left( \frac{d\delta}{dt} \right)^2 \right] = 2 \frac{P_a}{M} d\delta \quad (6.211)$$

Integrando-se a Eq. (6.211), obtêm-se:

$$\left( \frac{d\delta}{dt} \right)^2 = \frac{2}{M} \int_{\delta_0}^{\delta} P_a d\delta \quad (6.212)$$

ou ainda

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega' = \sqrt{\frac{2}{M} \int_{\delta_0}^{\delta} P_a d\delta} \quad (6.213)$$

Para estabilidade, a máquina deve atingir o repouso com respeito à barra infinita, isto é:

$$\omega' = 0$$

o que implica em que:

$$\int_{\delta_0}^{\delta} P_a d\delta = 0 \Rightarrow \int_{\delta_0}^{\delta} (P_m - P_e) d\delta = 0 \quad (6.214)$$

A integral da Eq. (6.214) pode ser interpretada como a área entre as curvas  $P_m \times \delta$  e  $P_e \times \delta$ . A primeira destas curvas é representada por uma reta horizontal, já que a potência mecânica é suposta constante. A segunda é a senóide dada pela Eq. (6.209). A Fig. (93) representa as áreas entre as curvas de  $P_m$  e  $P_e$ . A área  $A_1$  corresponde ao intervalo em que a potência elétrica é menor que a potência mecânica, enquanto que  $A_2$  diz respeito à situação inversa. A área  $A_1$  corresponde ao ganho de energia cinética resultante da aceleração da máquina. A partir do ângulo  $\delta_1$ , a máquina começa a sofrer desaceleração, com o aumento de energia cinética sendo cedido à barra infinita; quando a área  $A_1$  se torna igual à área  $A_2$ , a derivada do ângulo torna-se nula (pela Eq. (6.214)), o que significa que todo o ganho de energia cinética inicial foi entregue à barra infinita e que a velocidade da máquina torna-se momentaneamente igual à sua velocidade original.

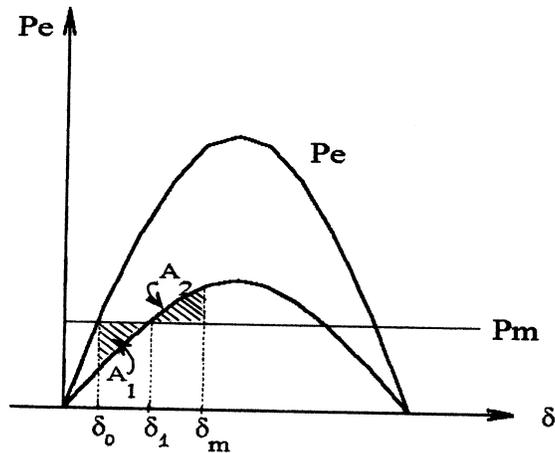


Figura 93: Curvas potência-ângulo para ilustrar o critério das áreas iguais.

### 6.5.3 Aplicações do Critério das Áreas Iguais

**6.5.3.1 Curto-Circuito Mantido sobre o Sistema de Transmissão** Seja o sistema de potência representado na Fig. (94). Deseja-se analisar a estabilidade transitória do sistema face à ocorrência de um curto-circuito em um dos circuitos de transmissão entre o gerador e a barra infinita, conforme indicado na figura. Supõe-se inicialmente que o sistema de proteção não desconecta a linha atingida pelo curto em tempo, de modo que há apenas duas situações a se considerar, a saber, *antes da falta (af)* e *durante a falta (df)*.

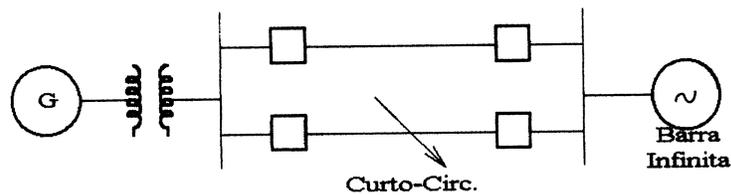


Figura 94: Sistema máquina-barra infinita com curto mantido em um dos circuitos de transmissão.

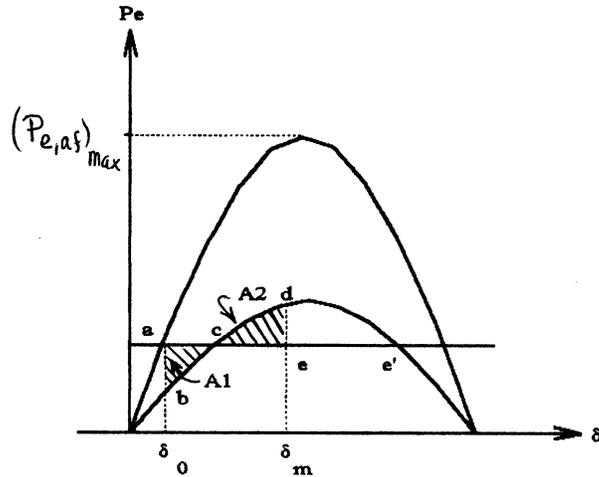


Figura 95: Curvas potência-ângulo para ilustrar o critério das áreas iguais.

A Fig. (95) mostra as curvas potência-ângulo para as condições antes da falta (curva  $P_{e,af}$ ) e durante a falta (curva  $P_{e,df}$ ). O ponto de operação inicial é o ponto  $a$ , sendo portanto  $\delta_0$  o ângulo inicial entre a tensão interna da máquina e a barra infinita. Com a ocorrência da falta, a potência elétrica gerada passa instantaneamente a ser dada pelo valor correspondente ao ponto  $b$ , de modo que surge uma potência de aceleração inicial dada pelo segmento  $ab$ . Em consequência, o ângulo aumenta e passa pelo ponto  $c$ , no qual a potência de aceleração é nula; contudo, neste ponto a velocidade do gerador ainda é maior que a da barra infinita, de modo que o ângulo  $\delta$  continua a crescer. Além do ponto  $c$ , a aceleração passa a ser negativa, e portanto a velocidade diminui. No ponto  $d$ , a área  $A_2 = cde$  torna-se igual à área  $A_1 = abc$ ; pelo critério das áreas iguais, a velocidade  $\omega'$  neste ponto é nula, o que significa que o máximo deslocamento angular foi atingido em  $d$ . Como o torque resultante é ainda de desaceleração, a velocidade do gerador torna-se menor que a da barra infinita, levando ao decréscimo de  $\delta$ . O sistema é portanto *estável* e, com os torques de amortecimento existentes (embora não considerados até então na análise) o novo ponto de operação a ser finalmente atingido será o ponto  $c$ .

Ainda a partir da Fig. (95), observa-se que se a carga inicial do gerador for aumentada (isto é, se  $P_m$  for maior), as áreas  $A_1$  e  $A_2$  e o ângulo  $\delta_m$  correspondente ao ponto  $d$  serão maiores. O maior valor possível para  $P_m$  sem que se perca a estabilidade seria aquele para o qual  $\delta_m$  corresponderia ao ponto  $e'$ , no qual a *aceleração e a velocidade  $\omega'$  tornam-se simultaneamente nulas*. O valor de  $P_m$  correspondente é chamado *Limite de Estabilidade Transitória* para estes tipo e localização de perturbação.

Para carregamentos iniciais maiores, a área  $A_2$  seria sempre menor do que a área  $A_1$ . O gerador atingiria o ponto  $e'$ , onde a aceleração é nula, com velocidade acima da velocidade

Seção 6.5 O Critério das Áreas Iguais

normal. A velocidade continuaria a aumentar e assim a potência de aceleração tornar-se-ia novamente positiva. O sistema seria portanto *instável*, a despeito da desaceleração existente entre os pontos  $c$  e  $e'$  da figura, insuficiente para evitar a perda de sincronismo.

Finalmente, se a potência mecânica for maior do que a potência elétrica máxima durante a falta (isto é, se  $P_m > P_{máx,df}$ ), o sistema será *monotonicamente instável*, isto é, o ângulo  $\delta$  crescerá monotonicamente em decorrência do defeito.

**6.5.3.2 Curto-Circuito em uma Linha de Transmissão com Subsequente Abertura da Falta** Consideremos agora uma situação similar à anterior, com a diferença contudo de que, após alguns ciclos, ocorre a abertura dos disjuntores terminais da linha sob falta através da ação do sistema de proteção. Neste caso, há uma terceira condição de operação além das duas anteriores, isto é, a condição *pós-falta (pf)*, à qual corresponde uma terceira curva potência-ângulo, conforme indicado na Fig. (96). Esta curva diz respeito a uma reatância equivalente entre gerador e barra infinita calculada com a linha que sofreu a falta fora de operação. Supõe-se que a abertura da falta ocorre no instante em que  $\delta = \delta_c$ .

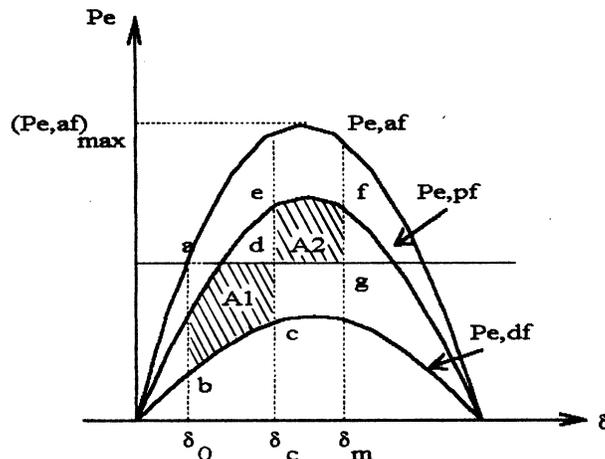


Figura 96: Curvas potência-ângulo supondo abertura da linha após a falta.

Da Fig. (96), observa-se que o ponto  $f$  pode ser movido para a direita como conseqüência dos seguintes motivos:

- Maior carregamento inicial da máquina, isto é,  $P_m$  maior;
- Aumento no tempo de abertura do defeito, acarretando um maior valor para o ângulo de abertura  $\delta_c$ .

Das observações acima, é possível se concluir que, para qualquer carregamento inicial dado, existe um ângulo crítico de abertura  $\delta_{crit}$  além do qual não será mais possível se obter

uma área  $A_2$  igual à área  $A_1$ . Para ângulos de abertura real do defeito menores que  $\delta_{crit}$  o sistema será estável. Se, por outro lado,  $\delta_c > \delta_{crit}$ , o sistema é instável.

Em geral, não se está interessado diretamente no ângulo crítico de abertura do defeito, mas sim no *tempo crítico de abertura da falta*, que é igual à soma do tempo de atuação dos relés de proteção e do tempo de abertura do disjuntor. Estes tempos críticos são utilizados, por exemplo, pelos engenheiros de proteção para especificação de relés e disjuntores. Em geral, o cálculo do tempo crítico a partir do conhecimento de  $\delta_{crit}$  requer a integração numérica das equações de oscilação da máquina. Na situação ilustrada na seção seguinte, entretanto, é possível se obter uma expressão fechada para o tempo crítico em função do ângulo  $\delta_{crit}$ .

**6.5.3.3 Cálculo do Ângulo Crítico e do Tempo Crítico de Abertura** Nesta seção, concentraremos nossa atenção no sistema formado por uma máquina conectada a uma barra infinita através de um circuito de transmissão simples, conforme indicado na Fig. (97). Neste caso particular, conforme veremos, é possível se obter uma relação analítica entre o tempo crítico e o ângulo crítico de abertura do defeito.

A curva potência-ângulo para o sistema da Fig. (97) correspondente a um curto-circuito trifásico na linha conforme indicado, está mostrada na Fig. (98), para a situação em que  $\delta_c = \delta_{crit}$ . Note que, durante o intervalo em que o curto é mantido, a capacidade de transmissão de potência entre gerador e barra infinita é nula, isto é, a amplitude da curva potência-ângulo é zero. Supõe-se que a abertura da falta e o posterior religamento do disjuntor (supostos instantâneos) “limpam” a falta, de modo que para ângulos superiores a  $\delta_{crit}$  a capacidade de transmissão inicial é recobrada.

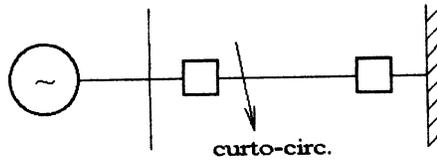


Figura 97: Sistema máquina-barra infinita com circuito de transmissão simples.

Calculemos inicialmente  $\delta_{crit}$ . Para isto, devemos considerar:

$$A_1 = A_2$$

Da Fig. (98) é fácil observar que:

$$A_1 = P_m \times (\delta_{crit} - \delta_0) \quad (6.215)$$

e que

Seção 6.5 O Critério das Áreas Iguais

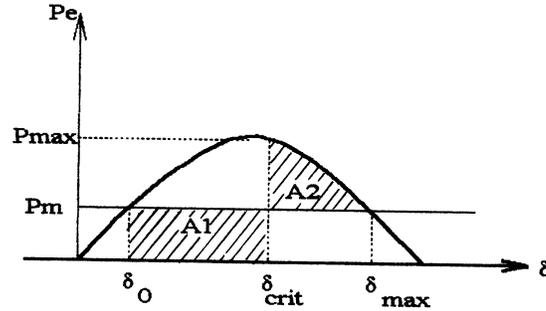


Figura 98: Curva potência-ângulo para o sistema da figura anterior.

$$A_2 = \int_{\delta_{crit}}^{\delta_{max}} (P_{max} \text{sen} \delta - P_m) d\delta = \int_{\delta_{crit}}^{\pi - \delta_0} (P_{max} \text{sen} \delta - P_m) d\delta$$

o que fornece:

$$A_2 = P_{max}(\cos \delta_{crit} + \cos \delta_0) - P_m(\pi - \delta_0 - \delta_{crit}) \quad (6.216)$$

Igualando-se as áreas e considerando que

$$P_m = P_{max} \text{sen} \delta_0$$

obtêm-se:

$$\delta_{crit} = \cos^{-1}[(\pi - 2\delta_0)\text{sen} \delta_0 - \cos \delta_0] \quad (6.217)$$

A partir do conhecimento de  $\delta_{crit}$ , é possível se calcular o tempo crítico de abertura da falta integrando-se analiticamente a equação de oscilação, já que neste caso  $P_e = 0$  durante o defeito. A equação de oscilação com o ângulo  $\delta$  expresso em radianos pode ser escrita (ver Capítulo 2):

$$\frac{H}{\pi f_0} \times \frac{d^2 \delta}{dt^2} = P_m \quad (6.218)$$

Integrando-se a Eq. (6.218) sucessivamente, obtêm-se:

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\pi f_0 P_m}{H} \times t$$

Capítulo 6 Estabilidade de Sistemas de Potência

$$\int_{\delta_0}^{\delta} d\delta = \frac{\pi f_0 P_m}{H} \int_0^t t dt$$

Para  $\delta = \delta_{crit}$ , é fácil se concluir que:

$$\delta_{crit} = \delta_0 + \frac{\pi f_0 P_m}{2H} \times t_{crit}^2$$

de onde:

$$t_{crit} = \sqrt{\frac{2H}{\pi f_0 P_m} \times (\delta_{crit} - \delta_0)} \quad (6.219)$$

**Exemplo -**

Seja o sistema representado na Fig. (99). Sabe-se que a tensão interna do gerador é igual a 1,05 pu, a tensão da barra infinita é de 1,0 pu e que a potência entregue pela máquina à barra infinita é de 1,0 pu. Além disso, são dadas as reatâncias transitória da máquina (=0,2 pu), do transformador (=0,1 pu) e da linha de transmissão (=0,2 pu), e a constante de inércia do gerador ( $H=5,0$  seg). Calcular o ângulo crítico e o tempo crítico de abertura de uma falta trifásica na linha de transmissão.

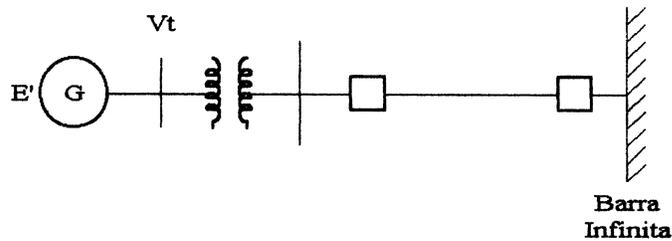


Figura 99: Sistema máquina-barra infinito para exemplo.

**Solução -**

a potência elétrica máxima é dada por:

$$P_{max} = \frac{E' \times E_{\infty}}{x_{eq}} = \frac{1,05 \times 1,0}{0,5} = 2,1 \text{ pu}$$

O ângulo inicial  $\delta_0$  pode ser obtido portanto a partir de:

$$2,1 \text{ sen } \delta_0 = 1,0 \Rightarrow \delta_0 = 0,496 \text{ rad } (= 28,44^{\circ})$$

## Seção 6.5 O Critério das Áreas Iguais

Portanto:

$$\delta_{crit} = \cos^{-1}[(\pi - 2 \times 0,496) \text{sen } 28,44^\circ - \cos 28,44^\circ]$$

$$\delta_{crit} = 81,7^\circ = 1,426 \text{ rad}$$

Finalmente:

$$t_{crit} = \sqrt{\frac{2 \times 5,0}{60 \times \pi \times 1,0}}(1,426 - 0,496) = 0,222 \text{ s } (\approx 13,3 \text{ ciclos})$$

### 6.5.4 Curto-Circuito com Eliminação da Falta pela Abertura da Linha Afetada

#### 6.5.4.1 Potência Elétrica antes, durante e pós-falta.

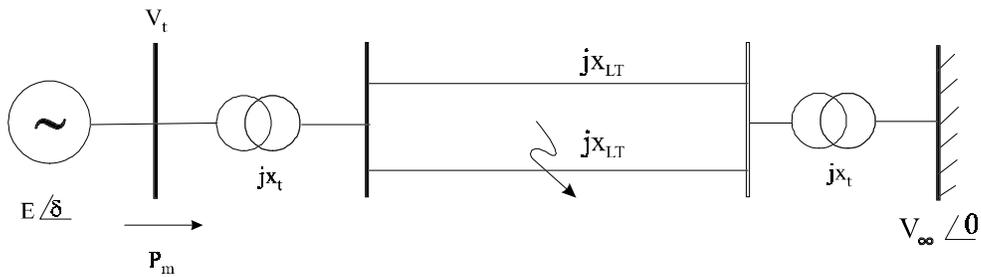


Figura 100: Sistema máquina-barra infinita para análise de estabilidade com abertura da falta.

Considere o sistema máquina-barra infinita da Fig. 100. Desejamos investigar o efeito sobre a estabilidade transitória de um curto-circuito trifásico sólido no centro de um dos circuitos de transmissão em paralelo, mantido durante alguns ciclos porém logo eliminado através da abertura da linha sob falta. Como a potência elétrica é uma função da reatância equivalente  $x_{eq}$  entre a barra interna da máquina e a barra infinita, isto é:

$$P_e = (P_e)_{\max} \text{sen } \delta = \frac{E V_\infty}{x_{eq}} \text{sen } \delta \quad (6.220)$$

e a topologia da rede varia de acordo com a situação considerada, temos três casos a investigar:

#### a) Antes da falta

O circuito correspondente a esta situação está mostrado na Fig. (101). Facilmente verificamos que a reatância equivalente neste caso é dada por:

$$x_{eq,af} = x'_d + 2x_t + x_{LT} / 2$$

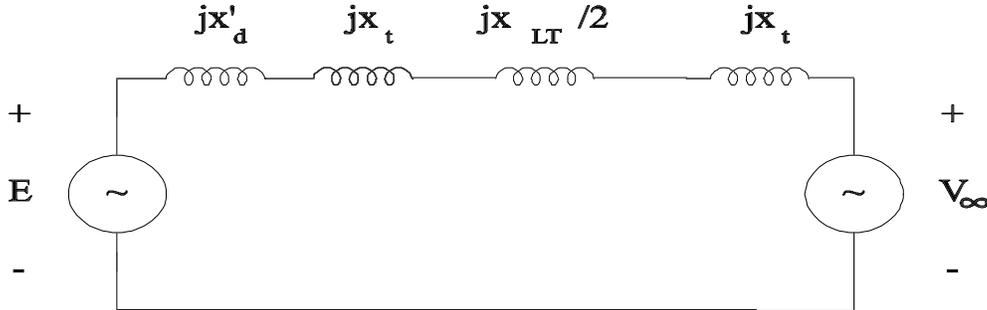


Figura 101: Circuito equivalente para a condição antes da falta.

b) *Durante a falta*

Neste caso, necessitamos inicialmente operar sobre o circuito equivalente para obter a reatância equivalente. A Fig. 102 representa o efeito do curto-circuito sobre a topologia da rede. Verificamos que, em consequência do curto, surge no circuito o triângulo formado pelas impedâncias  $jx_{LT}$ ,  $jx_{LT}/2$  e  $jx_{LT}/2$ . Aplicando uma transformação  $\Delta - Y$ , obtemos as impedâncias  $jx_1$ ,  $jx_2$  e  $jx_3$ . As duas primeiras podem ser combinadas em série com as demais impedâncias do circuito, fornecendo as impedâncias  $jX_1$ ,  $jX_2$  e  $jX_3$ , da Fig. 103. Conforme indicado na mesma figura, o circuito em estrela formado por estas impedâncias pode por sua vez ser convertido em triângulo. Note que as duas impedâncias em derivação resultantes estão em paralelo com as fontes, e portanto não afetam o fluxo de potência *ativa* entre a máquina e a barra infinita. Concluímos portanto que a reatância equivalente durante a falta é obtida a partir da impedância série resultante das transformações, conforme mostrado na Fig. 103. Realizando cada etapa das transformações acima descritas, é fácil concluir que:

$$x_{eq,df} = \frac{8x_t(x'_d + x_t)}{x_{LT}} + 3x'_d + 6x_t + x_{LT}$$

c) *Pós-Falta*

Este caso se distingue da condição antes da falta unicamente pela abertura da linha sob curto. Conclui-se portanto que a reatância equivalente pós-falta é dada por:

$$x_{eq,pf} = x'_d + 2x_t + x_{LT}$$

A cada uma das reatâncias equivalentes acima corresponde uma expressão do tipo da Eq. (6.220). Verificamos por inspeção que

$$x_{eq,df} > x_{eq,pf} > x_{eq,af}$$

Seção 6.5 O Critério das Áreas Iguais

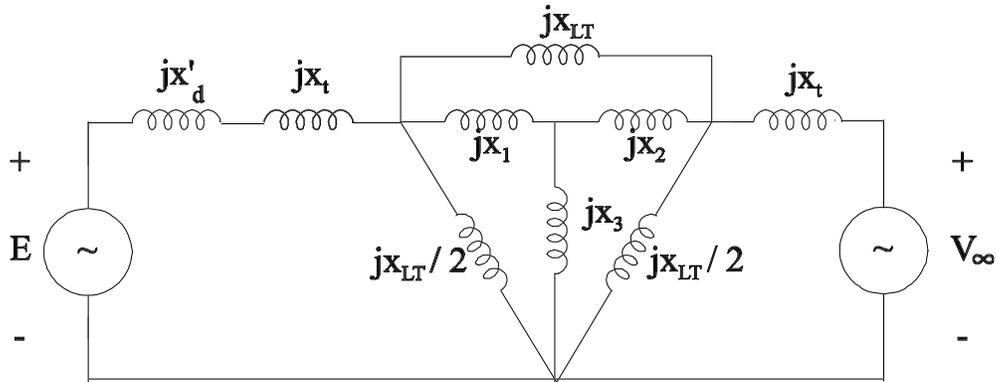


Figura 102: Primeira etapa da redução do circuito para a condição durante a falta.

o que implica em:

$$(P_{e,df})_{\max} < (P_{e,pf})_{\max} < (P_{e,af})_{\max}$$

Em palavras: a amplitude da curva potência-ângulo durante a falta é menor que na condição pós-falta, que por sua vez é menor que na condição pré-falta. (É importante lembrar que, de acordo com nossas hipóteses preliminares, estamos considerando que a tensão interna da máquina, assim como  $V_{\infty}$ , são constantes).

No que se segue, dedicaremos nossa atenção ao cálculo do ângulo crítico de abertura da linha, de modo que o sistema ainda mantenha a estabilidade. Para tal, é conveniente escrever as potências máximas durante e pós-falta em função da potência antes da falta. Esta última é dada por:

$$(P_{e,af})_{\max} = \frac{E V_{\infty}}{x_{eq,af}}$$

Por sua vez, potência elétrica durante a falta é:

$$(P_{e,df})_{\max} = \frac{E V_{\infty}}{x_{eq,df}}$$

Facilmente verificamos que  $P_{e,df}$  pode ser re-escrita como:

$$(P_{e,df})_{\max} = r_{df} (P_{e,af})_{\max} \quad (6.221)$$

onde, por definição:

$$r_{df} \triangleq \frac{x_{eq,af}}{x_{eq,df}}$$

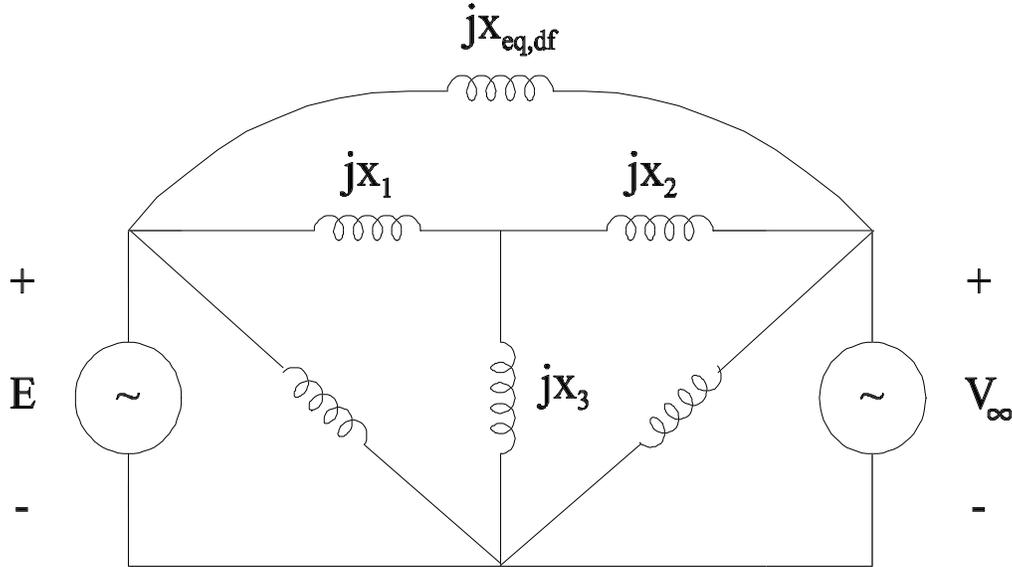


Figura 103: Segunda etapa da redução do circuito para a condição durante a falta.

Similarmente, para a condição pós-falta:

$$(P_{e,pf})_{\max} = r_{pf} (P_{e,af})_{\max} \quad (6.222)$$

onde:

$$r_{pf} \triangleq \frac{x_{eq,af}}{x_{eq,pf}}$$

Destas definições e das conclusões anteriores sobre os valores relativos das reatâncias equivalentes, imediatamente concluímos que  $r_{pf} > r_{df}$ .

**6.5.4.2 Ângulo Crítico de Abertura da Linha** Aplicaremos o critério das áreas iguais para determinar o ângulo crítico de abertura da falta, isto é, o máximo ângulo para eliminação do defeito sem que o sistema perca a estabilidade.

Para isso, considere inicialmente a situação mostrada na Fig. 96, na qual estão mostradas as curvas potência-ângulo para as situações de antes, durante e pós-falta. No caso ali representado, o ângulo de abertura da linha não é crítico: note que, sobre a curva de  $P_m$ , além da área hachurada ainda há área de desaceleração disponível. Isto significa que o ângulo  $\delta_c$  ali indicado é menor que o ângulo crítico de abertura da linha.

A situação limite para estabilidade transitória está indicada na Fig. 104. Observe que não é possível aumentar o ângulo de abertura da linha e ainda ter uma área de desaceleração capaz

Seção 6.5 O Critério das Áreas Iguais

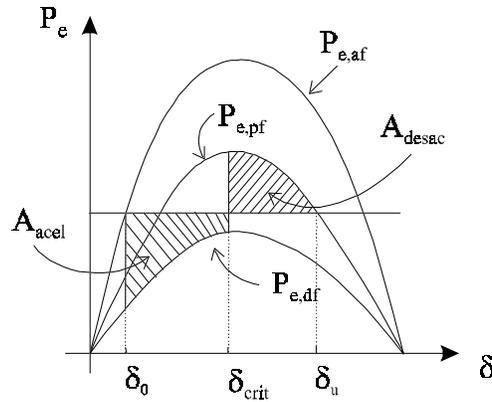


Figura 104: Critério das áreas iguais para cálculo do ângulo crítico para remoção da falta.

de compensar a área de aceleração indicada na figura. Portanto:

$$\delta_c = \delta_{crit} \Rightarrow \delta_{máx} = \delta_u$$

Na situação crítica da Fig. 104 temos, para estabilidade:

$$A_{acel} = A_{desac}$$

onde

$$A_{acel} = \int_{\delta_0}^{\delta_{crit}} [P_m - P_{e,df}(\delta)] d\delta$$

e

$$A_{desac} = \int_{\delta_{crit}}^{\delta_u} [P_{e,pf}(\delta) - P_m] d\delta$$

Resolvendo as integrais definidas usando as Eqs. (6.221) e (6.222) e equacionando as duas áreas, obtemos:

$$P_m (\delta_{crit} - \delta_0) + r_{df} P_{\max,af} (\cos \delta_{crit} - \cos \delta_0) = -r_{pf} P_{\max,af} (\cos \delta_u - \cos \delta_{crit}) - P_m (\delta_u - \delta_{crit})$$

o que fornece

$$\delta_{crit} = \cos^{-1} \left[ \frac{(P_m / P_{\max,af}) (\delta_u - \delta_0) + r_{pf} \cos \delta_u - r_{df} \cos \delta_0}{r_{pf} - r_{df}} \right] \quad (6.223)$$

onde:

$$\delta_0 = \text{sen}^{-1} (P_m / P_{\max}) < \pi/2$$

$$\delta_u = \text{sen}^{-1} (P_m / r_{pf} P_{\max}) > \pi/2$$

**6.5.4.3 Determinação do Tempo Crítico de Abertura** Diferentemente do que foi visto na Subseção 3, neste caso a potência de aceleração não é constante após a abertura da linha sob falta. Em conseqüência, não é possível a determinação *exata* do tempo crítico de forma fechada como naquele caso. Há entretanto duas possibilidades para determiná-lo:

- a) Integrar numericamente as equações do sistema para a condição durante a falta, até que  $\delta = \delta_{crit}$  (este último determinado pela Eq. (6.223). O tempo crítico será o tempo correspondente, isto é:

$$\delta(t_{crit}) = \delta_{crit}$$

- b) Através da expansão em série de Taylor de  $\delta(t)$  em torno de  $t = 0$ .

Esta segunda alternativa será detalhada a seguir. Expandindo  $\delta(t)$  em série de Taylor em torno de  $t = 0$  e truncando a série no termo de 4ª ordem, obtemos:

$$\delta(t) \approx \delta(0) + \dot{\delta}(0) \frac{(t-0)}{1!} + \ddot{\delta}(0) \frac{(t-0)^2}{2!} + \dots \delta^{(3)}(0) \frac{(t-0)^3}{3!} + \dots \delta^{(4)}(0) \frac{(t-0)^4}{4!}$$

Os dois primeiros coeficientes da série são facilmente obtidos como:

$$\begin{aligned} \delta(0) &= \delta_0 \\ \dot{\delta}(0) &= 0, \end{aligned}$$

já que o sistema está em regime permanente no momento da ocorrência da falta. O coeficiente seguinte pode ser obtido da equação de oscilação:

$$\ddot{\delta}(0) = \frac{P_m - P_{e,df}|_{\delta=0}}{M} = \frac{P_m - (P_{e,df})_{\max} \text{sen } \delta_0}{M} \triangleq A_0$$

Os coeficientes dos dois termos restantes são dados por:

$$\delta^{(3)}(0) = \frac{1}{M} \frac{d}{dt} [P_m - P_{e,df}]_{\delta=0} = -\frac{1}{M} (P_{e,df})_{\max} \cos \delta \times \dot{\delta} \Big|_{\delta=0} = 0$$

e

$$\begin{aligned} \delta^{(4)}(0) &= \frac{d}{dt} \left[ -\frac{1}{M} (P_{e,df})_{\max} \cos \delta \times \dot{\delta} \right]_{\delta=0} \\ &= -\frac{1}{M^2} [(P_{e,df})_{\max} \cos \delta_0 \times (P_m - (P_{e,df})_{\max} \text{sen } \delta_0)] \triangleq B_0 \end{aligned}$$

Finalmente, podemos escrever a seguinte aproximação de 4ª ordem para  $\delta(t)$ :

$$\delta(t) = \delta_0 + \frac{A_0}{2} t^2 + \frac{B_0}{24} t^4$$

## Seção 6.6 Máquina Ligada a Barra Infinita com Carga Local

Levando em conta que  $\delta = \delta_{crit}$  quando  $t = t_{crit}$ , chegamos à seguinte equação para a determinação de  $t_{crit}$ :

$$\frac{B_0}{24} t_{crit}^4 + \frac{A_0}{2} t_{crit}^2 - (\delta_{crit} - \delta_0) = 0 \quad (6.224)$$

É importante ressaltar que, devido à aproximação inerente ao truncamento da série no termo de 4ª ordem, a Eq. (6.224) só fornecerá uma boa aproximação para  $t_{crit}$  se  $t_{crit}$  não for muito maior que  $t_0$  (tipicamente, resultados aceitáveis são obtidos para  $t_{crit} < 0,15$  s).

### 6.6 Máquina Ligada a Barra Infinita com Carga Local

Seja o sistema máquina-barra infinita em que se considera que a máquina alimenta uma carga local em sua barra terminal, conforme mostrado na Fig. 105.

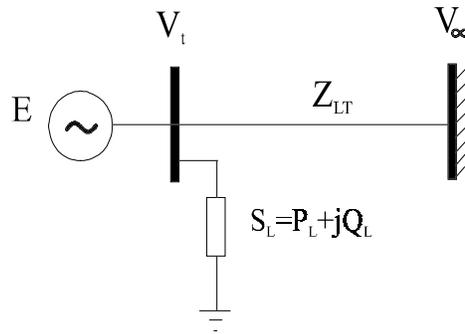


Figura 105: Sistema máquina-barra infinita com carga local.

A questão em que temos interesse nesta seção é a definição de uma expressão para a potência elétrica quando a máquina, além de entregar potência à barra infinita, alimenta também uma carga local. Para isso, faremos as seguintes hipóteses simplificadoras:

- A potência mecânica da máquina é suposta constante;
- O amortecimento e torques assíncronos são desprezados;
- A máquina síncrona é representada por uma fonte de tensão em série com  $x'_d$ ;
- O ângulo mecânico do rotor da máquina coincide com o ângulo de fase de  $\mathbf{E}$  com respeito a  $\mathbf{V}_\infty$ .
- A carga local pode ser representada por impedância constante.

A Fig. 106 mostra o circuito equivalente para o sistema. Como primeiro passo para derivar a expressão da potência elétrica, aplicaremos uma transformação  $Y - \Delta$  conforme indicado na figura.

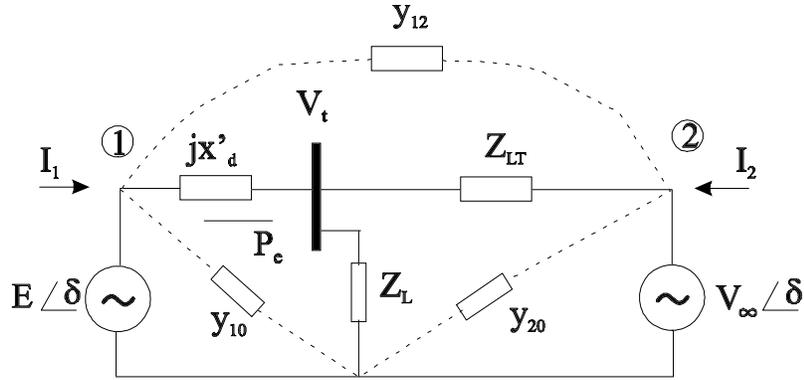


Figura 106: Circuito equivalente para sistema máquina-barra infinita com carga local.

Usando a formulação nodal para representar o circuito, podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ V_\infty \end{bmatrix}$$

onde:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= Y_{11} \angle \theta_{11} = y_{10} + y_{12} \\ Y_{12} = Y_{21} &= Y_{12} \angle \theta_{12} = -y_{12} \\ Y_{22} &= Y_{22} \angle \theta_{22} = y_{20} + y_{12} \end{aligned}$$

Com estas definições, a potência elétrica será dada por:

$$P_e = \text{Re}\{\mathbf{E} \mathbf{I}_1^*\} = \text{Re}\{E \angle \delta [\mathbf{Y}_{11} \mathbf{E} + \mathbf{Y}_{12} \mathbf{V}_\infty]^*\}$$

Após algumas manipulações algébricas, chegamos a:

$$P_e = E^2 Y_{11} \cos \theta_{11} + E V_\infty Y_{12} \cos(\delta - \theta_{12})$$

Definindo:

$$\begin{aligned} G_{11} &\triangleq Y_{11} \cos \theta_{11} \\ \alpha &\triangleq \theta_{12} - \pi/2 \end{aligned}$$

temos, finalmente:

$$P_e = E^2 G_{11} + E V_\infty Y_{12} \sin(\delta - \alpha)$$

O termo constante  $P_c = E V_\infty Y_{12}$  representa a dissipação de potência no circuito equivalente, e produz um deslocamento vertical da curva potência-ângulo. O ângulo  $\alpha$ , por sua vez, produz um deslocamento horizontal da curva potência-ângulo e depende tão somente do

ângulo de  $Y_{12}$  A Fig. 107 mostra a forma da curva potência-ângulo na presença de carga local.

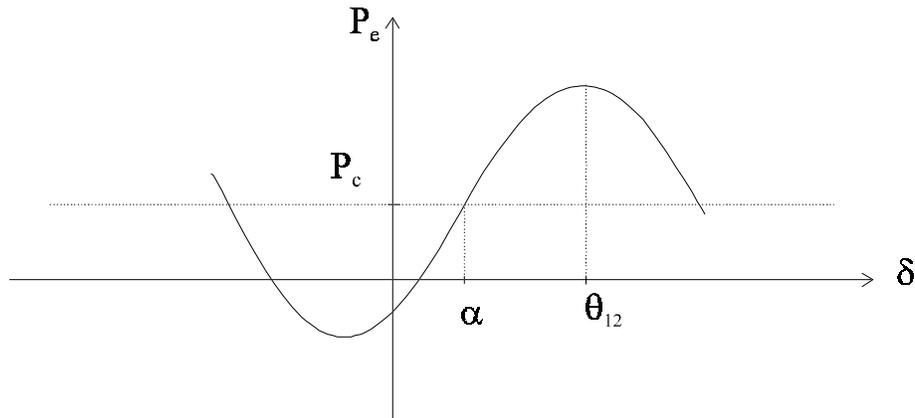


Figura 107: Curva potência-ângulo quando o gerador alimenta carga local.

## 6.7 Aplicação do Critério das Áreas Iguais a um Sistema de Duas Máquinas Finitas

Até agora temos aplicado o critério das áreas iguais a um sistema máquina-barras infinita, que representa tipicamente o caso de um gerador (possivelmente equivalente a uma usina) conectado a um grande sistema de potência. Entretanto, na prática frequentemente há interesse em se investigar a estabilidade entre dois sistemas interconectados cujas inércias são comparáveis, ou pelo menos são tais que a aproximação de se considerar uma delas como máquina de inércia infinita não é mais realística. Nestes casos, o problema pode ser formulado como o de duas máquinas de inércias finitas. Mostraremos em seguida que este problema é equivalente ao de um sistema máquina-barras infinita, e pode portanto ser estudado através do critério das áreas iguais na forma descrita nas seções anteriores.

O sistema de 2 máquinas finitas está representado na Fig. 108. Supõe-se que as duas máquinas estão conectadas através de um sistema de transmissão cuja reatância equivalente é  $x_{eq}$ , conforme mostrado na figura. O circuito equivalente correspondente está mostrado na Fig. 109. Note que nenhuma das fontes equivalentes é suposta ideal. As reatâncias  $x'_{d1}$  e  $x'_{d2}$  são as reatâncias transitórias e  $E_1$  e  $E_2$  são as magnitudes das tensões internas das duas máquinas, respectivamente. Supõe-se que os ângulos das tensões internas,  $\delta_1$  e  $\delta_2$ , são medidos com respeito a um eixo de referência comum que gira à velocidade síncrona, conforme mostrado na Fig. 110.

Como já sabemos, a potência de sincronização entre as duas máquinas depende apenas da

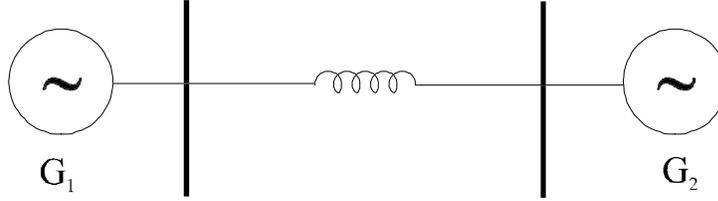


Figura 108: Sistema formado por duas máquinas de inércia finita.

*diferença* entre os ângulos dos rotores das duas máquinas, isto é,  $\delta_1 - \delta_2$ , e não dos ângulos absolutos. Assim, o que de fato importa é verificar se esta diferença não aumenta indefinidamente (embora os ângulos  $\delta_1$  e  $\delta_2$  possam crescer indefinidamente).

As equações de oscilação das duas máquinas são dadas por:

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{\delta}_1 &= P_{a1} \\ M_1 \ddot{\delta}_2 &= P_{a2} \end{aligned} \quad (6.225)$$

onde as potências de aceleração são dadas por:

$$\begin{aligned} P_{a1} &= P_{m1} - P_{e1}(\delta_1 - \delta_2) \\ P_{a2} &= P_{m2} - P_{e2}(\delta_1 - \delta_2) \end{aligned} \quad (6.226)$$

e a notação usada para as potências elétricas enfatiza o fato de as mesmas serem funções da diferença entre os ângulos das máquinas. Podemos escrever as Eqs. (6.225) como:

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_1 &= P_{a1} / M_1 \\ \ddot{\delta}_2 &= P_{a2} / M_2 \end{aligned}$$

Definindo:

$$\delta_{12} \triangleq \delta_1 - \delta_2$$

facilmente verificamos que:

$$\ddot{\delta}_{12} = \frac{P_{a1}}{M_1} - \frac{P_{a2}}{M_2} \quad (6.227)$$

que é a aceleração existente entre as duas máquinas síncronas. Multiplicando-se a Eq. (6.227) por  $M_1 M_2 / (M_1 + M_2)$ , obtemos:

$$\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \ddot{\delta}_{12} = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \times \left( \frac{M_2 P_{a1} - M_1 P_{a2}}{M_1 M_2} \right)$$

ou

$$\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \ddot{\delta}_{12} = \frac{M_2 P_{a1}}{M_1 + M_2} - \frac{M_1 P_{a2}}{M_1 + M_2}$$

## Seção 6.8 O Modelo Clássico para Estudos de Estabilidade Transitória

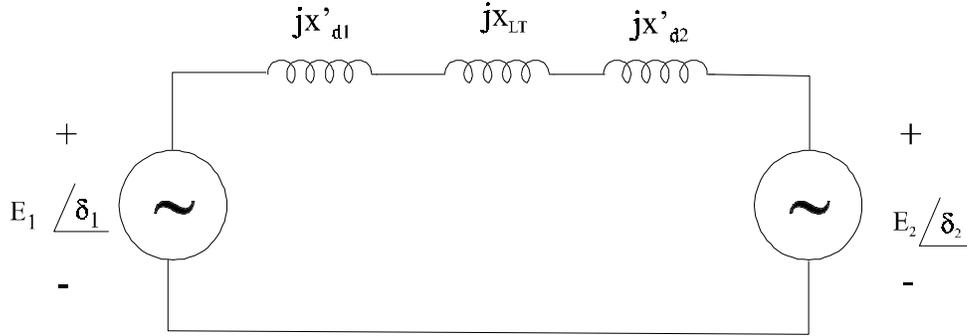


Figura 109: Circuito equivalente para sistema de duas máquinas finitas.

ou ainda, usando as definições das potências de aceleração dadas nas Eqs. (6.226):

$$\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \ddot{\delta}_{12} = \left( \frac{M_2 P_{m1}}{M_1 + M_2} - \frac{M_1 P_{m2}}{M_1 + M_2} \right) - \left( \frac{M_2 P_{e1}}{M_1 + M_2} - \frac{M_1 P_{e2}}{M_1 + M_2} \right) \quad (6.228)$$

Definindo:

$$\begin{aligned} M &\triangleq \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \\ P_M &\triangleq \frac{M_2 P_{m1}}{M_1 + M_2} - \frac{M_1 P_{m2}}{M_1 + M_2} \\ P_E &\triangleq \frac{M_2 P_{e1}}{M_1 + M_2} - \frac{M_1 P_{e2}}{M_1 + M_2} \end{aligned} \quad (6.229)$$

verificamos que a Eq. (6.228) apresenta uma forma idêntica à do caso máquina-barra infinita, em que a inércia da máquina equivalente,  $M$ , é menor que a menor dentre as inércias das duas máquinas. Se trocarmos os sinais de  $P_{m2}$  e  $P_{e2}$  nas Eqs. (6.229) para refletir o fato de que uma das máquinas está operando como *motor* síncrono, verificamos que  $P_E$  e  $P_M$  podem ser vistas como médias ponderadas das potências elétricas de saída e potências mecânicas de entrada das duas máquinas, respectivamente, em que os pesos individuais associados à potência de uma das máquinas é a inércia da outra máquina.

Tendo obtido o modelo equivalente dado pelas Eqs. (6.228) e (6.229), podemos agora investigar a estabilidade do sistema de duas máquinas finitas utilizando o critério das áreas iguais desenvolvido para o caso máquina-barra infinita.

## 6.8 O Modelo Clássico para Estudos de Estabilidade Transitória

### 6.8.1 Hipóteses para o Desenvolvimento do Modelo

Apresenta-se nesta seção o modelo clássico utilizado em estudos de estabilidade de sistemas multimáquinas. O modelo baseia-se nas seguintes hipóteses simplificadoras:

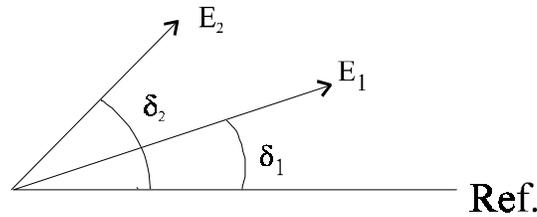


Figura 110: Diagrama fasorial para sistema de duas máquinas finitas.

1. A potência mecânica das máquinas é suposta constante;
2. Os torques de amortecimento são considerados através de um termo proporcional à velocidade das máquinas, incluído nas equações de oscilação;
3. As máquinas são representadas por uma tensão constante atrás da reatância transitória;
4. As cargas são representadas por impedâncias constantes.

A Fig.(111) representa uma rede elétrica de  $m$  barras e  $n$  máquinas  $m \geq n$ . O nó de referência é o nó 0 (neutro). As barras 1, 2, ...,  $n$  são as barras internas das máquinas, que são adicionadas à rede original após ter sido executada uma rotina de fluxo de potência para a condição de operação de interesse. As tensões atrás das reatâncias transitórias das máquinas são aplicadas às barras internas. As cargas são representadas por impedâncias constantes, e as linhas e transformadores são representados por seus modelos  $\pi$ -equivalentes.

Os valores das tensões internas  $\dot{E}_i = 1, \dots, n$ , são determinados em função das condições de antes do defeito, a partir do estudo de fluxo de potência previamente realizado. De acordo com as suposições do modelo clássico, o módulo das tensões internas  $\dot{E}_i, i = 1, \dots, n$ , permanecem constantes durante o transitório. As impedâncias que representam as cargas também são determinadas a partir do estudo prévio de fluxo de potência para a condição de operação em que se tem interesse.

### 6.8.2 Representação de Cargas por Impedâncias Constantes

A partir do estudo de fluxo de potência para a condição de antes da perturbação, que fornece a tensão na barra de carga,  $\dot{V}_L$ , e as potências ativa e reativa da carga,  $P_L$  e  $Q_L$ , têm-se:

$$P_L + jQ_L = \dot{V}_L \dot{I}_L^* \quad (6.230)$$

onde  $\dot{I}_L$  é a corrente que flui para a carga. Então,

$$P_L + jQ_L = \dot{V}_L [\dot{V}_L^* (G_L - jB_L)] = V_L^2 (G_L - jB_L)$$

De modo que

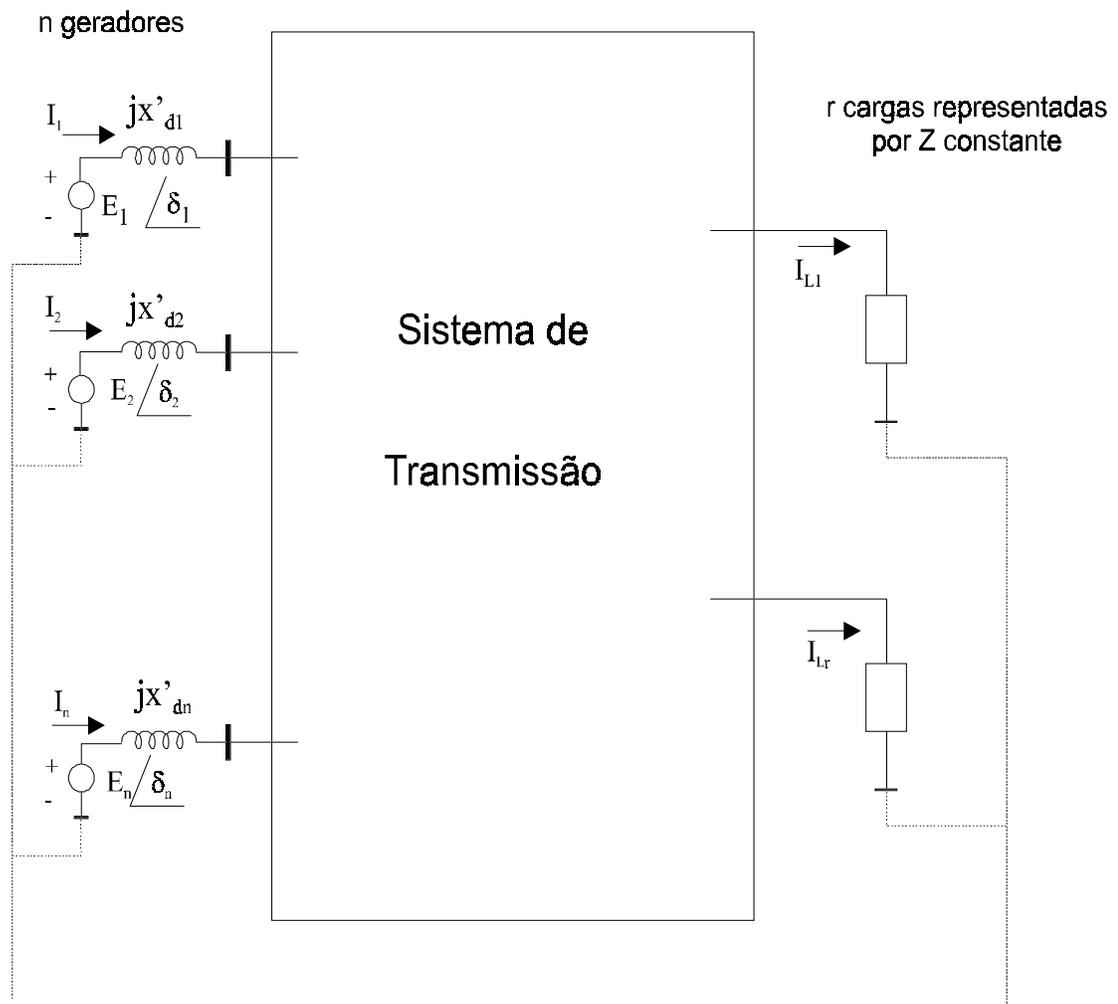


Figura 111: Representação clássica de um sistema multimáquinas.

$$\dot{Y}_L \triangleq G_L + jB_L = \frac{P_L}{V_L^2} - j\frac{Q_L}{V_L^2} \quad (6.231)$$

### 6.8.3 Cálculo das Tensões Internas das Máquinas

Suponhamos que as grandezas  $P$ ,  $Q$ ,  $V$  e  $\alpha$  da Fig.(112) são conhecidas como resultado de um estudo de fluxo de potência. A tensão interna da máquina,  $\dot{E}_i$ , é calculada a partir de  $\dot{V}$  como segue.

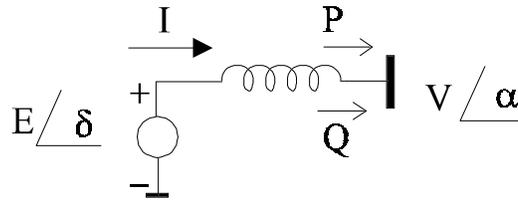


Figura 112: Cálculo das tensões internas das máquinas.

Considere por enquanto que  $\alpha = 0$ , e que  $\dot{I} = I_r + jI_m$ . Então:

$$P + jQ = \dot{V}\dot{I}^*$$

Logo:

$$I_r + jI_m = \frac{P - jQ}{V} \quad (6.232)$$

Por outro lado:

$$\dot{E} = \dot{V} + jx'_d\dot{I} = \left(V + \frac{Qx'_d}{V}\right) + j\left(\frac{Px'_d}{V}\right) \quad (6.233)$$

De modo que:

$$|\dot{E}| = \sqrt{\left(V + \frac{Qx'_d}{V}\right)^2 + \left(\frac{Px'_d}{V}\right)^2} \quad (6.234)$$

e

$$\delta' = \arctan\left(\frac{\frac{Px'_d}{V}}{V + \frac{Qx'_d}{V}}\right) = \arctan\left(\frac{Px'_d}{V^2 + Qx'_d}\right) \quad (6.235)$$

O ângulo  $\delta_0$  é obtido como:

$$\delta_0 = \delta' + \alpha \quad (6.236)$$

#### 6.8.4 Redução de Rede

Depois do cálculo das admitâncias das cargas e das tensões internas das máquinas, os seguintes passos são seguidos com vistas à modelagem da rede:

- As admitâncias que representam as cargas são conectadas entre as respectivas barras de carga e o nó de referência;
- Criam-se nós adicionais para representar as barras internas das máquinas, e os valores das respectivas reatâncias transitórias são conectados entre as novas barras e as barras terminais das máquinas. Considera-se que todas as barras são re-numeradas, de modo que as  $n$  primeiras são agora as barras internas das máquinas;
- Todas as reatâncias do sistema aumentado resultante são convertidas para admitâncias.

O alvo de redução é um modelo da rede em termos da matriz de admitância das barras, da forma

$$\dot{I}_n = Y_{red} \dot{E}_n \quad (6.237)$$

onde

$\dot{I}_n$ : vetor das correntes injetadas nas barras internas.

$\dot{E}_n$ : vetor das tensões nas barras internas.

$Y_{red}$ : matriz de admitância das barras reduzida.

Para se modelar o sistema de acordo com a Eq.(6.237), considere-se a equação nodal para o sistema aumentado (pelas barras internas e admitâncias das cargas):

$$\dot{I} = Y \dot{V} \quad (6.238)$$

onde

$\dot{I}$ : vetor das correntes injetadas nas barras;

$\dot{V}$ : vetor das tensões nas barras;

$Y$ : matriz da admitância das barras.

Após a adição das barras internas, estas são as únicas cujas injeções são diferentes de zero. Assim, a Eq.(6.238) pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_n \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{nn} & \vdots & Y_{nr} \\ \dots & \dots & \dots \\ Y_{rn} & \vdots & Y_{rr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}_n \\ \dots \\ \dot{V}_r \end{bmatrix} \quad (6.239)$$



## Seção 6.8 O Modelo Clássico para Estudos de Estabilidade Transitória

tratadas como admitâncias constantes. Se este não for o caso, a identidade das barras de carga tem que ser preservada.

Em estudos de estabilidade, a redução deve ser efetuada para três períodos distintos, a saber: antes da falta, *af*, durante a falta, *df*, e pós-falta, *pf*. Usam-se soluções numéricas das equações diferenciais de oscilação das máquinas para a simulação completa do sistema.

A potência elétrica entregue pela *i*-ésima máquina é dada por:

$$P_{e,i} = E_i^2 G_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n E_i E_j Y_{ij} \cos(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j), i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.245)$$

onde  $\dot{Y}_{ij} = Y_{ij} \angle \theta_{ij}$ . Se os elementos da matriz de admitância das barras da rede reduzida são expressos na forma retangular, isto é:

$$\mathbf{Y}_{ij} = G_{ij} + jB_{ij}$$

então a expressão para a potência elétrica torna-se:

$$P_{e,i} = E_i^2 G_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n E_i E_j [G_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) + B_{ij} \text{sen}(\delta_i - \delta_j)], i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.246)$$

As equações de oscilação são então dadas por:

$$2H_i \dot{\omega}_i + D_i \omega_i = P_{m,i} - P_{e,i} \quad (6.247)$$

$$\frac{d\delta_i}{dt} = \omega_i \quad (6.248)$$

As potências mecânicas de entrada, supostas constantes, são determinadas a partir das condições de antes da falta, isto é:

$$P_{m,i} = P_{e,i} |_{t=0} = P_{e,i}^0 \quad (6.249)$$

### 6.8.5 Etapas para Realizar um Estudo de Estabilidade

1. Executar um fluxo de potência para a condição de antes da falta. Isto é necessário para calcular as potências mecânicas  $P_{m,i}$  dos geradores e também suas tensões internas,  $E \angle \delta_0$ . Igualmente, as impedâncias equivalentes para representação das cargas são obtidas do estudo de fluxo de potência;
2. Calcular impedâncias (ou admitâncias) equivalentes para as cargas;
3. Calcular tensões internas dos geradores;
4. Calcular a matriz  $Y_{BARRA}$  para cada condição da rede (antes de falta, durante a falta e pós-falta);

5. Eliminar todos os nós, exceto as barras internas de gerador, e obter a matriz  $Y_{red}$  para cada condição da rede;
6. As equações diferenciais (6.247) e (6.248) são então integradas usando-se um método numérico (Euler modificado, Runge-Kutta de quarta ordem, regra trapezoidal, etc), com o adequado “chaveamento” da matriz  $Y_{red}$  para cada condição da falta.

## 6.9 Exercícios

1. Um gerador cuja a reatância transitória é igual a  $0,37 p.u.$  está entregando uma corrente de  $1,0 p.u.$  a  $\cos\varphi = 0,91$  (atrasado) a uma barra infinita, através de um disjuntor. Se o disjuntor é subitamente aberto, quanto tempo ele pode ser mantido nesta situação antes do religamento sem que ocorra perda de sincronismo? Despreze o amortecimento, e considere  $H = 2,5 s$  para a máquina sendo a tensão da barra infinita igual a  $1,0 p.u.$
2. Considere o sistema de energia elétrica da figura 113. Os parâmetros e valores nominais são:  $S = 415 MVA$ ;  $\cos\varphi = 0,90$ ;  $x_L = 0,70 pu$ ;  $x_t = 0,12 pu$ ;  $x'_d = 0,30 pu$  e  $H = 5,0 s$ . Todas as retâncias estão em p.u. da potência nominal da máquina. Suponha que o sistema esteja operando em regime permanente com  $V_t = 1,02 pu$ ,  $V_\infty = 1,0 pu$  e fornecendo  $343 MW$  à barra infinita. O que acontecerá com o comportamento dinâmico do sistema se a linha de transmissão **C** for subitamente desconectada nestas condições de operação?

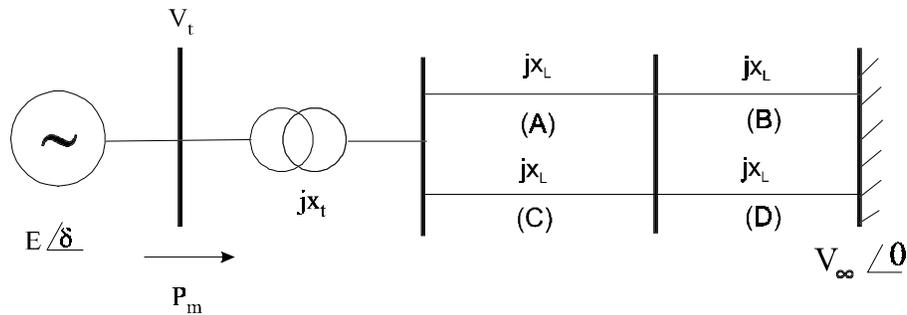


Figura 113: Sistema para Exercícios 3 e 4.

3. Considere novamente o sistema da figura 113. Suponha agora que a capacidade nominal do gerador é de  $465 MVA$ , sendo os demais parâmetros do sistema iguais ao do problema anterior. Quanto à condição de operação, supõe-se que, em regime permanente, o sistema está fornecendo  $290 MW$  à barra infinita, sendo os valores das tensões terminal da máquina e na barra infinita iguais aos do problema anterior. Um curto-circuito trifásico sólido ocorre na linha **A** próximo à barra 1, sendo eliminado pelo desligamento temporário da linha **A** após  $0,05 s$  de permanência do defeito. É possível

Seção 6.9 Exercícios

que o sistema permaneça estável após o curto-circuito sem religamento da linha A? Caso isto não seja possível, qual o máximo ângulo de religamento da linha para que a estabilidade seja mantida?

4. Repita o problema anterior supondo agora tempos de permanência do defeito de:
  - a) 0,10 s;
  - b) 0,15 s.
5. Deseja-se fazer um estudo clássico de estabilidade para o sistema cujo diagrama unifilar, parâmetros e resultados de um caso base de fluxo de potência são mostrados nas figuras 114e 115. Os dados dos geradores estão na Tabela 1. Pede-se:
  - (a) Calcular as admitâncias "shunt" equivalentes para as cargas  $A, B$  e  $C$ ;
  - (b) Os módulos das tensões internas das máquinas do sistema e seus ângulos iniciais;
  - (c) Supondo que a falta a ser estudada é um curto-circuito trifásico sólido no extremo da linha 5 – 7, próximo à barra 7, obtenha a matriz de admitância das barras para as condições antes da falta, durante e pós-falta (esta última considerando que a falta é eliminada pela abertura dos disjuntores da linha 5 – 7);
  - (d) Supondo que, para as condições antes da falta, durante a falta e pós-falta, as matrizes de admitância das barras *após a redução às barras internas* são dadas conforme abaixo, calcular as potências mecânicas para as três máquinas do sistema, que serão utilizadas na integração das equações de oscilação;

$$Y_{antes\ da\ falta}^{red} = \begin{bmatrix} 0,846 - j2,988 & 0,287 + j1,513 & 0,210 + j1,226 \\ 0,287 + j1,513 & 0,420 - j2,724 & 0,213 + j1,088 \\ 0,210 + j1,226 & 0,213 + j1,088 & 0,277 - j2,368 \end{bmatrix}$$

$$Y_{durante\ a\ falta}^{red} = \begin{bmatrix} 0,657 - j3,816 & 0 + j0 & 0,07 + j0,631 \\ 0 + j0 & 0 - j5,486 & 0 + j0 \\ 0,07 + j0,631 & 0 + j0 & 0,174 - j2,796 \end{bmatrix}$$

$$Y_{pós-falta}^{red} = \begin{bmatrix} 1,181 - j2,229 & 0,138 + j0,726 & 0,191 + j1,079 \\ 0,138 + j0,726 & 0,389 - j1,953 & 0,199 + j1,229 \\ 0,191 + j1,079 & 0,199 + j1,229 & 0,273 - j2,342 \end{bmatrix}$$

- (e) Desprezando-se os amortecimentos, escrever as equações de oscilação das três máquinas, a serem integradas para se obter as curvas(ângulos de troque) x tempo, para cada uma das condições:
  - I. Antes da falta;
  - II. Durante a falta;
  - III. Pós-falta.

Especificar os valores numéricos de cada um dos parâmetros e quantidades mantidas constantes (isto é, as potências mecânicas e tensões internas), deixando indicadas apenas as variáveis a serem integradas ( $\delta_i$  e  $\omega_i$ ). Lembrar de também especificar as condições iniciais.

Tabela 1: Dados dos Geradores

Dados	Ger. 1	Ger. 2	Ger. 3
MVA	247,5	192	128
KV	16,5	18	13,8
$\cos \varphi$	1,0	0,85	0,85
Tipo	Hidro	Vapor	Vapor
Veloc. (rpm)	180	3600	3600
$x'_d$ (*)	0,0608	0,1198	0,1813
$H$ (s) (**)	9,55	3,33	2,35
(*) Base de 100 MVA e KV da máquina			
(**) Deve ser convertido para base comum			

OBS: Para todos os itens, considerar uma base de 100 MVA. Todas as impedâncias de linhas e transformadores são especificadas nesta base.

Seção 6.9 Exercícios

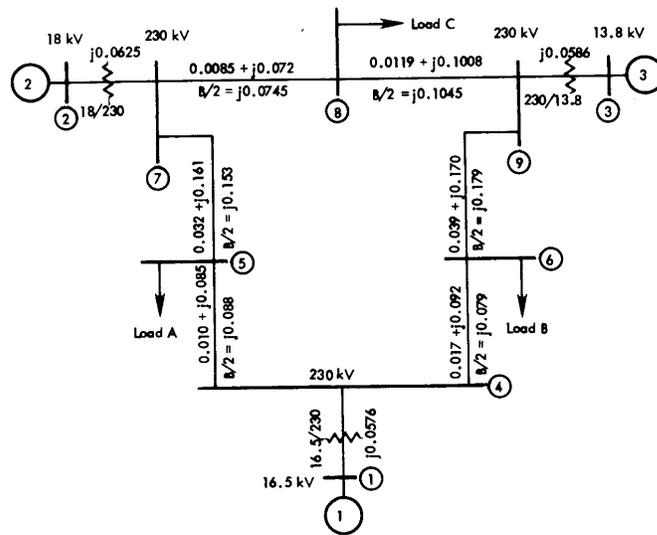


Figura 114: Diagrama unifilar para sistema do Problema 6.

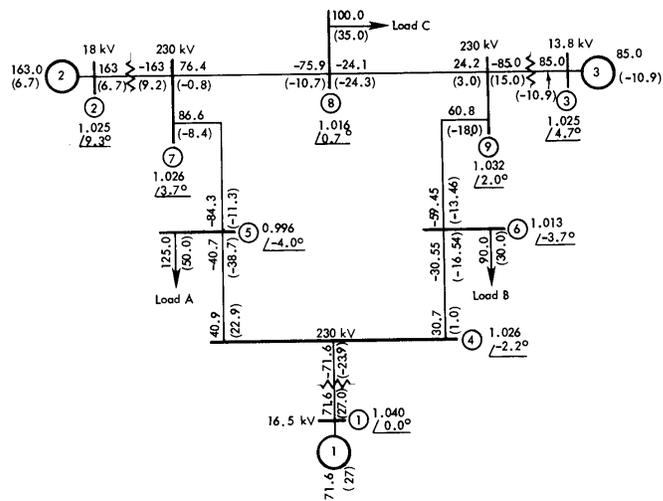


Figura 115: Resultados do estudo de fluxo de potência para sistema do Problema 6.