Capítulo 2

Controlabilidade, Observabilidade e Estabilidade

O principal objetivo deste capítulo é definir Controlabilidade, Observabilidade e Estabilidade, e suas decorrências diretas. Estes três conceitos fundamentam o projeto de estabilizadores que é parte integrante de seguidores robustos.

2.1 Conceito de Controlabilidade

O conceito de controlabilidade é fundamental para o projeto de estabilizadores usando realimentação de estado. Um sistema instável, porém controlável, pode ser estabilizado e, em conseqüência, esta se torna uma condição necessária que permite projetar com segurança controladores para sistemas.

2.1.1 Caso Contínuo

Definição de Controlabilidade : Sejam $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x}_f$ pontos do espaço de estado arbitrariamente escolhidos.

O sistema contínuo, de ordem n,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u,$$

é controlável se e somente se existe um sinal de controle $u(t)$, definido no intervalo $[t_0, t_0 + \tau]$, que transfira o estado do ponto $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(t_0)$ (estado inicial) para o ponto $\mathbf{x}_f = \mathbf{x}(t_0 + \tau)$ (estado final), onde t_0 e τ são um números reais e $\tau \geq 0$. Pode-se demonstrar que esta definição é equivalente ao Critério de Controlabilidade, apresentado em seguida.

Critério de Controlabilidade: O sistema contínuo, de ordem n,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u,$$

é controlável se e somente se a matriz de controlabilidade,

$$\mathcal{C}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{(n-1)}\mathbf{B} \end{bmatrix},$$

é não singular.

2.1.2 Caso Discreto

Definição de Controlabilidade: Sejam $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x}_f$ pontos do espaço de estado arbitrariamente escolhidos.

O sistema discreto, de ordem n,

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k),$$

é controlável se e somente se existe um sinal de controle $u(k)$, definido em $[k_0, k_0+m]$, que transfira o estado do ponto $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(k_0)$ (estado inicial) para o ponto $\mathbf{x}_f = \mathbf{x}(k_0 + m)$ (estado final), onde k_0 e m são inteiros e $m \geq n$.

Critério de Controlabilidade: O sistema discreto, de ordem n,

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi x}(k) + \mathbf{\Gamma} u(k),$$

é controlável se e somente se a matriz de controlabilidade,

$$\mathcal{C}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} & \mathbf{\Phi\Gamma} & \cdots & \mathbf{\Phi}^{(n-1)}\mathbf{\Gamma} \end{bmatrix},$$

é não singular.

2.2 Conceito de Observabilidade

Para se realizar esquemas de seguimento robusto, é necessário a utilização de controle por realimentação de estado. Quando o estado não é mensurável, é impossível a implementação deste tipo de controle. Porém, é possível obter uma estimativa do vetor $\mathbf{x}$, usando apenas os sinais de entrada, u, e de saída, y, que são sempre mensuráveis. O esquema que estima o estado a partir da entrada e da saída é denominado de Observador de Estado. O conceito de observabilidade é importante para a construção de observadores de estado. Esquemas de controle por realimentação de estado podem ser implementados usando o estado estimado, $\widehat{\mathbf{x}}$, ao invés do estado real, $\mathbf{x}$.

2.2.1 Caso Contínuo

Definição de Observabilidade: O sistema contínuo, de ordem n,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{Cx} + Du, \end{aligned}$$

é observável se e somente se existe um número real τ tal que o estado $\mathbf{x}(0)$ do espaço de estado possa ser determinado de $u(t)$ e $y(t)$ para $0 \le t \le \tau$.

Critério de Observabilidade: O sistema contínuo, de ordem n,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{Cx} + Du, \end{aligned}$$

é observável se e somente se a matriz de observabilidade

$$\mathcal{O}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{(n-1)} \end{bmatrix},$$

é não singular.

2.2.2 Caso Discreto

Definição de Observabilidade: O sistema discreto, de ordem n,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{\Phi x}(k) + \mathbf{\Gamma} u(k) \\ y(k) &= \mathbf{Cx}(k) + Du(k), \end{aligned}$$

é observável se e somente se existe um número inteiro m tal que o estado $\mathbf{x}(\mathbf{0})$ do espaço de estado possa ser determinado de $u(k)$ e $y(k)$ para $0 \le k \le m$.

Critério de Observabilidade: O sistema discreto, de ordem n,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{\Phi x}(k) + \mathbf{\Gamma} u(k) \\ y(k) &= \mathbf{Cx}(k) + Du(k), \end{aligned}$$

é observável se e somente se a matriz de observabilidade

$$\mathcal{O}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C\Phi} \\ \vdots \\ \mathbf{C\Phi}^{(n-1)} \end{bmatrix},$$

é não singular.

2.3 Domínio Freqüência

Antes de apresentarmos o assunto, vamos recordar três propriedades de determinantes e o conceito de matriz adjunta.

Teorema: Sejam **F**, **G** e **H** matrizes quadradas, onde **H** é não singular.
Então

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{FG}) &= \det(\mathbf{F})\det(\mathbf{G}) \\ \det(\mathbf{H})\det(\mathbf{H}^{-1}) &= 1 \\ \det(\mathbf{F}) &= \det(\mathbf{F}^T). \end{aligned}$$

Definição: Seja **F** uma matriz quadrada não singular de dimensão n.
A matriz,

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{bmatrix},$$

é a matriz de cofatores de **F**. O cofator γ_{ij} de **F** é definido por

$$\gamma_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\mathbf{M}_{ij}),$$

onde a matriz menor $\mathbf{M}_{ij}$ de **F** , de dimensão $n-1$, é a matriz **F** sem a i-ésima linha e sem a j-ésima coluna.

A matriz adjunta de **F** é a transposta de sua matriz de cofatores

$$\mathtt{adj}(\mathbf{F}) = \Gamma^T = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \cdots & \gamma_{n1} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{1n} & \gamma_{2n} & \cdots & \gamma_{nn} \end{bmatrix}.$$

Teorema: Seja **F** uma matriz quadrada não singular de dimensão n. Então

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\mathtt{adj}(\mathbf{F})}{\det(\mathbf{F})}.$$

2.3.1 Caso Contínuo

Seja o sistema contínuo, de ordem n,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + Du. \end{aligned}$$

A Transformada de Laplace deste sistema é

$$\begin{aligned} s\mathbf{x}(s) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}u(s) \\ y(s) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(s) + Du(s). \end{aligned}$$

Podemos escrever que

$$\begin{aligned} (sI - \mathbf{A})\mathbf{x}(s) &= \mathbf{B}u(s) \\ \mathbf{x}(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(s) \\ y(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(s) + Du(s) \\ &= [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D]u(s). \end{aligned}$$

A função de transferência é

$$f(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D.$$

Podemos escrever que

$$\begin{aligned} f(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+D \\ &= \frac{\mathbf{C}\texttt{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}+D \\ &= \frac{\mathbf{C}\texttt{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{B}+\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})D}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}. \end{aligned}$$

Vê-se claramente que o polinômio característico é

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}),$$

e que a equação característica é

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})=0.$$

Algumas propriedades, relativas a polinômios característicos, são importantes.
Teorema: Se $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ são matrizes quadradas, então

$$\begin{aligned} \det\left(s\mathbf{I}-\begin{bmatrix}\mathbf{F} & \mathbf{H}\\ \mathbf{0} & \mathbf{G}\end{bmatrix}\right) &= \det(s\mathbf{I}-\mathbf{F})\det(sI-\mathbf{G}) \\ \det\left(s\mathbf{I}-\begin{bmatrix}\mathbf{F} & \mathbf{0}\\ \mathbf{H} & \mathbf{G}\end{bmatrix}\right) &= \det(s\mathbf{I}-\mathbf{F})\det(sI-\mathbf{G}) \end{aligned}$$

Teorema:

$$\begin{aligned} \det\left(s\mathbf{I}-\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & & & 0 \\ & \mathbf{I}_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}\right) &= s^n-a_1s^{n-1}-\cdots-a_n \\ \det\left(s\mathbf{I}-\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ a_2 & & \mathbf{I}_{n-1} & \\ \vdots & & & \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\right) &= s^n-a_1s^{n-1}-\cdots-a_n. \end{aligned}$$

Teorema: Se $\mathbf{T}$ é não singular e $\mathbf{F}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$, então

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{F})=\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}).$$

2.3.2 Caso Discreto

Seja o sistema discreto, de ordem n,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k)+\mathbf{\Gamma}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k)+Du(k). \end{aligned}$$

A Transformada Z deste sistema é

$$\begin{aligned} z\mathbf{x}(z) &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(z)+\mathbf{\Gamma}u(z) \\ y(z) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(z)+Du(z). \end{aligned}$$

A função de transferência é

$$f(z)=\mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Gamma}+D.$$

Podemos escrever que

$$f(z)=\frac{\mathbf{C}\texttt{adj}(z\mathbf{I}-\mathbf{\Phi})\mathbf{\Gamma}+\det(z\mathbf{I}-\mathbf{\Phi})D}{\det(z\mathbf{I}-\mathbf{\Phi})}.$$

O polinômio característico é

$$\det(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}),$$

e que a equação característica é

$$\det(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}) = 0.$$

Algumas propriedades, relativas a polinômios característicos, são importantes.
Teorema: Se $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ são matrizes quadradas, então

$$\begin{aligned}\det\left(z\mathbf{I} - \begin{bmatrix}\mathbf{F} & \mathbf{H}\\ \mathbf{0} & \mathbf{G}\end{bmatrix}\right) &= \det(z\mathbf{I}-\mathbf{F})\det(z\mathbf{I}-\mathbf{G})\\ \det\left(z\mathbf{I} - \begin{bmatrix}\mathbf{F} & \mathbf{0}\\ \mathbf{H} & \mathbf{G}\end{bmatrix}\right) &= \det(z\mathbf{I}-\mathbf{F})\det(z\mathbf{I}-\mathbf{G})\end{aligned}$$

Teorema:

$$\begin{aligned}\det\left(z\mathbf{I} - \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & & & 0 \\ & \mathbf{I}_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0\end{bmatrix}\right) &= z^n - a_1 z^{n-1} - \cdots - a_n\\ \det\left(z\mathbf{I} - \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ a_2 & & \mathbf{I}_{n-1} & \\ \vdots & & & \\ a_n & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\right) &= z^n - a_1 z^{n-1} - \cdots - a_n.\end{aligned}$$

Teorema: Se $\mathbf{T}$ é não singular e $\mathbf{F} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$, então

$$\det(z\mathbf{I} - \mathbf{F}) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}).$$

2.4 Estabilidade

2.4.1 Caso Contínuo

Definição de Estabilidade: O sistema, de ordem n,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u\\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + Du,\end{aligned}$$

é estável se para toda entrada limitada, a saída é limitada.
Critério de Estabilidade: A condição para que o sistema, de ordem n,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u\\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + Du,\end{aligned}$$

seja estável é que todas as raízes da equação característica,

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0,$$

tenham parte real negativa.
Teorema de Estabilidade: Seja o sistema, de ordem n,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Se todas as raízes da equação característica,

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0,$$

tiverem parte real negativa, então

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0},$$

para toda condição inicial $\mathbf{x}(0)$.

2.4.2 Caso Discreto

Definição de Estabilidade: O sistema, de ordem n,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k)\\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + Du(k),\end{aligned}$$

é estável se para toda entrada limitada, a saída é limitada.

Critério de Estabilidade: A condição para que o sistema, de ordem n,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k)\\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + Du(k),\end{aligned}$$

seja estável é que todas as raízes da equação característica,

$$\det(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}) = 0,$$

estejam dentro do círculo unitário.

Teorema de Estabilidade: Seja o sistema, de ordem n,

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k).$$

Se todas as raízes da equação característica,

$$\det(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}) = 0,$$

estiverem dentro do círculo unitário, então

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}(k) = \mathbf{0},$$

para toda condição inicial $\mathbf{x}(0)$.

2.5 Teorema de Kalman

Este teorema relaciona controlabilidade e observabilidade com função de transferência.

2.5.1 Caso Contínuo

Teorema: Seja

$$f(s) = \frac{\mathbf{C}\mathtt{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B} + \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})D}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

a função de transferência do sistema

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u\\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + Du.\end{aligned}$$

O sistema

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u\\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + Du\end{aligned}$$

é controlável e observável se e somente se os polinômios $N(s)$ e $D(s)$ não têm raízes comuns.

2.5.2 Caso Discreto

Teorema: Seja

$$f(z) = \frac{\mathbf{C}\mathtt{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})\mathbf{\Gamma} + \det(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})D}{\det(z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

a função de transferência do sistema

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k)\\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + Du(k).\end{aligned}$$

O sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{\Phi x}(k) + \mathbf{\Gamma} u(k) \\ y(k) &= \mathbf{Cx}(k) + Du(k) \end{aligned}$$

é controlável e observável se e somente se os polinômios $N(z)$ e $D(z)$ não têm raízes comuns.

Uma implicação prática importante deste teorema é que a Forma Canônica de Controlabilidade e a Forma Canônica de Observabilidade, obtidas a partir de uma função de transferência, são equações de estado controláveis e observáveis.

2.6 Transformação de Similaridade

2.6.1 Caso Contínuo

Considere o sistema contínuo, de ordem n,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{Cx} + Du, \end{aligned}$$

e uma matriz $n \times n$, não singular $\mathbf{T}$. Se definirmos

$$\mathbf{x} = \mathbf{Tz},$$

então podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{-1}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Ax} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}u \\ \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{ATz} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{CTz} + Du, \end{aligned}$$

o que permite escrever

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{Fz} + \mathbf{G}u \\ y &= \mathbf{Hz} + Du, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} \\ \mathbf{G} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{CT}. \end{aligned}$$

Teorema:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\mathbf{x} &= \mathbf{T}\mathcal{C}_\mathbf{z} \\ \mathcal{O}_\mathbf{z} &= \mathcal{O}_\mathbf{x}\mathbf{T}. \end{aligned}$$

Prova: Observe que

$$[\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}]^i = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^i\mathbf{T},$$

onde i é um número inteiro. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\mathbf{x} &= \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{(n-1)}\mathbf{B} \end{array}\right] \\ &= \mathbf{TT}^{-1}\left[\begin{array}{cccc} \mathbf{B} & \mathbf{ATT}^{-1}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{(n-1)}\mathbf{TT}^{-1}\mathbf{B} \end{array}\right] \\ &= \mathbf{T}\left[\begin{array}{cccc} \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} & \mathbf{T}^{-1}\mathbf{ATT}^{-1}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^{(n-1)}\mathbf{TT}^{-1}\mathbf{B} \end{array}\right] \\ &= \mathbf{T}\left[\begin{array}{cccc} \mathbf{G} & \mathbf{T}^{-1}\mathbf{ATG} & \cdots & \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^{(n-1)}\mathbf{TG} \end{array}\right] \\ &= \mathbf{T}\left[\begin{array}{cccc} \mathbf{G} & \mathbf{T}^{-1}\mathbf{ATG} & \cdots & (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT})^{(n-1)}\mathbf{G} \end{array}\right] \\ &= \mathbf{T}\left[\begin{array}{cccc} \mathbf{G} & \mathbf{FG} & \cdots & \mathbf{F}^{(n-1)}\mathbf{G} \end{array}\right] \\ &= \mathbf{T}\mathcal{C}_\mathbf{z} \end{aligned}$$

De maneira similar, pode-se provar a outra parte do teorema.

2.6.2 Caso Discreto

Considere o sistema discreto, de ordem n,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{\Phi x}(k) + \mathbf{\Gamma} u(k) \\ y(k) &= \mathbf{C x}(k) + D u(k), \end{aligned}$$

e uma matriz $n \times n$, não singular $\mathbf{T}$. Se definirmos

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{T z}(k),$$

então podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(k+1) &= \mathbf{F z}(k) + \mathbf{G} u(k) \\ y(k) &= \mathbf{H z}(k) + D u(k), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A T} \\ \mathbf{G} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{C T}. \end{aligned}$$

Teorema:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathbf{x}} &= \mathbf{T}\mathcal{C}_{\mathbf{z}} \\ \mathcal{O}_{\mathbf{z}} &= \mathcal{O}_{\mathbf{x}}\mathbf{T}. \end{aligned}$$

2.7 Forma Canônica de Controlabilidade

Todo sistema controlável, seja discreto ou contínuo, pode ser posto na forma canônica de controlabilidade. Dois métodos serão apresentados.

2.7.1 Caso Contínuo

Seja o sistema, de ordem n,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A x} + \mathbf{B} u \\ y &= \mathbf{C x} + D u, \end{aligned}$$

controlável. Existe uma matriz, $n \times n$, não singular $\mathbf{T}$, tal que

$$\mathbf{x} = \mathbf{T z},$$

e

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{F z} + \mathbf{G} u \\ y &= \mathbf{H z} + D u, \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A T} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & & & 0 \\ & \mathbf{I}_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$\mathbf{G} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dois métodos serão usados para a determinação de $\mathbf{T}$:
Primeiro Método:

1. de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, calcular a matriz de controlabilidade

$$\mathcal{C}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{(n-1)}\mathbf{B} \end{bmatrix};$$

2. determinar a última linha, $\mathbf{r}_n$ de sua inversa

$$\mathcal{C}_{\mathbf{x}}{}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix};$$

3. a inversa de $\mathbf{T}$ é

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_n\mathbf{A}^{(n-1)} \\ \mathbf{r}_n\mathbf{A}^{(n-2)} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix}.$$

Segundo Método:

1. calcular o polinômio característico associado à $\mathbf{A}$

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n - a_1 s^{n-1} - \cdots - a_n;$$

2. calcular

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & & & 0 \\ & \mathbf{I}_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix};$$

3. de $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$, calcular a matriz de controlabilidade

$$\mathcal{C}_{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{FG} & \cdots & \mathbf{F}^{(n-1)}\mathbf{G} \end{bmatrix};$$

4. de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, calcular a matriz de controlabilidade

$$\mathcal{C}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{(n-1)}\mathbf{B} \end{bmatrix};$$

5. a inversa de $\mathbf{T}$ é

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathcal{C}_{\mathbf{z}}\mathcal{C}_{\mathbf{x}}{}^{-1}.$$

2.7.2 Caso Discreto

Seja o sistema, de ordem n,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + Du(k), \end{aligned}$$

controlável. Existe uma matriz, $n \times n$, não singular $\mathbf{T}$, tal que

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{T}\mathbf{z}(k),$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(k+1) &= \mathbf{F}\mathbf{z}(k) + \mathbf{G}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{H}\mathbf{z}(k) + Du(k), \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & & & 0 \\ & \mathbf{I}_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$\mathbf{G} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dois métodos serão usados para a determinação de $\mathbf{T}$:
Primeiro Método:

1. de $\mathbf{\Phi}$ e $\mathbf{\Gamma}$, calcular a matriz de controlabilidade

$$\mathcal{C}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} & \mathbf{\Phi\Gamma} & \cdots & \mathbf{\Phi}^{(n-1)}\mathbf{\Gamma} \end{bmatrix};$$

2. determinar a última linha, $\mathbf{r}_n$ de sua inversa

$$\mathcal{C}_{\mathbf{x}}{}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix};$$

3. a inversa de $\mathbf{T}$ é

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_n\mathbf{\Phi}^{(n-1)} \\ \mathbf{r}_n\mathbf{\Phi}^{(n-2)} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix}.$$

Segundo Método:

1. calcular o polinômio característico associado à $\mathbf{\Phi}$

$$\det(zI - \mathbf{\Phi}) = z^n - a_1 z^{n-1} - \cdots - a_n;$$

2. calcular

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & & & 0 \\ & \mathbf{I}_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix};$$

3. de $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$, calcular a matriz de controlabilidade

$$\mathcal{C}_{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{FG} & \cdots & \mathbf{F}^{(n-1)}\mathbf{G} \end{bmatrix};$$

4. de $\mathbf{\Phi}$ e $\mathbf{\Gamma}$, calcular a matriz de controlabilidade

$$\mathcal{C}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} & \mathbf{\Phi\Gamma} & \cdots & \mathbf{\Phi}^{(n-1)}\mathbf{\Gamma} \end{bmatrix};$$

5. a inversa de $\mathbf{T}$ é

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathcal{C}_{\mathbf{z}}\mathcal{C}_{\mathbf{x}}{}^{-1}.$$

2.8 Forma Canônica de Observabilidade

Todo sistema observável, seja discreto ou contínuo, pode ser posto na forma canônica de observabilidade. Dois métodos serão apresentados.

2.8.1 Caso Contínuo

Seja o sistema observável, de ordem n,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + Du.\end{aligned}$$

Existe uma matriz, $n \times n$, não singular $\mathbf{T}$, tal que

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z},$$

e

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{F}\mathbf{z} + \mathbf{G}u \\ y &= \mathbf{H}\mathbf{z} + Du,\end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ a_2 & & \mathbf{I}_{n-1} & \\ \vdots & & & \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$\mathbf{H} = \mathbf{C}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Dois métodos serão usados para a determinação de $\mathbf{T}$:
Primeiro Método:

1. de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{C}$, calcular a matriz de observabilidade

$$\mathcal{O}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{(n-1)} \end{bmatrix};$$

2. determinar a última coluna, $\mathbf{r}_n$, de sua inversa

$$\mathcal{O}_{\mathbf{x}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \cdots & \mathbf{r}_n \end{bmatrix};$$

3. a matriz $\mathbf{T}$ é

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(n-1)}\mathbf{r}_n & \mathbf{A}^{(n-2)}\mathbf{r}_n & \cdots & \mathbf{r}_n \end{bmatrix}.$$

Segundo Método:

1. calcular o polinômio característico associado à $\mathbf{A}$

$$\det(sI - \mathbf{A}) = s^n - a_1 s^{n-1} - \cdots - a_n;$$

2. calcular

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ a_2 & & \mathbf{I}_{n-1} & \\ \vdots & & & \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix};$$

3. de $\mathbf{F}$ e $\mathbf{H}$, calcular a matriz de observabilidade

$$\mathcal{O}_{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{HF} \\ \vdots \\ \mathbf{HF}^{(n-1)} \end{bmatrix};$$

4. de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{C}$, calcular a matriz de observabilidade

$$\mathcal{O}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{(n-1)} \end{bmatrix};$$

5. a matriz $\mathbf{T}$ é

$$\mathbf{T} = \mathcal{O}_{\mathbf{x}}{}^{-1}\mathcal{O}_{\mathbf{z}}.$$

2.8.2 Caso Discreto

Seja o sistema observável, de ordem n,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{\Phi x}(k) + \mathbf{\Gamma} u(k) \\ y(k) &= \mathbf{Cx}(k) + Du(k). \end{aligned}$$

Existe uma matriz, $n \times n$, não singular $\mathbf{T}$, tal que

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{Tz}(k),$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(k+1) &= \mathbf{Fz}(k) + \mathbf{G}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{Hz}(k) + Du(k), \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ a_2 & & \mathbf{I}_{n-1} & \\ \vdots & & & \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$\mathbf{H} = \mathbf{CT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Dois métodos serão usados para a determinação de $\mathbf{T}$:
Primeiro Método:

1. de $\mathbf{\Phi}$ e $\mathbf{C}$, calcular a matriz de observabilidade

$$\mathcal{O}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C\Phi} \\ \vdots \\ \mathbf{C\Phi}^{(n-1)} \end{bmatrix};$$

2. determinar a última coluna, $\mathbf{r}_n$, de sua inversa

$$\mathcal{O}_{\mathbf{x}}{}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \cdots & \mathbf{r}_n \end{bmatrix};$$

3. a matriz $\mathbf{T}$ é

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}^{(n-1)}\mathbf{r}_n & \mathbf{\Phi}^{(n-2)}\mathbf{r}_n & \cdots & \mathbf{r}_n \end{bmatrix}.$$

Segundo Método:

1. calcular o polinômio característico associado à $\mathbf{\Phi}$

$$\det(zI - \mathbf{\Phi}) = z^n - a_1 z^{n-1} - \cdots - a_n;$$

2. calcular

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ a_2 & & \mathbf{I}_{n-1} & \\ \vdots & & & \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix};$$

3. de $\mathbf{F}$ e $\mathbf{H}$, calcular a matriz de observabilidade

$$\mathcal{O}_{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{HF} \\ \vdots \\ \mathbf{HF}^{(n-1)} \end{bmatrix};$$

4. de $\mathbf{\Phi}$ e $\mathbf{C}$, calcular a matriz de observabilidade

$$\mathcal{O}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C\Phi} \\ \vdots \\ \mathbf{C\Phi}^{(n-1)} \end{bmatrix};$$

5. a matriz $\mathbf{T}$ é

$$\mathbf{T} = \mathcal{O}_{\mathbf{x}}^{-1}\mathcal{O}_{\mathbf{z}}.$$

2.9 Exemplo

Seja o sistema

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -6 & -8 & 0,8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Encontrar:
a) Verificar se o sistema é controlável;
b) Encontrar a forma canônica de controlabilidade pelo primeiro método;
c) Verificar se o sistema é observável;
d) Encontrar a forma canônica de observabilidade pelo primeiro método;
e) Achar o polinômio característico diretamente e pelas propriedades;
f) Encontrar a forma canônica de observabilidade pelo segundo método;
g) Achar a função de transferência.

Solução:
a) Do sistema podemos escrever que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -6 & -8 & 0,8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mas

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} -6 & -8 & 0,8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -8 & 0,8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 48 & -4,8 \\ -6 & -8 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -6 & -8 & 0,8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 28 & 48 & -4,8 \\ -6 & -8 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4,8 \\ 0,8 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\mathcal{C}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,8 & -4,8 \\ 0 & 0 & 0,8 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\det(\mathcal{C}_{\mathbf{x}}) = 0,64 \neq 0.$$

Portanto, o sistema é controlável.
b) *Primeiro passo*: Vimos que

$$\mathcal{C}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0,8 & -4,8 \\ 0 & 0 & 0,8 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Segundo passo:

$$\mathcal{C}_{\mathbf{x}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1,25 & 7,5 & 0 \\ 0 & 1,25 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix}.$$

Terceiro passo:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1,25 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_3\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1,25 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_3\mathbf{A}^2 &= \begin{bmatrix} -7,5 & -10 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A matriz $\mathbf{T}^{-1}$ é

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_3\mathbf{A}^2 \\ \mathbf{r}_3\mathbf{A} \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7,5 & -10 & 1 \\ 1,25 & 0 & 0 \\ 0 & 1,25 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Finalmente podemos escrever que

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -7,5 & -10 & 1 \\ 1,25 & 0 & 0 \\ 0 & 1,25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -8 & 0,8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6 & -8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -7,5 & -10 & 1 \\ 1,25 & 0 & 0 \\ 0 & 1,25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \mathbf{C}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1,6 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

c) Podemos escrever que

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{CA} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{CA}^2 = \begin{bmatrix} -12 & -16 & 1,6 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\mathcal{O}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -12 & -16 & 1,6 \end{bmatrix}$$

e

$$\det(\mathcal{O}_{\mathbf{x}}) = -6,4 \neq 0.$$

Assim, o sistema é observável.

d) *Primeiro passo*:

$$\mathcal{O}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -12 & -16 & 1,6 \end{bmatrix}$$

Segundo passo:

$$\mathcal{O}_{\mathbf{x}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 5 & 3,75 & 0,625 \end{bmatrix}$$

Terceiro passo:

$$\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,625 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^2\mathbf{r}_3 & \mathbf{A}\mathbf{r}_3 & \mathbf{r}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,625 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1,6 \end{bmatrix}.$$

Podemos finalmente escrever

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{C}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e) Pelo método direto

$$\begin{aligned} s\mathbf{I} - \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & -8 & 0,8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s+6 & 8 & -0,8 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^3 + 6s^2 + 8s.$$

Pelas propriedades

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -8 & 0,8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, por inspeção

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -6 & -8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = 0$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Então

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{F})\det(s\mathbf{I} - \mathbf{G}) \\ &= \det(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} -6 & -8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})s \\ &= s^3 + 6s^2 + 8s. \end{aligned}$$

f) *Primeiro passo*:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^3 + 6s^2 + 8s + 0$$

Segundo passo:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Terceiro passo:

$$\mathcal{O}_{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{HF} \\ \mathbf{HF}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \\ 28 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

Quarto passo:

$$\mathcal{O}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -12 & -16 & 1,6 \end{bmatrix}$$

Quinto passo:

$$\mathcal{O}_{\mathbf{x}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 5 & 3,75 & 0,625 \end{bmatrix}$$

Quinto passo:

$$\mathbf{T} = \mathcal{O}_{\mathbf{x}}{}^{-1}\mathcal{O}_{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} -3 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,625 \end{bmatrix}.$$

g)

$$f(s) = \frac{\mathbf{C}\mathtt{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= s^3 + 6s^2 + 8s \\ &= s(s^2 + 6s + 8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathtt{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \gamma_{31} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \gamma_{32} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \gamma_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\mathtt{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \gamma_{31} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \gamma_{32} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \gamma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 2\gamma_{32} \end{aligned}$$

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s+6 & 8 & -0,8 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

Mas,

$$\gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{M}_{ij})$$

e

$$\begin{aligned}
\gamma_{32} &= (-1)^{3+2} \det(\mathbf{M}_{32}) \\
&= -\det(\mathbf{M}_{32}) \\
&= -\det(\begin{bmatrix} s+6 & -0,8 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}) = 0,8
\end{aligned}$$

$$\mathtt{Cadj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B} = 2\gamma_{32} = 1,6$$

e finalmente

$$f(s) = \frac{1,6}{s(s^2 + 6s + 8)}.$$

2.10 Exercícios

1. Seja o sistema

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\
y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k).
\end{aligned}$$

a) Determinar a função de transferência;
b) Verificar se o sistema é estável;
c) Verificar se o sistema é controlável;
d) Determinar a Forma Canônica de Controlabilidade pelo primeiro
método;
e) Determinar a Forma Canônica de Controlabilidade pelo segundo
método;
f) Determinar a função de transferência a partir da Forma Canônica de Controlabilidade.

2. Seja o sistema

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.
\end{aligned}$$

a) Verificar se o sistema é observável;
b) Determinar a Forma Canônica de Observabilidade pelo primeiro método;
c) Determinar a Forma Canônica de Observabilidade pelo segundo
método;
d) Determinar a função de transferência a partir da Forma Canônica de Observabilidade.

2.11 Respostas dos Exercícios

1.

a)

$$f(z) = \frac{2z - 6}{z^3 - 7z^2 + 13z - 12}.$$

b) sistema instável, pois tem um pólo igual a $4,819$ que está fora do círculo unitário.

c) sistema controlável, pois $\det(\mathcal{C}_{\mathbf{x}}) = -4 \neq 0$.

d)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 7 & -13 & 12 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k). \end{aligned}$$

e) resposta igual a do item d).

f) resposta igual a do item a).

2.

a) sistema observável, pois $\det(\mathcal{O}_{\mathbf{x}}) = 18 \neq 0$.

b)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -13 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \end{aligned}$$

c) resposta igual a do item b).

d)

$$f(s) = \frac{2s - 6}{s^3 - 7s^2 + 13s - 12}.$$