Capítulo 3

Controle Modal e Observador de Estado - Estabilizador 1

O principal objetivo deste capítulo é definir o conceito de observador de estado e de controle modal, como pré-requisitos de projeto de estabilizadores.

3.1 Princípio de Controle Modal

O objetivo de Controle Modal é encontrar um esquema de realimentação que faça o estado do sistema a ser controlado convergir para zero em regime permanente, mesmo que o sistema em malha aberta seja instável. A realimentação é feita através do vetor de estado, e todos os polos do sistema realimentado são arbitrariamente especificados ou escolhidos. Esta estratégia de controle só é possível ser implementada se o sistema a ser controlado for controlável. Daí a importância do conceito de controlabilidade.

3.1.1 Caso Contínuo

Seja o sistema controlável contínuo, de ordem n,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u.$$

Podemos definir um controlador da seguinte forma

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x},$$

onde o vetor $\mathbf{K}$, de dimensão $[1 \times n]$, é convenientemente calculado. Assim, podemos escrever que

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}.$$

Escolhendo-se $\mathbf{K}$ de tal forma que as raízes da equação característica,

$$\det\left(s\mathbf{I} - [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}]\right) = 0,$$

tenham parte real negativa, garante-se que

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0,$$

assegurando que, em regime permanente, $\mathbf{x}$ converge para zero.

3.1.2 Caso Discreto

Seja o sistema controlável discreto, de ordem n,

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k).$$

Podemos definir um controlador da seguinte forma

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k),$$

onde o vetor $\mathbf{K}$, de dimensão $[1 \times n]$, é convenientemente calculado. Podemos escrever que

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma K})\mathbf{x}(k).$$

Escolhendo-se $\mathbf{K}$ de tal forma que as raízes da equação característica,

$$\det\left(z\mathbf{I} - [\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma K}]\right) = 0,$$

estejam dentro do círculo unitário, garante-se que

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}(k) = 0,$$

assegurando que, em regime permanente, a seqüência $\mathbf{x}(k)$ converge para zero.

3.2 Projeto de Controle Modal

A concepção de projeto é totalmente diferente da do controle clássico. Aqui, escolhem-se todas as raízes desejadas para o polinômio característico, ou seja, escolhe-se o polinômio característico desejado para o sistema realimentado; e, a partir deste, calcula-se a matriz $\mathbf{K}$.

3.2.1 Caso Contínuo

Vamos descrever o método nos seguintes passos:

Primeiro Passo:

Dado o sistema contínuo controlável de ordem n,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u,$$

podemos calcular uma transformação de similaridade $\mathbf{T}$, tal que

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z},$$

e

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}\mathbf{z} + \mathbf{G}u,$$

onde

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & & & 0 \\ & \mathbf{I}_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Segundo Passo:

Vamos especificar, no semiplano esquerdo, a localização desejada para os polos em malha fechada, denotados por $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. A seguir, vamos calcular o polinômio característico desejado para o sistema em malha fechada

$$s^n - \alpha_1 s^{(n-1)} - \cdots - \alpha_n = (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n).$$

Terceiro Passo:

Podemos, agora, determinar o controlador para o sistema na forma canônica de controlabilidade, definindo a matriz $\mathbf{K_z}$ por

$$\mathbf{K_z} = \begin{bmatrix} a_1 - \alpha_1 & a_2 - \alpha_2 & \cdots & a_n - \alpha_n \end{bmatrix},$$

e o controlador por

$$u = -\mathbf{K_z}\mathbf{z}.$$

Observe que

$$(\mathbf{F}-\mathbf{G}\mathbf{K_z}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ & & & 0 \\ & \mathbf{I}_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Podemos escrever que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= (\mathbf{F}-\mathbf{G}\mathbf{K}_z)\mathbf{z} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ & & & 0 \\ & \mathbf{I}_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}\mathbf{z}, \end{aligned}$$

o que comprova que foi estabelecido o polinômio característico especificado, pois

$$\det\left(sI - \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ & & & 0 \\ & I_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}\right) = s^n - \alpha_1 s^{n-1} - \cdots - \alpha_n.$$

Quarto Passo:
A matriz **K** é dada por

$$\mathbf{K} = \mathbf{K_z}\mathbf{T}^{-1}.$$

Com a definição acima e o sistema transformado, podemos voltar ao sistema original

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{T}(\mathbf{F}-\mathbf{G}\mathbf{K_z})\mathbf{z} \\ &= \mathbf{T}(\mathbf{F}-\mathbf{G}\mathbf{K_z})\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{z} \\ &= (\mathbf{T}\mathbf{F}\mathbf{T}^{-1})\mathbf{T}\mathbf{z} - (\mathbf{T}\mathbf{G})(\mathbf{K_z}\mathbf{T}^{-1})\mathbf{T}\mathbf{z}, \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u. \end{aligned}$$

3.2.2 Caso Discreto

Vamos descrever o método nos seguintes passos:
Primeiro Passo:
Dado o sistema controlável discreto de ordem n,

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k),$$

podemos calcular uma transformação de similaridade **T**, tal que

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{T}\mathbf{z}(k),$$

e

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{z}(k) + \mathbf{G}u(k),$$

onde

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{\Phi}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & & & 0 \\ & \mathbf{I}_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{\Gamma} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Segundo Passo:
Vamos especificar, dentro do círculo unitário, a localização desejada para os polos em malha fechada, denotados por $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. A seguir, vamos calcular o polinômio característico desejado para o sistema em malha fechada

$$z^n - \alpha_1 z^{(n-1)} - \cdots - \alpha_n = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_n).$$

Terceiro Passo:
Podemos, agora, determinar o controlador para o sistema na forma canônica de controlabilidade, definindo a matriz $\mathbf{K_z}$ por

$$\mathbf{K_z} = \left[\begin{array}{cccc} a_1 - \alpha_1 & a_2 - \alpha_2 & \cdots & a_n - \alpha_n \end{array} \right],$$

e o controlador por

$$u(k) = -\mathbf{K_z z}(k).$$

Observe que

$$(\mathbf{F} - \mathbf{GK_z}) = \left[\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ & & & 0 \\ & \mathbf{I}_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{array} \right].$$

Podemos escrever que

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(k+1) &= (\mathbf{F} - \mathbf{GK_z})\mathbf{z}(k) \\ &= \left[\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ & & & 0 \\ & \mathbf{I}_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{array} \right] \mathbf{z}(k), \end{aligned}$$

o que comprova que foi estabelecido o polinômio característico especificado, pois

$$\det \left(zI - \left[\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ & & & 0 \\ & I_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{array} \right] \right) = z^n - \alpha_1 z^{n-1} - \cdots - \alpha_n.$$

Quarto Passo:
A matriz $\mathbf{K}$ é dada por

$$\mathbf{K} = \mathbf{K_z T}^{-1}.$$

Com a definição acima e o sistema transformado, podemos voltar ao sistema original

$$\begin{aligned} \mathbf{Tz}(k+1) &= \mathbf{T}(\mathbf{F} - \mathbf{GK_z})\mathbf{z}(k) \\ &= \mathbf{T}(\mathbf{F} - \mathbf{GK_z})\mathbf{T}^{-1}\mathbf{Tz}(k) \\ &= (\mathbf{TFT}^{-1})\mathbf{Tz}(k) - (\mathbf{TG})(\mathbf{K_z T}^{-1})\mathbf{Tz}(k), \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{\Phi x}(k) - \mathbf{\Gamma K x}(k) \\ &= \mathbf{\Phi x}(k) + \mathbf{\Gamma} u(k). \end{aligned}$$

3.3 Princípio de Observador de Estado

Vimos que para se implementar o esquema de controle modal, é necessário se ter acesso ao vetor de estado. A necessidade de observador de estado surgiu da impossibilidade de se medir os estados do sistema a ser controlado, em decorrência de custo muito elevado ou de impossibilidade técnica.

Com sempre é possível medir a entrada e a saída do sistema a ser controlado, pode-se estabelecer um esquema que permita indiretamente estimar (observar) as suas variáveis de estado, desde que o mesmo seja observável. Daí a importância do conceito de observabilidade. Com o estado observado, pode-se implementar um controle modal como se o estado do sistema a ser controlado fosse diretamente medido. Observadores de estado podem ser pensados como medidores do vetor de estado através dos sinais de entrada e de saída.

3.3.1 Caso Contínuo

Seja o sistema contínuo observável, de ordem n,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + Du.\end{aligned}$$

Podemos definir um observador da seguinte forma

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(y - Du),$$

onde o vetor $\mathbf{L}$, de dimensão $[n \times 1]$, é convenientemente calculado.

Definindo o vetor erro de estado, $\tilde{\mathbf{x}}$, por

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}},$$

podemos escrever

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}.$$

Escolhendo-se $\mathbf{L}$ de tal forma que as raízes da equação característica,

$$(s\mathbf{I} - [\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}]) = 0,$$

tenham parte real negativa, garante-se que

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{\mathbf{x}}(t) = 0,$$

assegurando que em regime permanente $\hat{\mathbf{x}}$ é $\mathbf{x}$.

3.3.2 Caso Discreto

Seja o sistema discreto, de ordem n,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + Du(k),\end{aligned}$$

observável. Podemos definir um observador da seguinte forma

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) + \mathbf{L}(y(k) - Du(k)),$$

onde o vetor $\mathbf{L}$, de dimensão $[n \times 1]$, é convenientemente calculado.

Definindo o vetor erro de estado, $\tilde{\mathbf{x}}(k)$, por

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k),$$

podemos escrever

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{L}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}(k).$$

Escolhendo-se $\mathbf{L}$ de tal forma que as raízes da equação característica,

$$(z\mathbf{I} - [\mathbf{\Phi} - \mathbf{L}\mathbf{C}]) = 0,$$

estejam dentro do círculo unitário, garante-se que

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{\mathbf{x}}(k) = 0,$$

assegurando que em regime permanente $\hat{\mathbf{x}}(k)$ é $\mathbf{x}(k)$.

3.4 Projeto de Observador de Estado

Quando o processo a ser controlado é observável, é possível arbitrariamente escolher o polinômio característico associado ao observador.

3.4.1 Caso Contínuo

Vamos descrever o método nos seguintes passos:

Primeiro Passo:
Dado o sistema contínuo observável, de ordem n,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + Du, \end{aligned}$$

podemos calcular uma transformação de similaridade $\mathbf{T}$, tal que

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z},$$

e

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{F}\mathbf{z} + \mathbf{G}u \\ y &= \mathbf{H}\mathbf{z} + Du, \end{aligned}$$

onde

$$\text{FCO:}\left\{ \begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a_1 & & \mathbf{I}_{n-1} & \\ a_2 & & & \\ \vdots & & & \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{C}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \right.$$

e

Segundo Passo:
Vamos especificar, no semiplano esquerdo, a localização desejada para os polos do estimador, denotados por $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. A seguir, vamos calcular o polinômio característico desejado

$$s^n - \alpha_1^{(n-1)} - \cdots - \alpha_n = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n).$$

Terceiro Passo:
Podemos, agora, determinar o observador para o sistema na forma canônica de observabilidade, definindo o vetor $\mathbf{L_z}$ por

$$\mathbf{L_z} = \begin{bmatrix} a_1 - \alpha_1 \\ a_2 - \alpha_2 \\ \vdots \\ a_n - \alpha_n \end{bmatrix},$$

e o observador por

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = (\mathbf{F} - \mathbf{L_z}\mathbf{H})\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{G}u + \mathbf{L_z}(y - Du).$$

Observe que

$$(\mathbf{F} - \mathbf{L_z}\mathbf{H}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & \mathbf{I}_{n-1} & \\ \alpha_2 & & & \\ \vdots & & & \\ \alpha_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Definindo o vetor erro de estado, $\tilde{\mathbf{z}}$, por

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}},$$

podemos escrever

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & I_{n-1} & \\ \alpha_2 & & & \\ \vdots & & & \\ \alpha_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}},$$

o que comprova que foi estabelecido o polinômio característico especificado

$$\det\left(sI - \begin{bmatrix} \alpha_1 & & I_{n-1} & \\ \alpha_2 & & & \\ \vdots & & & \\ \alpha_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\right) = s^n - \alpha_1 s^{n-1} - \cdots - \alpha_n.$$

Quarto Passo:
Vamos retornar agora ao sistema original. Podemos escrever que

$$\mathbf{T}\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{T}(\mathbf{F} - \mathbf{L_z H})\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{TG}u + \mathbf{TL_z}(y - Du).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\dot{\hat{\mathbf{z}}} &= \mathbf{T}(\mathbf{F} - \mathbf{L_z H})\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{TG}u + \mathbf{TL_z}(y - Du) \\ &= (\mathbf{TFT}^{-1} - \mathbf{TL_z CT}^{-1})\mathbf{T}\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{B}u + \mathbf{TL_z}(y - Du) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{TL_z H})\mathbf{T}\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{B}u + \mathbf{TL_z}(y - Du). \end{aligned}$$

Definindo-se

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{T}\hat{\mathbf{z}}, \\ \mathbf{L} &= \mathbf{TL_z}, \end{aligned}$$

podemos escrever o obsevador

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(y - Du).$$

3.4.2 Caso Discreto

Vamos descrever o método nos seguintes passos:
Primeiro Passo:
Dado o sistema discreto observável, de ordem n,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{\Phi x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{Cx}(k) + Du(k), \end{aligned}$$

podemos calcular uma transformação de similaridade $\mathbf{T}$, tal que

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{Tz}k),$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{z}k+1) &= \mathbf{Fz}(k) + \mathbf{G}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{Hz}(k) + Du(k), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{\Phi T} = \begin{bmatrix} a_1 & & \mathbf{I}_{n-1} & \\ a_2 & & & \\ \vdots & & & \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{\Gamma}, \end{aligned}$$

e

$$\mathbf{H} = \mathbf{CT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Segundo Passo:
Vamos especificar, dentro do círculo unitário, a localização desejada para os polos do estimador, denotados por $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. A seguir, vamos calcular o polinômio característico desejado

$$z^n - \alpha_1^{(n-1)} - \cdots - \alpha_n = (z - \lambda_1)(z - \lambda_1)\cdots(z - \lambda_n).$$

Terceiro Passo:
Podemos, agora, determinar o observador para o sistema na forma canônica de observabilidade, definindo o vetor $\mathbf{L_z}$ por

$$\mathbf{L_z} = \begin{bmatrix} a_1 - \alpha_1 \\ a_2 - \alpha_2 \\ \vdots \\ a_n - \alpha_n \end{bmatrix},$$

e o observador por

$$\hat{\mathbf{z}}(k+1) = (\mathbf{F} - \mathbf{L_z H})\hat{\mathbf{z}}(k) + \mathbf{G}u(k) + \mathbf{L_z}(y(k) - Du(k)).$$

Quarto Passo:
Vamos retornar agora ao sistema original. Podemos escrever que

$$\mathbf{T}\hat{\mathbf{z}}(k+1) = \mathbf{T}(\mathbf{F} - \mathbf{L_z H})\hat{\mathbf{z}}(k) + \mathbf{TG}u(k) + \mathbf{TL_z}(y(k) - Du(k)).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\hat{\mathbf{z}}(k+1) &= \mathbf{T}(\mathbf{F} - \mathbf{L_z H})\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\hat{\mathbf{z}}(k) + \mathbf{TG}u(k) + \mathbf{TL_z}(y - Du(k)) \\ &= (\mathbf{TFT}^{-1} - \mathbf{TL_z HT}^{-1})\mathbf{T}\hat{\mathbf{z}}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) + \mathbf{TL_z}(y(k) - Du(k)) \\ &= (\mathbf{\Phi} - \mathbf{TL_z H})\mathbf{T}\hat{\mathbf{z}}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) + \mathbf{TL_z}(y(k) - Du(k)). \end{aligned}$$

Definindo-se

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k) &= \mathbf{T}\hat{\mathbf{z}}(k), \\ \mathbf{L} &= \mathbf{TL_z}, \end{aligned}$$

podemos escrever o obsevador

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) + \mathbf{L}(y(k) - Du(k)).$$

3.5 Controle Modal com Observador de Estado - Estabilizador

Quando o estado não é mensurável, torna-se necessário realizar um controle modal com estados observados. Mostraremos que este esquema pode ser realizado para todo sistema controlável e observável. Este esquema define um estabilizador.

3.5.1 Caso Contínuo

Dado o sistema contínuo controlável e observável, de ordem n,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{Cx} + Du, \end{aligned}$$

podemos projetar o observador

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(y - Du),$$

e definir como lei de controle

$$u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}.$$

Definindo o erro de estado por

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}},$$

podemos escrever que

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix}.$$

Conseqüentemente,

$$\det\left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}-\mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}-\mathbf{LC} \end{bmatrix}\right) = \det(s\mathbf{I} - [\mathbf{A}-\mathbf{BK}]) \times \det(s\mathbf{I} - [\mathbf{A}-\mathbf{LC}]),$$

o que prova que os pólos do sistema combinado são os mesmos da união dos pólos especificados para o observador e com os pólos especificados para o controlador.

Se os pólos do observador e os pólos do controlador tiverem parte real negativa, então pelo Teorema da Estabilidade

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \tilde{\mathbf{x}}(t) &= 0 \\ \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) &= 0 \\ \lim_{t\to\infty} y(t) &= 0. \end{aligned}$$

Para processos com transferência direta ($D \neq 0$)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{Cx} + Du, \end{aligned}$$

o estabilizador pode ser agora definido como

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= (\mathbf{A}-\mathbf{LC}-\mathbf{BK}+\mathbf{L}D\mathbf{K})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}y \\ u &= -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

A Figura 3.1 mostra este tipo de estabilizador.

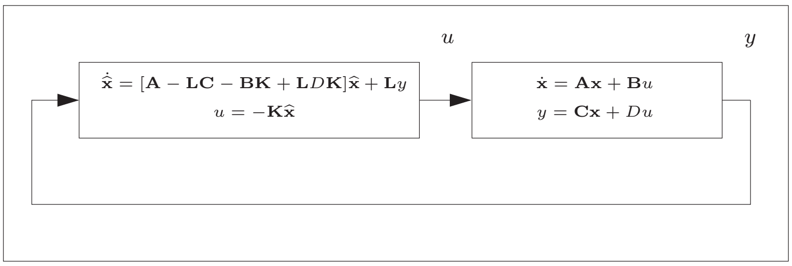

Figura 3.1: Estabilizador para processos com transferência direta.

Para processos sem transferência direta

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{Cx}, \end{aligned}$$

o estabilizador fica definido como

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= (\mathbf{A}-\mathbf{LC}-\mathbf{BK})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}y \\ u &= -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

A Figura 3.2 mostra este tipo de estabilizador.

3.5.2 Caso Discreto

Dado o sistema discreto controlável e observável, de ordem n,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) \\ y &= \mathbf{Cx}(k) + Du(k), \end{aligned}$$

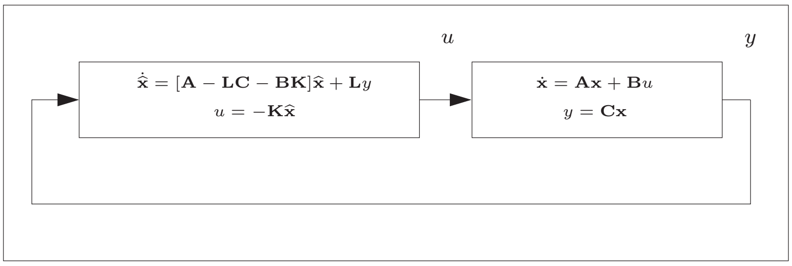

Figura 3.2: Estabilizador para processos sem transferência direta.

podemos projetar o observador

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) + \mathbf{L}(y(k) - Du(k)),$$

e definir como lei de controle

$$u(k) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k).$$

Definindo o erro de estado por

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k),$$

podemos escrever que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma K} & \mathbf{\Gamma K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Phi} - \mathbf{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix}.$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \det\left(z\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma K} & \mathbf{\Gamma K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Phi} - \mathbf{LC} \end{bmatrix}\right) &= \det(z\mathbf{I} - [\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma K}]) \\ &\quad \times \det(z\mathbf{I} - [\mathbf{\Phi} - \mathbf{LC}]), \end{aligned}$$

o que prova que os pólos do sistema combinado são os mesmos da união dos pólos especificados para o observador e com os pólos especificados para o controlador.

Se os pólos do observador e os pólos do controlador tiverem parte real negativa, então pelo Teorema da Estabilidade

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \tilde{\mathbf{x}}(k) &= 0 \\ \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(k) &= 0 \\ \lim_{t\to\infty} y(k) &= 0. \end{aligned}$$

Para processos com transferência direta ($D \neq 0$)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{\Phi x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{Cx}(k) + Du(k), \end{aligned}$$

o estabilizador pode ser agora definido como

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1) &= (\mathbf{\Phi} - \mathbf{LC} - \mathbf{\Gamma K} + \mathbf{L}D\mathbf{K})\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{L}y(k) \\ u(k) &= -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k). \end{aligned}$$

A Figura 3.3 mostra este tipo de estabilizador.

Para processos sem transferência direta

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{\Phi x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{Cx}(k), \end{aligned}$$

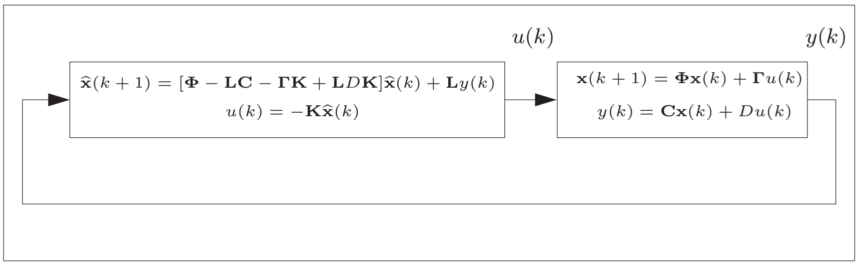

Figura 3.3: Estabilizador para processos com transferência direta.

o estabilizador fica definido como

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(k+1) &= (\mathbf{\Phi} - \mathbf{LC} - \mathbf{\Gamma K})\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{L}y(k)\\ u(k) &= -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k).\end{aligned}$$

A Figura 3.4 mostra este tipo de estabilizador.

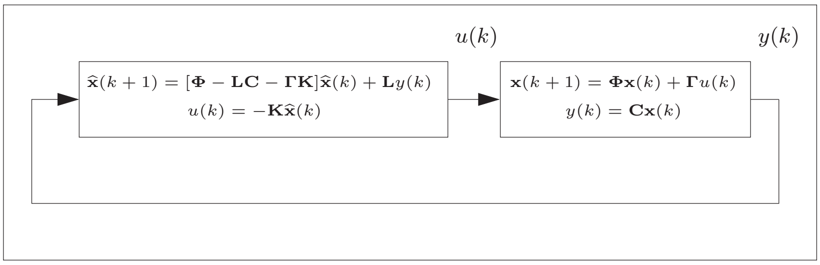

Figura 3.4: Estabilizador para processos sem transferência direta.

3.6 Exemplo

Seja o sistema

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ -2 & -1 & -3\end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}u\\ y &= \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}.\end{aligned}$$

a) Encontrar um controle modal de tal forma que os pólos do sistema realimentado estejam posicionados em $-0,5$, $-0,5$, e $-0,5$;

b) Encontrar um observador de estado de tal forma que os pólos do sistema que descreve o erro de estado sejam -1 , -1 , e -1;

c) Encontrar o estabilizador.

Solução:

a) Do sistema podemos escrever que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ -2 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primeiro Passo: Encontrar $\mathbf{T}$ e $\mathbf{F}$.

$$\mathcal{C}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 14 \end{bmatrix}$$

e

$$\det(\mathcal{C}_{\mathbf{x}}) = 72 \neq 0.$$

Portanto, o sistema é controlável.
Mas,

$$\mathcal{C}_{\mathbf{x}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,3889 & -0,0556 \\ 0 & 0,1111 & 0,0556 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix}.$$

e

$$\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0,1111 & 0,0556 \end{bmatrix}.$$

A matriz $\mathbf{T}^{-1}$ é

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_3\mathbf{A}^2 \\ \mathbf{r}_3\mathbf{A} \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,1667 & -0,1667 \\ 0 & 0,1111 & 0,0556 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -12 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Finalmente podemos escrever que

$$\mathbf{F}{=}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} a_1 &= -2 \\ a_2 &= 3 \\ a_3 &= 0. \end{aligned}$$

Segundo Passo:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0,5 \\ \lambda_2 &= -0,5 \\ \lambda_3 &= -0,5. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} s^3 - \alpha_1 s^2 - \alpha_2 s - \alpha_3 &= (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)(s-\lambda_3) \\ &= (s+0,5)^3 \\ &= s^3 + 1,5s^2 + 0,75s + 0,125, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -1,5\\ \alpha_2 &= -0,75\\ \alpha_1 &= -0,125.\end{aligned}$$

Terceiro Passo: $\mathbf{K_z}$

$$\begin{aligned}\mathbf{K_z} &= \begin{bmatrix} a_1-\alpha_1 & a_2-\alpha_2 & a_3-\alpha_3\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} -2+1,5 & 3+0,75 & 0+0,125\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} -0,5 & 3,75 & 0,125\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Quarto Passo: $\mathbf{K}$

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= \mathbf{K_z}\mathbf{T}^{-1}\\ &= \begin{bmatrix} -0,5 & 3,75 & 0,125\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5\\ 0 & 0,1667 & -0,1667\\ 0 & 0,1111 & 0,0556\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} -0,25 & 0,3889 & -0,8681\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

O controlador será

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} = -\begin{bmatrix} -0,25 & 0,3889 & -0,8681\end{bmatrix}\mathbf{x}.$$

b) *Primeiro Passo*: Encontrar $\mathbf{T}$ e $\mathbf{F}$.

$$\mathcal{O}_\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CA}\\ \mathbf{CA}^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ -3 & -3 & -3\\ 6 & 3 & 9\end{bmatrix}$$

e

$$\det(\mathcal{O}_\mathbf{x}) = -9 \neq 0.$$

Assim, o sistema é observável.
Mas,

$$\mathcal{O}_\mathbf{x}^{-1} = \begin{bmatrix}\mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -0,3333 & -0,3333\\ -1 & -0,3333 & 0\\ -1 & 0,3333 & 0,3333\end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} -0,3333\\ 0\\ 0,3333\end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}^2\mathbf{r}_3 & \mathbf{A}\mathbf{r}_3 & \mathbf{r}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3333 & 0,3333 & -0,3333\\ -0,3333 & -0,3333 & 0\\ 0,6667 & -0,3333 & 0,3333\end{bmatrix}.$$

Finalmente podemos escrever que

$$\mathbf{F}{=}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0\\ a_2 & 0 & 1\\ a_3 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} a_1 &= -2 \\ a_2 &= 3 \\ a_3 &= 0. \end{aligned}$$

Segundo Passo:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= -1 \\ \lambda_3 &= -1. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} s^3 - \alpha_1 s^2 - \alpha_2 s - \alpha_3 &= (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)(s-\lambda_3) \\ &= (s+1)^3 \\ &= s^3 + 3s^2 + 3s + 1, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -3 \\ \alpha_2 &= -3 \\ \alpha_1 &= -1. \end{aligned}$$

Terceiro Passo: $\mathbf{L_z}$

$$\mathbf{L_z} = \begin{bmatrix} a_1 - \alpha_1 \\ a_2 - \alpha_2 \\ a_3 - \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+3 \\ 3+3 \\ 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Quarto Passo:

$$\mathbf{L} = \mathbf{TL_z} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2,3333 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{LC} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 3,3333 & 2 & 2,3333 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

O observador será

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}y \\ &= \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 3,3333 & 2 & 2,3333 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 2 \\ -2,3333 \\ -1 \end{bmatrix} y. \end{aligned}$$

c) Se o estado não for disponível, pode-se usar a lei de controle

$$u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} = -\begin{bmatrix} -0,25 & 0,3889 & -0,8681 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}.$$

O estabilizador fica definido como

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{LC} - \mathbf{BK})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}y \\ &= \begin{bmatrix} -2.5 & -2.7778 & -.2638 \\ 3,3333 & 2 & 2,3333 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2,3333 \\ -1 \end{bmatrix} y \\ u &= -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} \\ &= -\begin{bmatrix} -0,25 & 0,3889 & -0,8681 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

3.7 Exercícios

1. Seja o sistema

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\
y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k).
\end{aligned}
$$

a) Determinar o ganho L de um observador de tal forma que o erro de estado seja regido por um sistema com pólos em 0,3, 0,2 e 0,1.
b) Determinar o ganho K de um controle modal de tal forma que os pólos fiquem posicionados em 0,8.
c) Determinar o estabilizador.

2. Considere o sistema abaixo.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k).
\end{aligned}
$$

a) Determinar o ganho K de um controle modal de tal forma que os pólos fiquem posicionados em -1, -1 e -3.
b) Determinar o ganho L de um observador de tal forma que o erro de estado seja regido por um sistema com pólos em -5.
c) Determinar o estabilizador.

3. Seja o sistema

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\
y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k).
\end{aligned}
$$

a) Determinar um controle modal de tal forma que os pólos fiquem posicionados em 0,1, 0,2 e 0,5;
b) Determinar um observador de tal forma que o erro de estado seja regido por um sistema com pólos em 0,3, 0,2 e 0,2.

4. Considere o sistema abaixo.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.
\end{aligned}
$$

a) Determinar um controle modal de tal forma que os pólos fiquem posicionados em -1, -2 e -5.
b) Determinar um observador de tal forma que o erro de estado seja regido por um sistema com pólos em -3, -2 e -2.

3.8 Respostas dos Exercícios

1.

a)

$$L = \begin{bmatrix} 0,400 \\ 2,110 \\ 0,994 \end{bmatrix}$$

b)

$$K = \begin{bmatrix} 0,515 & -2,429 & 5,347 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{x}}(k+1) &= \begin{bmatrix} -0,429 & 5,859 & -10,693 \\ -0,625 & 2,429 & -4,347 \\ 0,006 & 0 & 0 \end{bmatrix} \widehat{\mathbf{x}}(k) + \begin{bmatrix} 0,400 \\ 2,110 \\ 0,994 \end{bmatrix} y(k) \\ u(k) &= -\begin{bmatrix} 0,515 & -2,429 & 5,347 \end{bmatrix} \widehat{\mathbf{x}}(k). \end{aligned}$$

2.

a)

$$K = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

b)

$$L = \begin{bmatrix} 43,5 \\ 19,5 \\ -27,5 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{\mathbf{x}}} &= \begin{bmatrix} -48,5 & -7 & -46,5 \\ -18,5 & 0 & -19,5 \\ 27,5 & 1 & 27,5 \end{bmatrix} \widehat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 43,5 \\ 19,5 \\ -27,5 \end{bmatrix} y \\ u &= -\begin{bmatrix} 6 & 4 & 10 \end{bmatrix} \widehat{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

3.

a)

$$u(k) = \begin{bmatrix} 9,085 & 6,200 & 33,035 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

b)

$$\widehat{\mathbf{x}}(k+1) = \begin{bmatrix} -1,948 & 2 & -1,948 \\ -4,302 & 2 & -1,302 \\ -2,352 & 0 & 0,648 \end{bmatrix} \widehat{\mathbf{x}}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 2,948 \\ 4,302 \\ 3,352 \end{bmatrix} y(k).$$

4.

a)

$$u = \begin{bmatrix} 11,333 & 3,667 & 67,667 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

b)

$$\dot{\widehat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 4,667 & 2 & 4,667 \\ -10 & 2 & -7 \\ -16,667 & 0 & -13,667 \end{bmatrix} \widehat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -3,667 \\ 10,000 \\ 17,667 \end{bmatrix} y.$$