

Capítulo 5

Seguimento Robusto

O principal objetivo deste capítulo é definir o conceito de seguimento robusto. Quando se fala em seguimento robusto, está-se referindo à robustez da capacidade de seguimento de um sinal. Em outras palavras, **dado um sinal de referência, pertencendo a uma certa classe, deseja-se encontrar um controlador tal que a saída do processo, ou seja, o sinal a ser controlado, siga o sinal de referência em regime permanente, mesmo que haja uma flutuação nos parâmetros do processo.** O processo pode ter uma perturbação determinística, como já estudado. Tanto o sinal de referência, como a perturbação devem ser solução de uma mesma equação homogênea diferencial ou a diferença (caso discreto). O segredo da robustez de seguimento está no controlador que mantém a propriedade de seguimento em regime permanente, apesar de haver variações nos parâmetros do processo, desde que seja conservada a estabilidade do sistema realimentado. Este tipo de controle também é chamado na literatura de **servomecanismo robusto** ou simplesmente, de servomecanismo.

5.1 O sinal de Referência e a Perturbação

Como já mencionado, o sinal de referência e a perturbação deverão ser solução de uma mesma equação homogênea diferencial ou a diferença. Estudaremos, a seguir, as mais comuns equações homogêneas.

5.1.1 Caso Contínuo

Seja a referência denotada por r e a perturbação denotada por W . Estes sinais são solução de

$$\begin{aligned}(p^n - d_1 p^{n-1} - \dots - d_n)r(t) &= 0 \\ (p^n - d_1 p^{n-1} - \dots - d_n)W(t) &= 0,\end{aligned}$$

onde os coeficientes d_1, d_2, \dots, d_n são conhecidos. A determinação dos coeficientes d_1, d_2, \dots, d_n pode ser feita pelos métodos já estudados.

A determinação dos coeficientes d_1, d_2, \dots, d_n pode ser feita como segue.

Seja $W(t)$ uma senoide definida por

$$W(t) = B \operatorname{sen}(wt)$$

seja $r(t)$ um degrau dado por

$$r(t) = A.$$

Estes sinais satisfazem

$$\begin{aligned}(p^2 + w^2)W(t) &= 0, \\ pr(t) &= 0.\end{aligned}$$

Logo podemos escrever que

$$\begin{aligned}p(p^2 + w^2)W(t) &= 0, \\ p(p^2 + w^2)r(t) &= 0.\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} p(p^2 + w^2) &= p^3 + 0p^2 + w^2p + 0 \\ &= p^3 - d_1p^2 - d_2p - d_3, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} d_1 &= 0 \\ d_2 &= -w^2 \\ d_3 &= 0. \end{aligned}$$

5.1.2 Caso Discreto

Seja a referência denotada por $r(k) = r(kT)$ e a perturbação denotada por $W(k) = W(kT)$, onde T é o período de amostragem. Estes sinais satisfazem

$$\begin{aligned} (q^n - d_1q^{n-1} - \dots - d_n)r(k) &= 0 \\ (q^n - d_1q^{n-1} - \dots - d_n)W(k) &= 0, \end{aligned}$$

onde os coeficientes d_1, d_2, \dots, d_n são conhecidos.

A determinação dos coeficientes d_1, d_2, \dots, d_n pode ser feita pelos métodos já estudados.

5.2 Princípio de Seguidor Robusto

5.2.1 Caso Contínuo

O esquema de um seguidor robusto é dado na Figura 5.1. O controlador é composto por um estabilizador e um servo-compensador.

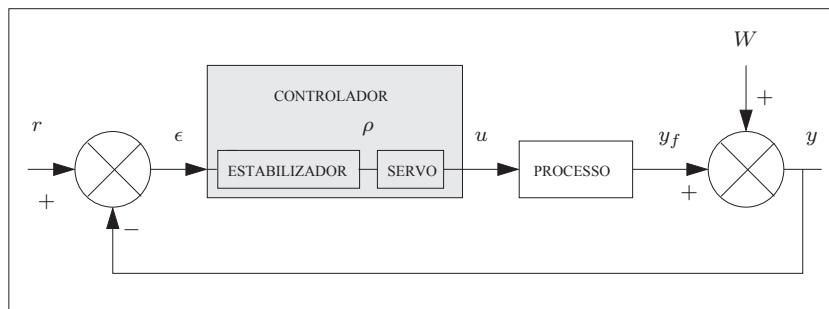


Figura 5.1: Seguidor Robusto Contínuo.

Seja o processo contínuo controlável e observável, de ordem n ,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_f = \mathbf{A}_f \mathbf{x}_f + \mathbf{B}_f u \\ y_f = \mathbf{C}_f \mathbf{x}_f + D_f u \\ \mathbf{y} = y_f + W, \end{cases}$$

onde a perturbação W e a referência r satisfazem

$$\begin{aligned} p^n W(t) &= d_1 p^{n-1} W(t) + \dots + d_n W(t), \\ p^n r(t) &= d_1 p^{n-1} r(t) + \dots + d_n r(t), \end{aligned}$$

ou seja, a perturbação e a referência satisfazem as equações

$$\begin{aligned}(p^n - d_1 p^{n-1} - \dots - d_n)W(t) &= 0, \\ (p^n - d_1 p^{n-1} - \dots - d_n)r(t) &= 0.\end{aligned}$$

Finalmente, supomos que as raízes s_1, s_2, \dots, s_n de

$$s^n - d_1 s^{n-1} - \dots - d_n = 0,$$

não são zeros do processo.

O objetivo do controlador é de encontrar um sinal u tal que a saída do processo y siga o sinal de referência r em regime permanente. Em outras palavras, definindo-se um erro de seguimento, ϵ , por

$$\epsilon = r - y,$$

deseja-se encontrar um sinal de controle u , tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = 0.$$

Princípio do servo-compensador

Da definição de erro ϵ , podemos escrever que

$$\begin{aligned}\epsilon &= r - y \\ &= r - \mathbf{C}_f \mathbf{x}_f - D_f u - W.\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}(p^n - d_1 p^{n-1} - \dots - d_n)\epsilon &= (p^n - d_1 p^{n-1} - \dots - d_n)r \\ &\quad - (p^n - d_1 p^{n-1} - \dots - d_n)\mathbf{C}_f \mathbf{x}_f \\ &\quad - (p^n - d_1 p^{n-1} - \dots - d_n)D_f u \\ &\quad - (p^n - d_1 p^{n-1} - \dots - d_n)W \\ (p^n - d_1 p^{n-1} - \dots - d_n)\epsilon &= -\mathbf{C}_f \mathbf{x}_p - D_f \rho,\end{aligned}$$

onde,

$$\mathbf{x}_p = (p^n - d_1 p^{n-1} - \dots - d_n)\mathbf{x}_f$$

e

$$\rho = (p^n - d_1 p^{n-1} - \dots - d_n)u.$$

A equação acima define o servo-compensador que calcula o sinal de saída u e é alimentado por um sinal auxiliar ρ .

O servo-compensador pode ser descrito na forma canônica de controlabilidade, como segue

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_u &= \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_n \\ & & & 0 \\ & \mathbf{I}_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \rho \\ u &= [0 \ \dots \ 0 \ 1] \mathbf{x}_u,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_u &= \mathbf{A}_u \mathbf{x}_u + \mathbf{B}_u \rho \\ u &= \mathbf{C}_u \mathbf{x}_u,\end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_n \\ & & & 0 \\ & \mathbf{I}_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_u = [0 \ \dots \ 0 \ 1].$$

Princípio do estabilizador

Da equação de estado do processo, podemos escrever

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_f &= \mathbf{A}_f \mathbf{x}_f + \mathbf{B}_f u \\ p\mathbf{x}_f &= \mathbf{A}_f \mathbf{x}_f + \mathbf{B}_f u \\ (p^n - d_1 p^{n-1} - \dots - d_n)p\mathbf{x}_f &= (p^n - d_1 p^{n-1} - \dots - d_n)(\mathbf{A}_f \mathbf{x}_f + \mathbf{B}_f u) \\ p(p^n - d_1 p^{n-1} - \dots - d_n)\mathbf{x}_f &= \mathbf{A}_f (p^n - d_1 p^{n-1} - \dots - d_n)\mathbf{x}_f \\ &\quad + \mathbf{B}_f (p^n - d_1 p^{n-1} - \dots - d_n)u \\ \dot{\mathbf{x}}_p &= \mathbf{A}_f \mathbf{x}_p + \mathbf{B}_f \rho. \end{aligned}$$

Assim, a relação entre ϵ e ρ é

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_p &= \mathbf{A}_f \mathbf{x}_p + \mathbf{B}_f \rho \\ (p^n - d_1 p^{n-1} - \dots - d_n)\epsilon &= -\mathbf{C}_f \mathbf{x}_p - D_f \rho. \end{aligned}$$

Mas,

$(p^n - d_1 p^{n-1} - \dots - d_n)\epsilon = \underbrace{-\mathbf{C}_f \mathbf{x}_p - D_f \rho}_{\tilde{u}}$

pode ser posta na forma canônica de controlabilidade

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_\epsilon &= \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_n \\ & & & 0 \\ & \mathbf{I}_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_\epsilon + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \underbrace{(-\mathbf{C}_f \mathbf{x}_p - D_f \rho)}_{\tilde{u}} \\ \epsilon &= [0 \ \dots \ 0 \ 1] \mathbf{x}_\epsilon, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_\epsilon &= \mathbf{A}_u \mathbf{x}_\epsilon + \mathbf{B}_u (-\mathbf{C}_f \mathbf{x}_p - D_f \rho) \\ \epsilon &= \mathbf{C}_u \mathbf{x}_\epsilon. \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_p \\ \dot{\mathbf{x}}_\epsilon \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_f & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_u \mathbf{C}_f & \mathbf{A}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{x}_\epsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_f \\ -\mathbf{B}_u D_f \end{bmatrix} \rho \\ \epsilon &= [\mathbf{0} \ \mathbf{C}_u] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{x}_\epsilon \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Definindo

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{x}_\epsilon \end{bmatrix},$$

podemos escrever que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_f & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_u \mathbf{C}_f & \mathbf{A}_u \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_f \\ -\mathbf{B}_u D_f \end{bmatrix} \rho \\ \epsilon &= [\mathbf{0} \quad \mathbf{C}_u] \mathbf{x}, \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\rho \\ \epsilon &= \mathbf{C}\mathbf{x}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_f & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_u \mathbf{C}_f & \mathbf{A}_u \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_f \\ -\mathbf{B}_u D_f \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= [\mathbf{0} \quad \mathbf{C}_u]. \end{aligned}$$

Este sistema, que representa a relação entre ϵ e ρ , é **controlável e observável**, conforme será provado a seguir. Portanto, podemos determinar o sinal ρ , tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = 0.$$

A determinação de ρ é feita através de um **controle modal usando observador de estado, ou seja, através de um estabilizador**, conforme anteriormente estudado, tendo em vista que o estado, \mathbf{x} , não é disponível.

Controlabilidade e Observabilidade da Relação entre ϵ e ρ

Definindo-se

$$\begin{cases} \mathbf{x}_e &= -\mathbf{x}_\epsilon \\ e &= -\epsilon, \end{cases}$$

a relação entre ϵ e ρ

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_p \\ \dot{\mathbf{x}}_\epsilon \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_f & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_u \mathbf{C}_f & \mathbf{A}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{x}_\epsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_f \\ -\mathbf{B}_u D_f \end{bmatrix} \rho \\ \epsilon &= [\mathbf{0} \quad \mathbf{C}_u] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{x}_\epsilon \end{bmatrix} \end{aligned}$$

pode ser reescrita

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_p \\ \dot{\mathbf{x}}_e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_f & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_u \mathbf{C}_f & \mathbf{A}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{x}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_f \\ \mathbf{B}_u D_f \end{bmatrix} \rho \\ e &= [\mathbf{0} \quad \mathbf{C}_u] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{x}_e \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

As equações acima correspondem aos dois sistemas em cascata representados na Figura 5.2.

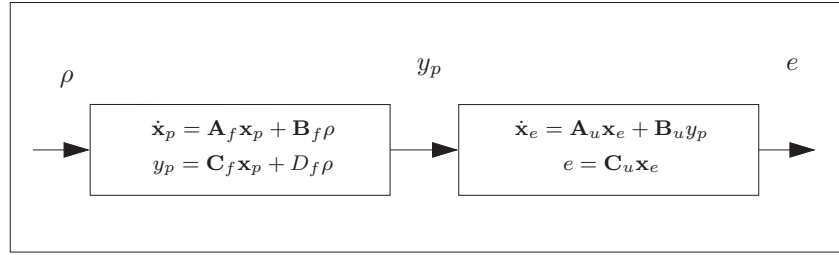


Figura 5.2: Relação entre e e ρ .

A função de transferência entre $y_p(s)$ e $\rho(s)$, denotada por

$$\frac{N_p(s)}{D_p(s)},$$

é a mesma da do processo. Da Figura 5.2 tira-se que

$$e(s) = \frac{1}{s^n - d_1 s^{n-1} - \dots - d_n} y_p(s).$$

Logo,

$$e(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)(s^n - d_1 s^{n-1} - \dots - d_n)} \rho(s),$$

e

$$\epsilon(s) = -\frac{N_p(s)}{D_p(s)(s^n - d_1 s^{n-1} - \dots - d_n)} \rho(s).$$

Como o processo é controlável e observável, $N_p(s)$ e $D_p(s)$ não têm raízes comuns, pelo Teorema de Kalman. Por hipótese, $N_p(s)$ e $s^n - d_1 s^{n-1} - \dots - d_n$ também não têm raízes comuns. Logo, $N_p(s)$ e $D_p(s)(s^n - d_1 s^{n-1} - \dots - d_n)$ não têm raízes comuns. Concluimos, finalmente, pelo Teorema de Kalman, que a relação entre ϵ e ρ é controlável e observável.

5.2.2 Caso Discreto

O esquema de um seguidor robusto é dado na Figura 5.3. O controlador é composto por um estabilizador e um servo-compensador que são implementados em um Computador Digital (CD).

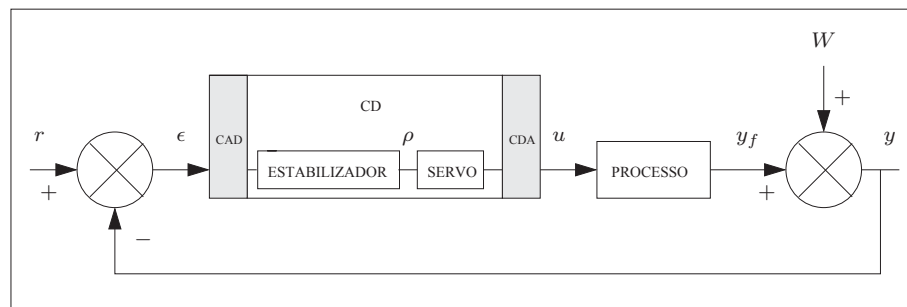


Figura 5.3: Seguidor Robusto Discreto.

Seja o sistema discreto controlável e observável, de ordem n ,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_f(k+1) &= \Phi_f \mathbf{x}_f(k) + \Gamma_f u(k) \\ y_f(k) &= \mathbf{C}_f \mathbf{x}_f(k) + D_f u(k) \\ y(k) &= y_f(k) + W(k), \end{aligned}$$

onde a perturbação $W(k)$ e a referência $r(k)$ satisfazem

$$\begin{aligned} q^n W(k) &= d_1 q^{n-1} W(k) + \dots + d_n W(k), \\ q^n r(k) &= d_1 q^{n-1} r(k) + \dots + d_n r(k), \end{aligned}$$

ou seja, a perturbação e a referência satisfazem

$$\begin{aligned} (q^n - d_1 q^{n-1} - \dots - d_n) W(k) &= 0, \\ (q^n - d_1 q^{n-1} - \dots - d_n) r(k) &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente, supomos que as raízes z_1, z_2, \dots, z_n de

$$z^n - d_1 z^{n-1} - \dots - d_n = 0,$$

não são zeros do processo.

O objetivo do controlador é de encontrar um sinal $u(k)$ tal que a saída do processo $y(k)$ siga o sinal de referência $r(k)$ em regime permanente. Em outras palavras, definindo-se um erro de saída, $\epsilon(k)$, por

$$\epsilon(k) = r(k) - y(k),$$

deseja-se encontrar um sinal de controle $u(k)$, tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon(k) = 0.$$

Princípio do servo-compensador

Da definição de erro $\epsilon(k)$, podemos escrever que

$$\begin{aligned} \epsilon(k) &= r(k) - y(k) \\ &= r(k) - \mathbf{C}_f \mathbf{x}_f(k) - D_f u(k) - W(k) \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} (q^n - d_1 q^{n-1} - \dots - d_n) \epsilon(k) &= (q^n - d_1 q^{n-1} - \dots - d_n) r(k) \\ &\quad - (q^n - d_1 q^{n-1} - \dots - d_n) \mathbf{C}_f \mathbf{x}_f(k) \\ &\quad - (q^n - d_1 q^{n-1} - \dots - d_n) D_f u(k) \\ &\quad - (q^n - d_1 q^{n-1} - \dots - d_n) W(k) \\ (q^n - d_1 q^{n-1} - \dots - d_n) \epsilon(k) &= -\mathbf{C}_f \mathbf{x}_p(k) - D_f \rho(k), \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{x}_p(k) = (q^n - d_1 q^{n-1} - \dots - d_n) \mathbf{x}_f(k),$$

e

$$\rho(k) = (q^n - d_1 q^{n-1} - \dots - d_n) u(k).$$

A equação acima define o servo-compensador que calcula o sinal de comando $u(k)$ e é alimentado por um sinal auxiliar $\rho(k)$.

O servo-compensador pode ser descrito na forma canônica de controlabilidade, como segue

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(k+1) &= \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_n \\ & & & 0 \\ & \mathbf{I}_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_u(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \rho(k) \\ u(k) &= [0 \ \dots \ 0 \ 1] \mathbf{x}_u(k), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(k+1) &= \Phi_u \mathbf{x}_u(k) + \Gamma_u \rho(k) \\ u(k) &= \mathbf{C}_u \mathbf{x}_u(k),\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\Phi_u &= \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_n \\ & & & 0 \\ & \mathbf{I}_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix} \\ \Gamma_u &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_u &= [0 \ \cdots \ 0 \ 1].\end{aligned}$$

Princípio do estabilizador

Da equação de estado do processo, podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_f(k+1) &= \Phi_f \mathbf{x}_f(k) + \Gamma_f u(k) \\ q\mathbf{x}_f(k) &= \Phi_f \mathbf{x}_f(k) + \Gamma_f u(k) \\ (q^n - d_1 q^{n-1} - \cdots - d_n)q\mathbf{x}_f(k) &= (q^n - d_1 q^{n-1} - \cdots - d_n)(\Phi_f \mathbf{x}_f(k) + \Gamma_f u(k)) \\ q(q^n - d_1 q^{n-1} - \cdots - d_n)\mathbf{x}_f(k) &= \Phi_f (q^n - d_1 q^{n-1} - \cdots - d_n)\mathbf{x}_f(k) \\ &\quad + \Gamma_f (q^n - d_1 q^{n-1} - \cdots - d_n)u(k) \\ \mathbf{x}_p(k) &= \Phi_f \mathbf{x}_p(k) + \Gamma_f \rho(k).\end{aligned}$$

Assim, a relação entre $\epsilon(k)$ e $\rho(k)$ é

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_p(k+1) &= \Phi_f \mathbf{x}_p(k) + \Gamma_f \rho(k) \\ (q^n - d_1 q^{n-1} - \cdots - d_n)\epsilon(k) &= -\mathbf{C}_f \mathbf{x}_p(k) - D_f \rho(k).\end{aligned}$$

Mas

$$(q^n - d_1 q^{n-1} - \cdots - d_n)\epsilon(k) = -\mathbf{C}_f \mathbf{x}_p(k) - D_f \rho(k)$$

pode ser posta na Forma Canônica de Controlabilidade

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\epsilon(k+1) &= \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_n \\ & & & 0 \\ & \mathbf{I}_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_\epsilon(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} (-\mathbf{C}_f \mathbf{x}_p(k) - D_f \rho(k)) \\ \epsilon(k) &= [0 \ \cdots \ 0 \ 1] \mathbf{x}_\epsilon(k),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\epsilon(k+1) &= \Phi_u \mathbf{x}_\epsilon(k) + \Gamma_u (-\mathbf{C}_f \mathbf{x}_p(k) - D_f \rho(k)) \\ \epsilon(k) &= \mathbf{C}_u \mathbf{x}_\epsilon(k).\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(k+1) \\ \mathbf{x}_\epsilon(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi_f & \mathbf{0} \\ -\Gamma_u \mathbf{C}_f & \Phi_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(k) \\ \mathbf{x}_\epsilon(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_f \\ -\Gamma_u D_f \end{bmatrix} \rho(k) \\ \epsilon(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(k) \\ \mathbf{x}_\epsilon(k) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Definindo

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(k) \\ \mathbf{x}_\epsilon(k) \end{bmatrix},$$

podemos escrever que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} \Phi_f & \mathbf{0} \\ -\Gamma_u \mathbf{C}_f & \Phi_u \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} \Gamma_f \\ -\Gamma_u D_f \end{bmatrix} \rho(k) \\ \epsilon(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_u \end{bmatrix} \mathbf{x}(k), \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \Phi \mathbf{x}(k) + \Gamma \rho(k) \\ \epsilon(k) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{bmatrix} \Phi_f & \mathbf{0} \\ -\Gamma_u \mathbf{C}_f & \Phi_u \end{bmatrix} \\ \Gamma &= \begin{bmatrix} \Gamma_f \\ -\Gamma_u D_f \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_u \end{bmatrix} \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Este sistema, que representa a relação entre $\epsilon(k)$ e $\rho(k)$, é controlável e observável, conforme será mostrado a seguir. Portanto, podemos determinar o sinal $\rho(k)$, tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon(k) = 0.$$

A determinação de $\rho(k)$ é feita através de um controle modal usando observador de estado, conforme anteriormente estudado, tendo em vista que o estado, $\mathbf{x}(k)$, não é disponível.

Controlabilidade e Observabilidade da Relação entre $\epsilon(k)$ e $\rho(k)$

Definindo-se

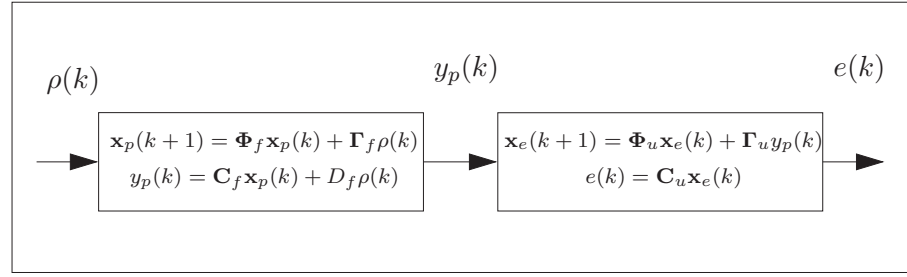
$$\begin{aligned} \mathbf{x}_e(k) &= -\mathbf{x}_\epsilon(k) \\ e(k) &= -\epsilon(k), \end{aligned}$$

a relação entre $\epsilon(k)$ e $\rho(k)$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(k+1) \\ \mathbf{x}_\epsilon(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi_f & \mathbf{0} \\ -\Gamma_u \mathbf{C}_f & \Phi_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(k) \\ \mathbf{x}_\epsilon(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_f \\ -\Gamma_u D_f \end{bmatrix} \rho(k) \\ \epsilon(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(k) \\ \mathbf{x}_\epsilon(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

pode ser reescrita

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(k+1) \\ \mathbf{x}_e(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi_f & \mathbf{0} \\ \Gamma_u \mathbf{C}_f & \Phi_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(k) \\ \mathbf{x}_e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_f \\ \Gamma_u D_f \end{bmatrix} \rho(k) \\ e(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(k) \\ \mathbf{x}_e(k) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Figura 5.4: Relação entre $e(k)$ e $\rho(k)$.

As equações acima correspondem aos dois sistemas em cascata representados na Figura 5.4. A função de transferência entre $y_p(z)$ e $\rho(z)$, denotada por

$$\frac{N_p(z)}{D_p(z)},$$

é a mesma da do processo. Da Figura 5.2 tira-se que

$$e(z) = \frac{1}{z^n - d_1 z^{n-1} - \dots - d_n} y_p(z).$$

Logo,

$$e(z) = \frac{N_p(z)}{D_p(z)(z^n - d_1 z^{n-1} - \dots - d_n)} \rho(z),$$

e

$$\epsilon(z) = -\frac{N_p(z)}{D_p(z)(z^n - d_1 z^{n-1} - \dots - d_n)} \rho(z).$$

Como o processo é controlável e observável, $N_p(z)$ e $D_p(z)$ não têm raízes comuns, pelo Teorema de Kalman. Por hipótese, $N_p(z)$ e $z^n - d_1 z^{n-1} - \dots - d_n$ também não têm raízes comuns. Logo, $N_p(z)$ e $D_p(z)(z^n - d_1 z^{n-1} - \dots - d_n)$ não têm raízes comuns. Concluímos, então, pelo Teorema de Kalman, que a relação entre $\epsilon(k)$ e $\rho(k)$ é controlável e observável.

5.3 Projeto de Seguidor Robusto

5.3.1 Caso Contínuo

Seja o sistema contínuo controlável e observável, de ordem n ,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_f &= \mathbf{A}_f \mathbf{x}_f + \mathbf{B}_f u \\ y &= \mathbf{C}_f \mathbf{x}_f + D_f u + W, \end{aligned}$$

onde a perturbação W e a referência r satisfazem

$$\begin{aligned} (p^n - d_1 p^{n-1} - \dots - d_n)W(t) &= 0, \\ (p^n - d_1 p^{n-1} - \dots - d_n)r(t) &= 0. \end{aligned}$$

Primeiro Passo: determinação do erro de saída

$$\epsilon = r - y.$$

Segundo Passo: determinação do servo-compensador

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_u &= \mathbf{A}_u \mathbf{x}_u + \mathbf{B}_u \rho \\ u &= \mathbf{C}_u \mathbf{x}_u, \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_n \\ & & & 0 \\ & \mathbf{I}_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_u = [0 \ \cdots \ 0 \ 1]$$

Terceiro Passo: determinação da relação entre ϵ e ρ

A relação entre ϵ e ρ é dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\rho$$

$$\epsilon = \mathbf{C}\mathbf{x},$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_f & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_u\mathbf{C}_f & \mathbf{A}_u \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_f \\ -\mathbf{B}_u\mathbf{D}_f \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{0} \ \mathbf{C}_u]$$

Quarto Passo: determinação do estabilizador. Encontrar \mathbf{L} e \mathbf{K} , e definir o estabilizador da seguinte forma

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = [\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{K}]\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}\epsilon$$

$$\rho = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}.$$

O esquema de controle é dado pela Figura 5.5.

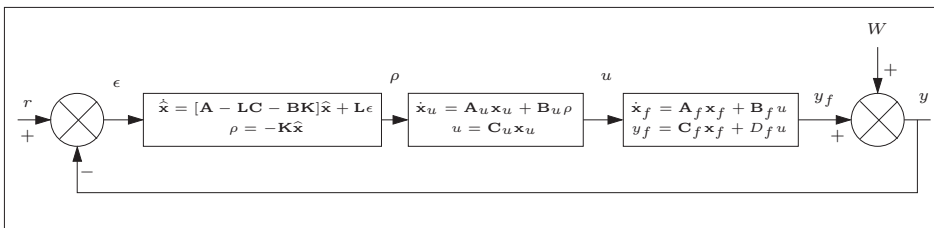


Figura 5.5: Seguidor Robusto Contínuo.

5.3.2 Caso Discreto

Seja o sistema discreto controlável e observável, de ordem n ,

$$\mathbf{x}_f(k+1) = \mathbf{\Phi}_f\mathbf{x}_f(k) + \mathbf{\Gamma}_f u(k)$$

$$y(k) = \mathbf{C}_f \mathbf{x}_f(k) + D_f u(k) + W(k),$$

onde a perturbação $W(k)$ e a referência $r(k)$ satisfazem

$$\begin{aligned} (q^n - d_1 q^{n-1} - \dots - d_n)W(k) &= 0, \\ (q^n - d_1 q^{n-1} - \dots - d_n)r(k) &= 0. \end{aligned}$$

Primeiro Passo: determinação do erro de saída

$$\epsilon(k) = r(k) - y(k).$$

Segundo Passo: determinação do servo-compensador

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(k+1) &= \mathbf{\Phi}_u \mathbf{x}_u(k) + \Gamma_u \rho(k) \\ u(k) &= \mathbf{C}_u \mathbf{x}_u(k), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}_u &= \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_n \\ & & & 0 \\ & \mathbf{I}_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix} \\ \Gamma_u &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_u &= [0 \ \dots \ 0 \ 1] \end{aligned}$$

Terceiro Passo: determinação da relação entre $\epsilon(k)$ e $\rho(k)$

A relação entre $\epsilon(k)$ e $\rho(k)$ é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{\Phi} \mathbf{x}(k) + \Gamma \rho(k) \\ \epsilon(k) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi} &= \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_f & \mathbf{0} \\ -\Gamma_u \mathbf{C}_f & \mathbf{\Phi}_u \end{bmatrix} \\ \Gamma &= \begin{bmatrix} \Gamma_f \\ -\Gamma_u D_f \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= [\mathbf{0} \ \mathbf{C}_u]. \end{aligned}$$

Quarto Passo: determinação do estabilizador. Encontrar \mathbf{L} e \mathbf{K} , e definir o estabilizador da seguinte forma

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1) &= [\mathbf{\Phi} - \mathbf{L}\mathbf{C} - \mathbf{\Gamma}\mathbf{K}] \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{L}\epsilon(k) \\ \rho(k) &= -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k). \end{aligned}$$

O programa de computador é dado pela Figura 5.6.

Este programa roda periodicamente a cada T segundos. T é o período de amostragem.

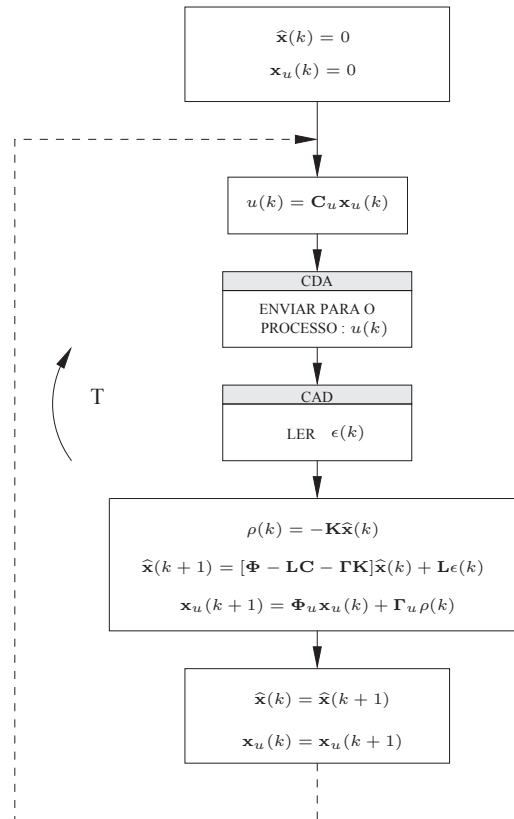


Figura 5.6: Programa do Seguidor Robusto Discreto.

5.3.3 Exemplo

Seja o processo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_f &= \begin{bmatrix} -2,8 & -1,6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_f + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \ 1] \mathbf{x}_f + 0,1. \end{aligned}$$

Encontrar um controle robusto discreto tal que

$$r(t) = R$$

e o período de amostragem seja 0,1.

Os pólos do controle modal para o estabilizador deverão ser iguais a 0,8. Os pólos do observador para o estabilizador deverão ser 0,2.

Solução:

Precisamos, antes de tudo, determinar o modelo discreto do processo contínuo com bloqueador de ordem zero, considerando o período de amostragem $T = 0,1$.

Podemos escrever que

$$\begin{aligned} \psi &= \mathbf{I} + \frac{1}{2!} \mathbf{A}_f T + \frac{1}{3!} (\mathbf{A}_f)^2 T^2 + \dots \\ \Phi_f &= \mathbf{I} + \mathbf{A}_f T \psi \\ \Gamma_f &= \psi T \mathbf{B}_f. \end{aligned}$$

Considerando que

$$\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} -2,8 & -1,6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

podemos escrever

$$\Phi_f = \begin{bmatrix} 0,74914 & -0,13918 \\ 0,08699 & 0,9927 \end{bmatrix}$$

e

$$\Gamma_f = \begin{bmatrix} 0,08699 \\ 0,00456 \end{bmatrix}.$$

O Processo&Bloqueador na forma discreta é descrito por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_f(k+1) &= \Phi_f \mathbf{x}_f(k) + \Gamma_f u(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}_f \mathbf{x}_f(k) + 0,1 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_f(k) + 0,1. \end{aligned}$$

Do processo, podemos escrever

$$W(kT) = 0,1.$$

Como $W(kT)$ e $r(kT)$ são seqüências constantes, satisfazem as equações

$$(q-1)r(kT) = 0$$

e

$$(q-1)W(kT) = 0.$$

Vamos agora considerar os quatro passos de projeto.

Primeiro Passo: erro de saída

$$\epsilon(k) = r(k) - y(k).$$

Segundo Passo: determinação do servo-compensador

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(k+1) &= \Phi_u \mathbf{x}_u(k) + \Gamma_u \rho(k) \\ u(k) &= \mathbf{C}_u \mathbf{x}_u(k), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi_u &= [1] \\ \Gamma_u &= [1] \\ \mathbf{C}_u &= [1] \end{aligned}$$

Terceiro Passo: relação entre $\epsilon(k)$ e $\rho(k)$

Podemos agora escrever o sistema a ser observado e controlado

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \Phi \mathbf{x}(k) + \Gamma \rho(k) \\ \epsilon(k) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{bmatrix} \Phi_f & \mathbf{0} \\ -\Gamma_u \mathbf{C}_f & \Phi_u \end{bmatrix} \\ \Gamma &= \begin{bmatrix} \Gamma_f \\ -\Gamma_u D_f \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_u \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Considerando $D_f = 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\Phi &= \begin{bmatrix} 0,74914 & -0,13918 & 0 \\ 0,08699 & 0,9927 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ \Gamma &= \begin{bmatrix} 0,08699 \\ 0,00456 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= [0 \ 0 \ 1].\end{aligned}$$

Quarto Passo: determinação do estabilizador

Calculando-se o controle modal para os pólos 0,8, 0,8 e 0,8, tem-se que

$$\mathbf{K} = [3,3169 \ 11,696 \ -0,9184].$$

O ganho do observador para pólos 0,2, 0,2 e 0,2 é

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -1,6405 \\ -1,3531 \\ 2,1418 \end{bmatrix}.$$

Podemos definir um controlador da seguinte forma

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(k+1) &= [\Phi - \mathbf{L}\mathbf{C} - \Gamma\mathbf{K}]\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{L}\epsilon(k) \\ \rho(k) &= -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k).\end{aligned}$$

Pode-se mostrar que

$$\Phi - \mathbf{L}\mathbf{C} - \Gamma\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0,4606 & -1,1566 & 1,7205 \\ 0,0719 & 0,9394 & 1,3573 \\ 0 & -1 & -1,1418 \end{bmatrix}.$$

5.4 Exercícios

1. Achar o servo-compensador contínuo para:

- $W(t) = 5\text{sen}(12t)$ e $r(t) = 5$.
- $r(t) = 5\text{sen}(12t)$ e $W(t) = 5$.
- $r(t) = 5t^2$ e $W(t) = 4$.

2. Considerando $T = 0,1$, achar o servo-compensador discreto para:

- $W(kT) = 5\text{sen}(12(kT))$ e $r(kT) = 5$.
- $r(kT) = 5(kT)^2$ e $W(kT) = 4$.

3. Considere o sistema abaixo.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -3x + 2u \\ y &= 4x.\end{aligned}$$

- Determinar o servo-compensador para: $r(t) = 2\text{sen}(5t)$ e $W(t) = 0$.
- Determinar a relação entre ϵ e ρ ;
- Determinar o estabilizador de tal forma que o observador tenha pólos em -1 e o controle modal tenha pólos em $-0,1$.

4. Seja o sistema discretizado (BOZ&Processo) num período de amostragem de 0,2 segundos.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [1 \ 0 \ 1] \mathbf{x}(k).\end{aligned}$$

- a) Determinar o servo-compensador discreto para: $W(kT) = 10\text{sen}(2(kT))$ e $r(kT) = 2$.
- b) Determinar a relação entre $\epsilon(k)$ e $\rho(k)$;
- c) Determinar o estabilizador de tal forma que o observador tenha pólos em 0,1 e o controle modal tenha pólos em 0,8.

5.5 Respostas dos Exercícios

1.

a)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_u &= \begin{bmatrix} 0 & -144 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rho \\ u &= [0 \ 0 \ 1] \mathbf{x}_u\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_u &= \begin{bmatrix} 0 & -144 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rho \\ u &= [0 \ 0 \ 1] \mathbf{x}_u\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_u &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rho \\ u &= [0 \ 0 \ 1] \mathbf{x}_u\end{aligned}$$

2.

a)

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(k+1) &= \begin{bmatrix} 1,725 & -1,725 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_u(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rho(k) \\ u(k) &= [0 \ 0 \ 1] \mathbf{x}_u(k)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(k+1) &= \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_u(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rho(k) \\ u(k) &= [0 \ 0 \ 1] \mathbf{x}_u(k)\end{aligned}$$

3.

a)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_u &= \begin{bmatrix} 0 & -25 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rho \\ u &= [0 \ 1] \mathbf{x}_u\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -25 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rho \\ \epsilon &= [0 \ 0 \ 1] \mathbf{x}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \begin{bmatrix} -0,3 & -6,243 & -3,875 \\ -4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 2 \\ -22 \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon \\ \rho &= [1,35 \ -3,121 \ -0,937] \hat{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

4.

a)

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(k+1) &= \begin{bmatrix} 2,842 & -2,842 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_u(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rho(k) \\ u(k) &= [0 \ 0 \ 1] \mathbf{x}_u(k)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2,842 & -2,842 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rho(k) \\ \epsilon(k) &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \mathbf{x}(k)\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{x}}(k+1) &= \begin{bmatrix} 0,447 & 0,137 & -2,349 & 0,002 & -0,009 & 48,412 \\ -3,991 & -0,542 & -13,305 & 0,012 & -0,046 & 72,661 \\ 0,274 & 0,033 & 2,053 & 0,000 & -0,001 & 70,365 \\ -1 & 0 & -1 & 2,842 & -2,842 & -114,720 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -32,540 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -7,287 \end{bmatrix} \widehat{\mathbf{x}}(k) + \begin{bmatrix} -48,406 \\ -72,631 \\ -70,364 \\ 115,720 \\ 32,540 \\ 7,287 \end{bmatrix} \epsilon(k) \\ \rho(k) &= [-16,582 \ -8,302 \ -58,481 \ 0,047 \ -0,187 \ 0,139] \widehat{\mathbf{x}}(k)\end{aligned}$$