Capítulo 6

Síntese de Sistemas Descritos por Equações de Estado Contínuas

Seja o sistema contínuo

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + Du.\end{aligned}$$

Sintetizar o sistema acima consiste em encontrar um circuito que seja regido matematicamente pelas mesmas equações, ou seja, por

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + Du.\end{aligned}$$

O uso de amplificadores operacionais permite sintetizar com facilidade sistemas descritos por equações de estado contínuas. Assim, observadores, servo-compensadores e estabilizadores contínuos poderão ser sintetizados eletronicamente.

Para sistemas lineares, três circuitos básicos são necessários: somador; inversor e integrador.

Somadores somam tensões ponderadas. Inversores invertem o sinal de uma tensão. E, integradores integram temporalmente uma soma ponderada de tensões.

6.1 Amplificador Operacional Ideal

O símbolo de um amplificador operacional é apresentado na Figura 6.1. A Figura 6.2 mostra o modelo de um Amplificador Operacional.

Amplificadores Operacionais ideais têm resistência de entrada elevada, ganho elevado e resistência de saída muito baixa.

Idealmente consideramos

$$A \simeq \infty \quad R_i \simeq \infty \quad R_o \simeq 0.$$

Nestas condições ideais, pode-se mostrar que

$$I_b \simeq 0 \quad v_d \simeq 0.$$

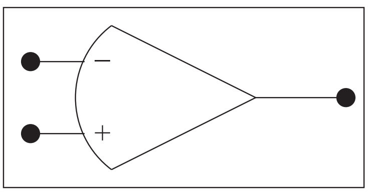


Figura 6.1: Símbolo do Amplificador Operacional.

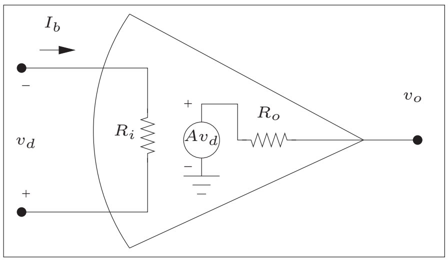


Figura 6.2: Modelo de Amplificador Operacional.

6.2 Somador

Um somador é obtido realimentando-se um amplificador operacional com um resistor, conforme Figura 6.3.

Da Figura 6.3, tira-se que

$$I_1 + I_2 + I_3 + I = I_b \simeq 0.$$

Pode-se escrever que

$$\frac{a_1 v_1}{R} + \frac{a_2 v_2}{R} + \frac{a_3 v_3}{R} + \frac{v_o}{R} = 0,$$

o que implica em

$$v_0 = -(a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3).$$

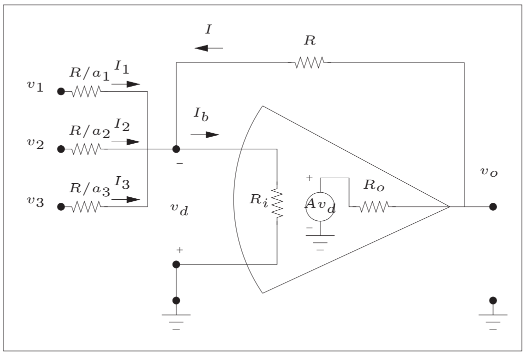


Figura 6.3: Somador.

Em computação analógica o somador é representado conforme a Figura 6.4.

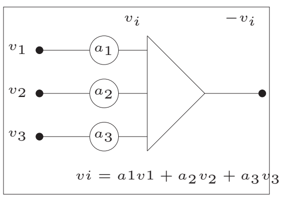


Figura 6.4: Computação Analógica - Somador.

6.3 Inversor

Um inversor é um caso particular do somador. Veja Figura 6.5.

Pode-se mostrar que

$$v_0 = -v_i.$$

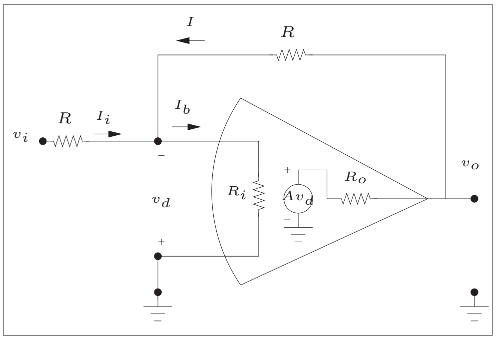


Figura 6.5: Inversor.

Em computação analógica o inversor é representado conforme a Figura 6.6.

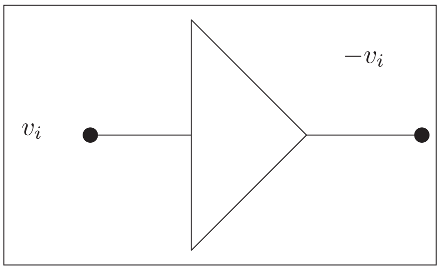


Figura 6.6: Computação Analógica - Inversor.

6.4 Integrador

Um somador é obtido realimentando-se um amplificador operacional com um capacitor, conforme Figura 6.7.

Da Figura 6.7, tira-se que

$$I_1 + I_2 + I_3 + I = I_b \simeq 0.$$

Pode-se escrever que

$$Ca_1v_1 + Ca_2v_2 + Ca_3v_3 + C\dot{v_o} = 0,$$

o que implica em

$$\dot{v_0} = -(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3).$$

Logo,

$$v_0 = -\int_0^t (a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3)dt.$$

Em computação analógica o integrador é representado conforme a Figura 6.8.

Os circuitos aqui apresentados de somador, inversor e integrador, usando amplificadores operacionais não são únicos. Em [5] são apresentados diversos circuitos alternativos. As configurações mais simples de tais circuitos foram aqui abordadas.

A Figura 6.9 faz um resumo dos três elementos de computação analógica necessários para síntese de sistemas lineares. Na primeira coluna são apresentados os elementos de computação analógica, e na segunda os correspondentes circuitos eletrônicos.

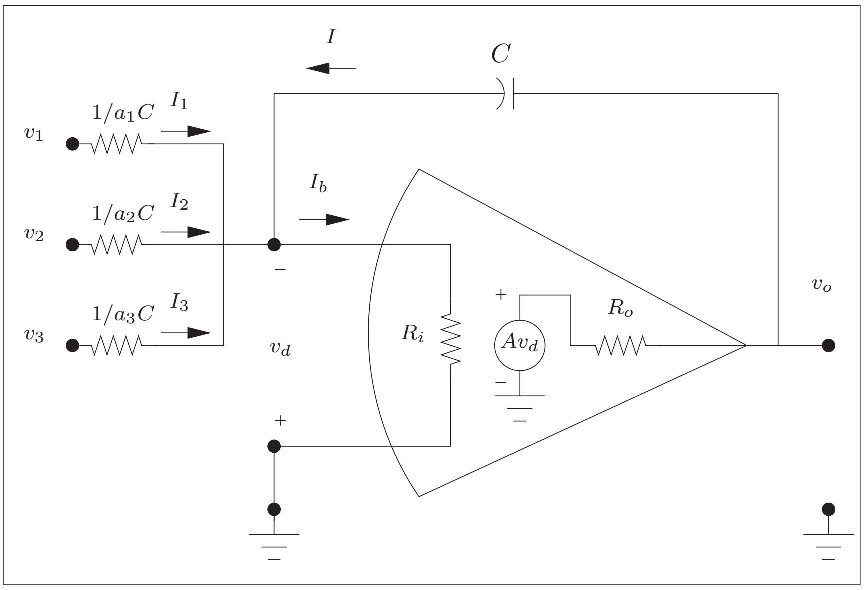


Figura 6.7: Integrador.

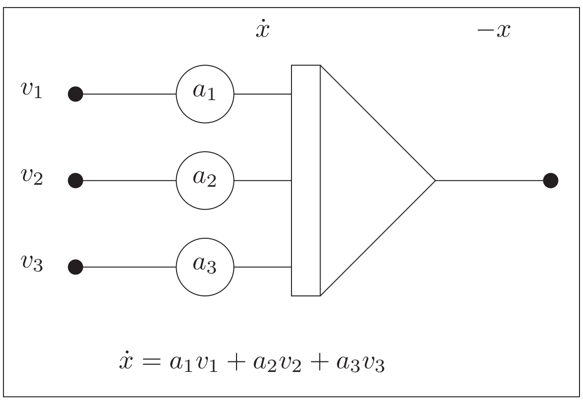


Figura 6.8: Computação Analógica - Integrador.

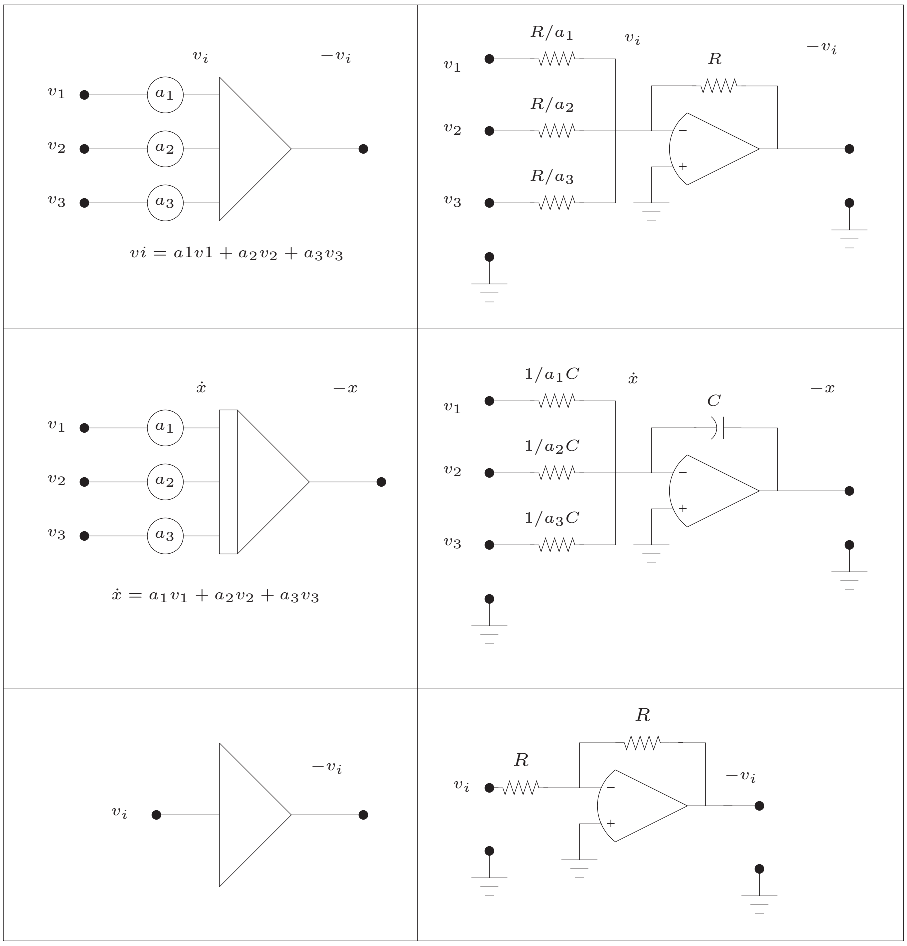


Figura 6.9: Elementos de Computação Analógica X Circuitos Eletrônicos.

6.5 Exemplo

Seja o sistema abaixo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Realizar o programa de computação analógica e sintetizar o circuito correspondente.

Podemos escrever que

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + 2u \\ \dot{x}_2 &= -3x_2 + u \\ y &= 3x_1 + 4x_2. \end{aligned}$$

Para realizar o programa de computação analógica, devemos programar cada estado e a saída. Começa-se programando os integradores. Cada integrador corresponde a um estado. Desta forma programa-se os estados. A equação de saída é obtida com um somador.

O programa de computação analógica está apresentado na Figura 6.10 e o correspondente circuito está apresentado na Figura 6.11. A Figura 6.10 é auto explicativa. A Figura 6.11 foi obtida usando-se os circuitos correspondentes dos elementos de computação analógica apresentados na Figura 6.9.

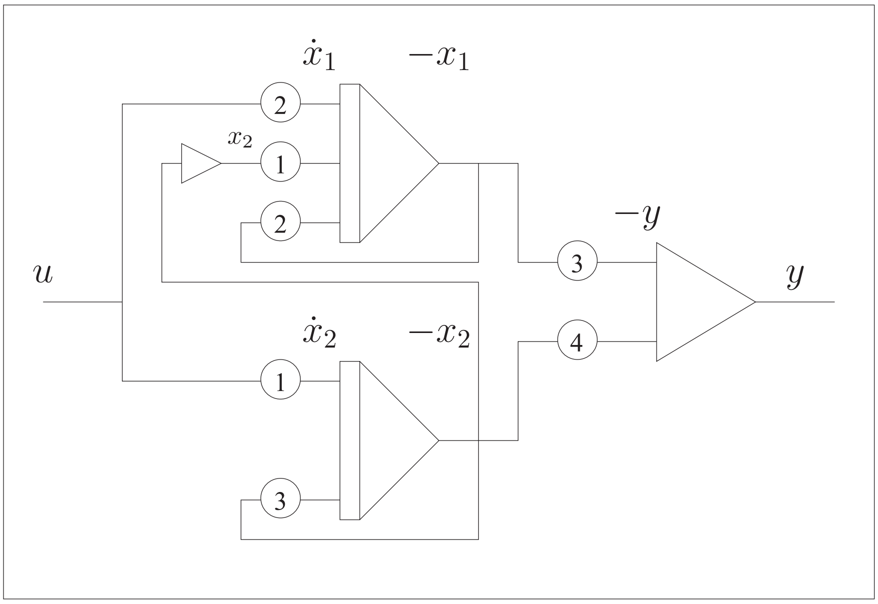


Figura 6.10: Diagrama de Computação Analógica.

6.6 Exercícios

1. Considere o sistema da Figura 6.12.

a) Faça o programa de computação analógica;

b) Apresente o circuito correspondente.

2. Faça o programa de computação analógica do sistema abaixo:

$$\frac{3}{s^3 + 2s + 1}.$$

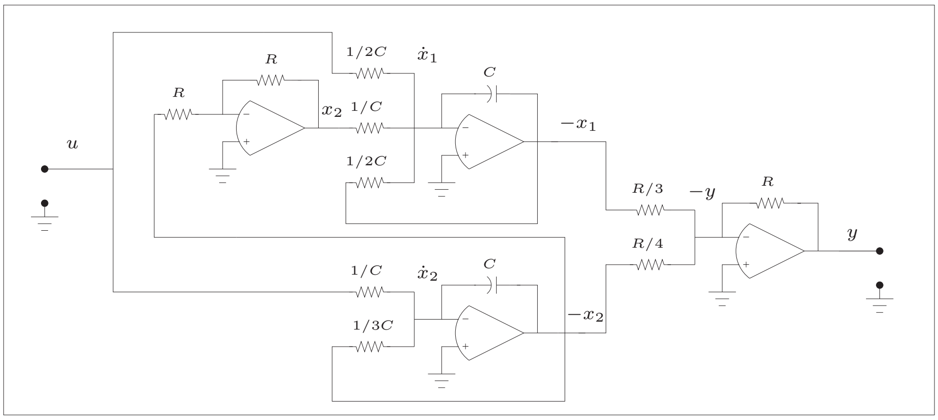


Figura 6.11: Realização com Amplificadores Operacionais.

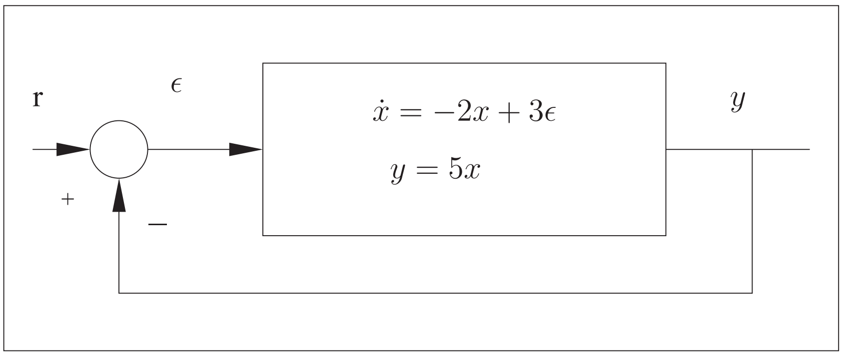


Figura 6.12: Exercício 1.

6.7 Respostas dos Exercícios

1.

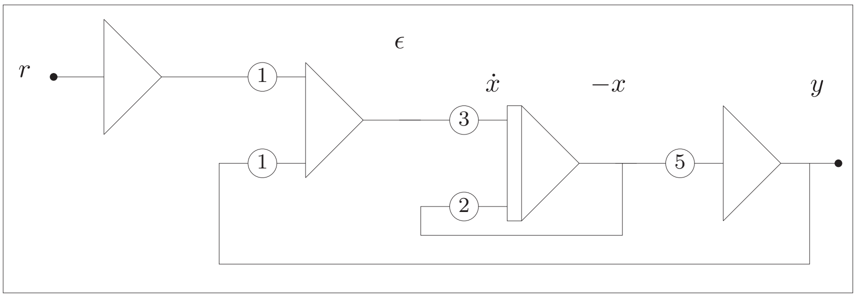


Figura 6.13: Resposta do Exercício 1 a).

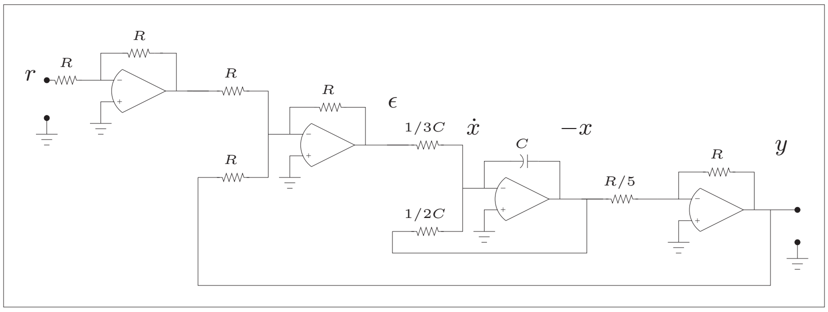
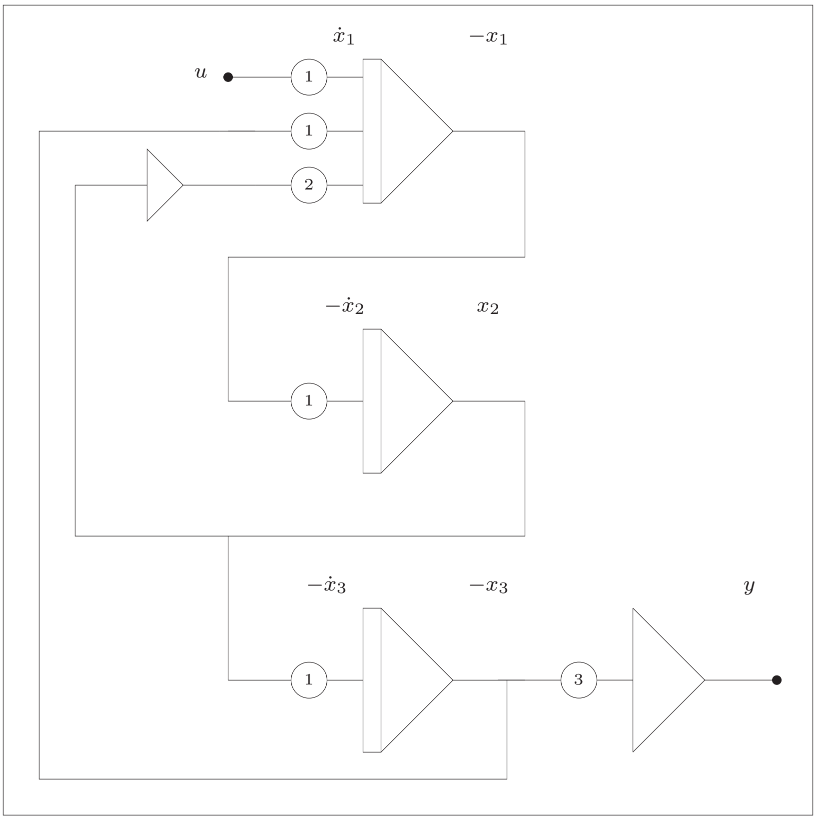


Figura 6.14: Resposta do Exercício 1 b).

2.



Referências Bibliográficas

[1] Stefani R. T., Savant Jr C. J., Shahian B., Hosttetter G. H. *Design of Feedback Control Systems*, Saunders College Publishing,1994.

[2] Chen C. T. *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Rinehart and Wiston,Inc,1970.

[3] Franklin G. F., Powell J. D., Emami-Naeini A. *Feedback Control of Dynamic Systems* , Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

[4] Hsu H. P. *Teoria e Problemas de Sinais e Sistemas - Coleção Schaum* , Bookman Companhia Editora, 2004.

[5] Pertence Junior, A. *Amplificadores Operacionais e Filtros Ativos*, McGraw-Hill, 1988.