

FUNDAMENTOS DE CONTROLE - EEL 7531

Professor: Aguinaldo S. e Silva

LABSPOT-EEL-UFSC

9 de junho de 2015



Soluções periódicas e ciclos limite

Objetivo:

- Estudar oscilações periódicas que ocorrem em sistemas não-lineares
- As oscilações periódicas isoladas são chamadas ciclo-limites
- Este tipo de oscilação ocorre em muitos sistemas reais e a sua detecção e condições em que podem surgir são importantes para a análise de projetos de engenharia



Soluções periódicas e ciclos limite

Seja o sistema linear (oscilador harmônico simples)

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t)$$

com condições iniciais

$$x_1(0) = x_{10}$$

$$x_2(0) = x_{20}$$



O sistema pode ainda ser representado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



Solução do sistema linear

A solução deste sistema linear é dado por

$$x(t) = e^{At} x(o)$$

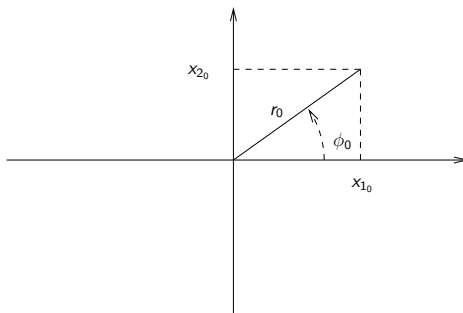
ou

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_{1_0} \cos(t) + x_{2_0} \text{sent} \\ -x_{1_0} \text{sen}(t) + x_{2_0} \text{cost} \end{bmatrix}$$



Solução na forma polar

Uma expressão mais simples para esta solução pode ser obtida se a condição inicial for expressa na forma polar como mostrado



Forma polar

$$\cos \phi_0 = \frac{x_{10}}{\sqrt{x_{10}^2 + x_{20}^2}} = \frac{x_{10}}{r_0}$$

e

$$\sin \phi_0 = \frac{x_{20}}{\sqrt{x_{10}^2 + x_{20}^2}} = \frac{x_{20}}{r_0}$$

onde

$$r_0 = (x_{10}^2 + x_{20}^2)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\phi_0 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{x_{20}}{x_{10}}$$



Solução do sistema

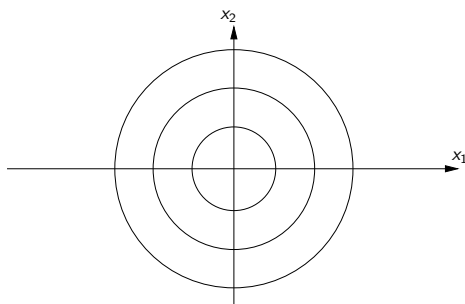
A solução na forma polar é

$$x_1(t) = r_0 \cos(-t + \phi_0)$$

$$x_2(t) = r_0 \sin(-t + \phi_0)$$



Natureza das soluções



- as soluções cobrem todo o plano
- dado um ponto arbitrário sempre há uma solução periódica que passa por este ponto



Caso de um sistema não-linear

- Sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \alpha x_1(\beta^2 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \alpha x_2(\beta^2 - x_1^2 - x_2^2)\end{aligned}$$

- Campo vetorial é soma de dois campos vetoriais:
 - Campo vetorial $f(x)$ dado por

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix}$$

- Campo vetorial $g(x)$, dado por

$$g(x) = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 (\beta^2 - x_1^2 - x_2^2) \\ \alpha x_2 (\beta^2 - x_1^2 - x_2^2) \end{bmatrix}$$



Sistema em coordenadas polares

Definindo-se:

$$r = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\phi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{x_2}{x_1}$$

obtem-se

$$\dot{r} = \alpha r(\beta^2 - r^2)$$
$$\dot{\phi} = -1$$



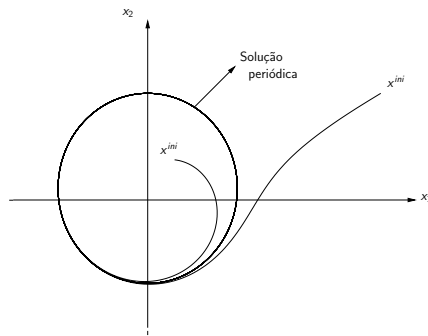
Solução do sistema

- O sistema resultante fica desacoplado em termos das variáveis r e α
- A solução pode ser obtida por integração

$$r(t) = \frac{\beta}{(1 + c_0 e^{-2\beta^2 \alpha t})^{\frac{1}{2}}}$$
$$\phi(t) = \phi_0 - t$$



Representação gráfica da solução



Natureza da solução

- A solução é periódica com raio $r_0 = \beta$ e para todo $r_0 \neq 0$ as soluções se aproximam da solução periódica par $t \rightarrow \infty$
- Comparando-se o sistema linear e o sistema não-linear, tem-se que no primeiro caso a oscilação é independente das condições iniciais e não isolada, ou seja, na vizinhança de uma trajetória fechada existem outras trajetórias fechadas. No segundo caso a trajetória fechada é isolada, ou seja, existe uma vizinhança que não contém nenhuma solução periódica.



Definição de ciclo limite

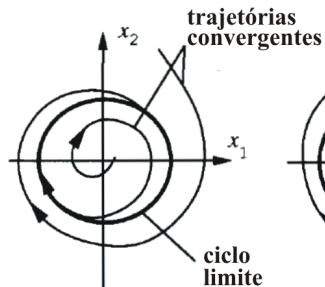
Ciclo limite é uma solução periódica isolada das equações

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

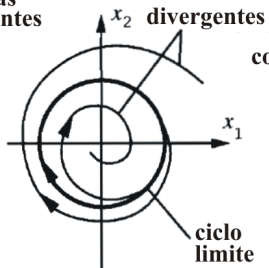


Tipos de Ciclos-limite



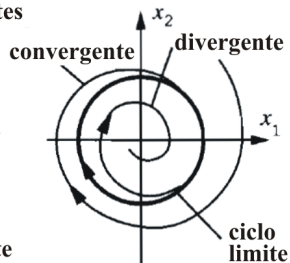
(a)

Estável



(b)

Instável



(c)

Semi-estável

Determinação de ciclos limite

- A determinação de ciclo limites pode apresentar dificuldades:
 - 1 Solução analítica pode não ser fácil.
 - 2 Soluções numéricas são aproximadas e portanto podem ser imprecisas quando indicam um ciclo limite.



Existência de ciclos limite

- A existência de ciclos limite é importante já que:
 - ① Sistema de controle não devem oscilar e portanto não devem apresentar ciclos limite.
 - ② No projeto de osciladores são requeridos ciclos limite estáveis.
- Para sistemas de segunda ordem existem métodos analíticos que permitem determinar a existência de soluções periódicas



Teorema do Índice (Poincaré)

Enunciado

- Estabelece uma conexão entre a existência de um ciclo-limite e o número de pontos de equilíbrio que ele encerra;
- Notação empregada:
 - N : Número de nós, focos e centros encerrados por um ciclo-limite;
 - S : Número de pontos de sela contornados.

Teorema do Índice:

Se existe um ciclo-limite em um sistema não-linear autônomo de segunda ordem, então $N = S + 1$.

Teorema do Índice (Poincaré)

Observações

- O teorema estabelece uma condição necessária para a existência de ciclos limites;
- Pelo teorema, um ciclo-limite deve encerrar um nó, um foco, ou um centro **a mais** do que o número de pontos de sela;
- Note que, se $S = 0$, então a órbita periódica encerrará necessariamente um nó, foco ou centro.

Teorema do Índice (Poincaré)

Exemplo (1)

O sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 - 2x_1x_2\end{aligned}$$

tem dois pontos de equilíbrio, em $(0, 0)$ e em $(1, 1)$. Analisemos a estabilidade de ambos aplicando o método da linearização (*método indireto de Lyapunov*):

a) Para a origem, temos:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{(0,0)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \{\lambda_1, \lambda_2\} = \{-1, 1\}$$

Portanto, a origem é um **ponto de sela**.

Teorema do Índice (Poincaré)

Exemplo (2)

b) Para o ponto $(1, 1)$:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \{\lambda_1, \lambda_2\} = \left\{ \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2} \right\}$$

Logo, $(1, 1)$ é um **foco estável**.

Teorema do Índice (Poincaré)

Exemplo (2)

b) Para o ponto $(1, 1)$:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \{\lambda_1, \lambda_2\} = \left\{ \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2} \right\}$$

Logo, $(1, 1)$ é um **foco estável**.

- Conclusões:

Teorema do Índice (Poincaré)

Exemplo (2)

b) Para o ponto $(1, 1)$:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \{\lambda_1, \lambda_2\} = \left\{ \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2} \right\}$$

Logo, $(1, 1)$ é um **foco estável**.

- Conclusões:

- A única combinação de pontos de equilíbrio que pode ser encerrada por uma órbita periódica é o foco simples;

Teorema do Índice (Poincaré)

Exemplo (2)

b) Para o ponto $(1, 1)$:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \{\lambda_1, \lambda_2\} = \left\{ \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2} \right\}$$

Logo, $(1, 1)$ é um **foco estável**.

• Conclusões:

- A única combinação de pontos de equilíbrio que pode ser encerrada por uma órbita periódica é o foco simples;
- Outras possibilidades estão descartadas, como por exemplo uma órbita periódica compreendendo ambos os pontos de equilíbrio.

Condição suficiente para a não-existência de ciclos-limite

Teorema de Bendixson:

Para um sistema não-linear dado por

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

não pode existir ciclo-limite em uma região Ω do plano de fase na qual

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

não é zero e nem troca de sinal.

Condição suficiente para a não-existência de ciclos-limite

Exemplo

Considere o sistema não-linear:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= g(x_2) + 4x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= h(x_1) + 4x_1^2x_2\end{aligned}$$

Como

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 4(x_1^2 + x_2^2)$$

é sempre positiva exceto na origem, então o sistema não apresenta ciclos-limite em nenhuma região do plano de fase.

- Extensão de métodos de resposta em frequência para análise *aproximada* de sistemas não-lineares;

Funções Descritivas

- Extensão de métodos de resposta em frequência para análise *aproximada* de sistemas não-lineares;
- Ferramenta poderosa de análise e projeto devido à representação gráfica e *insight* físico;

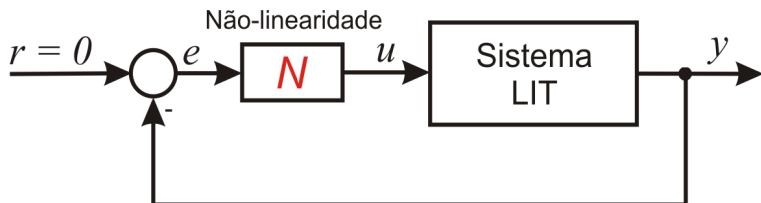
Funções Descritivas

- Extensão de métodos de resposta em frequência para análise *aproximada* de sistemas não-lineares;
- Ferramenta poderosa de análise e projeto devido à representação gráfica e *insight* físico;
- Abordagem difere da análise de estabilidade convencional pelo fato de ser mais usada para previsão da ocorrência de **ciclos-limite**;

Funções Descritivas

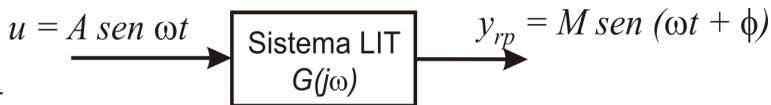
- Extensão de métodos de resposta em frequência para análise *aproximada* de sistemas não-lineares;
- Ferramenta poderosa de análise e projeto devido à representação gráfica e *insight* físico;
- Abordagem difere da análise de estabilidade convencional pelo fato de ser mais usada para previsão da ocorrência de **ciclos-limite**;
- Permite estimar não apenas a existência, mas também **frequência e amplitude** de ciclos-limite para sistemas com uma única malha de realimentação contendo elemento não-linear.

Diagrama de blocos com elemento não-linear



Princípios de Resposta em frequência

- Sistema linear e Invariante no tempo:

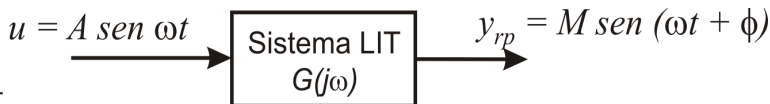


onde

$$M/A = |G(j\omega)| \quad \phi = \angle G(j\omega)$$

Princípios de Resposta em frequência

- Sistema linear e Invariante no tempo:



onde

$$M/A = |G(j\omega)| \quad \phi = \angle G(j\omega)$$

- Bloco não-linear:



$$M/A = ? \quad \phi = ?$$

Hipóteses sobre a Não-linearidade

- Um único elemento não linear presente;
- Elemento não-linear é invariante no tempo;
- Componente fundamental da expansão em série de Fourier é dominante;
- Não-linearidade apresenta características de função ímpar:
 $f(-x) = -f(x)$.

Funções descritivas

- Elemento não-linear estático é representado por um ganho que depende da amplitude do sinal de entrada
- Sinal de entrada é uma senoide
- Este método de análise é aproximado mas bons resultados são obtidos, especialmente devido às propriedades de filtragem da função de transferência da parte linear do sistema

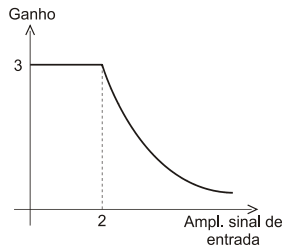
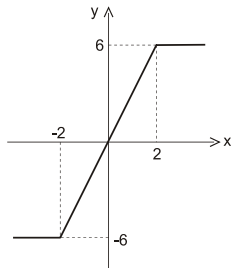


Esboço do método

- Não linearidade será representada por um **ganho equivalente**:

$$N = \frac{\text{Amplitude da saída, } y}{\text{Amplitude da senóide de entrada, } x}$$

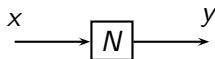
- Exemplo: não-linearidade do tipo **saturação**:



- Portanto, ganho que representa a não-linearidade **varia com a amplitude do sinal de entrada**.

Fundamentos do método

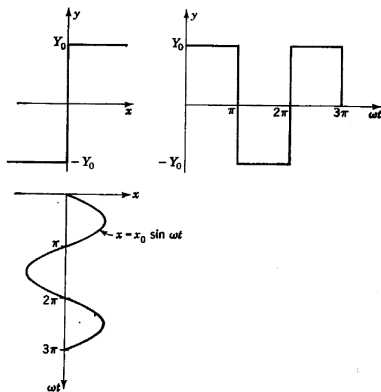
- Seja a entrada da não linearidade $x = x_0 \text{ sen } \omega_0 t$ e y a saída.



- Supondo a não-linearidade tipo on-off



Saída do sistema



Análise da saída

- O sinal de saída é um sinal periódico
- Pode ser expandido em série de Fourier
- Qualquer função periódica $f(t)$, com período T pode ser considerada como a soma de funções senoidais com frequências $0, \dots, n\omega_0$, onde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$



Série de Fourier

- A expressão geral da série trigonométrica de Fourier é dada por:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \dots + \dots \\ + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \dots$$

- A frequência ω_0 corresponde a componente fundamental, e é a frequência de $f(t)$
- A frequência $n\omega_0$ corresponde ao n -ésimo harmônico
- a_0 corresponde a uma componente de frequência zero (componente de corrente contínua)



Propriedades da forma de onda

- Dependendo das propriedades da função $f(t)$, apenas alguns dos termos da série de Fourier são diferentes de zero
- No caso da não-linearidade anterior, a saída $y(t)$ tem simetria de quarto de onda ímpar
- a série de Fourier só tem termos harmônicos ímpares em seno



Série de Fourier da saída

- Saída

$$y(t) = b_1 \text{sen } \omega_0 t + b_3 \text{sen } 3\omega_0 t + b_5 \text{sen } 5\omega_0 t + \dots$$

- A saída pode ser aproximada por

$$y(t) = b_1 \text{sen } \omega_0 t$$

- Justificativa

- 1 A maior contribuição à saída é dada pela frequência fundamental
- 2 As outras componentes são atenuadas pela ação de filtragem de parte linear do sistema



Relação entrada saída

- N é a função descritiva que relaciona a entrada e a saída

$$N = \frac{y}{x} \approx \frac{b_1 \operatorname{sen} \omega_0 t}{x_0 \operatorname{sen} \omega_0 t} = \frac{b_1}{x_0} = \frac{4 M_0}{\pi x_0}$$

- A função descritiva e portanto o ganho depende da amplitude da entrada
- Em um sistema linear, para cada senóide de entrada o ganho só depende da frequência desta senóide



Não-linearidade tipo Relé (“On-off”)

- Denotando por M a saturação do relé e por A a amplitude da senóide de entrada, vemos que a FD do relé é dada por

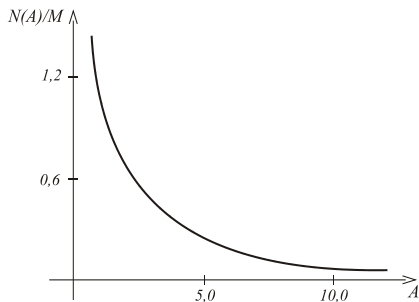
$$N(A) = \frac{4M}{\pi A}$$

Não-linearidade tipo Relé ("On-off")

- Denotando por M a saturação do relé e por A a amplitude da senóide de entrada, vimos que a FD do relé é dada por

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A}$$

- Gráfico de $N(A) \times A$:

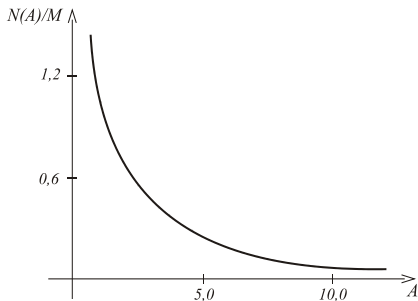


Não-linearidade tipo Relé ("On-off")

- Denotando por M a saturação do relé e por A a amplitude da senóide de entrada, vimos que a FD do relé é dada por

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A}$$

- Gráfico de $N(A) \times A$:



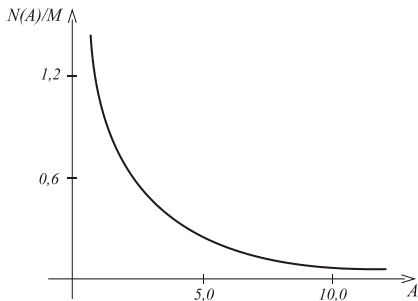
- Entradas infinitamente pequenas $\implies FD$ infinitamente grande, e

Não-linearidade tipo Relé ("On-off")

- Denotando por M a saturação do relé e por A a amplitude da senóide de entrada, vimos que a FD do relé é dada por

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A}$$

- Gráfico de $N(A) \times A$:

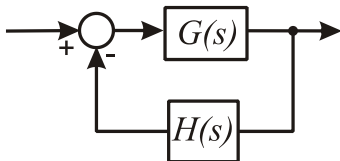


- Entradas infinitamente pequenas $\implies FD$ infinitamente grande, e
- Entradas infinitamente grandes $\implies FD$ infinitamente pequena.

Detecção de ciclos limites

Critério de Nyquist (I)

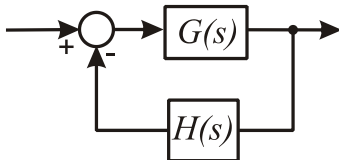
- O critério de Nyquist visa analisar a estabilidade de sistemas em MF do tipo:



Detecção de ciclos limites

Crítério de Nyquist (I)

- O critério de Nyquist visa analisar a estabilidade de sistemas em MF do tipo:



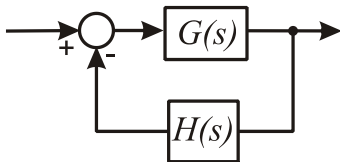
- Considera-se a equação característica na forma:

$$G(s)H(s) = -1$$

Detecção de ciclos limites

Crítério de Nyquist (I)

- O critério de Nyquist visa analisar a estabilidade de sistemas em MF do tipo:



- Considera-se a equação característica na forma:

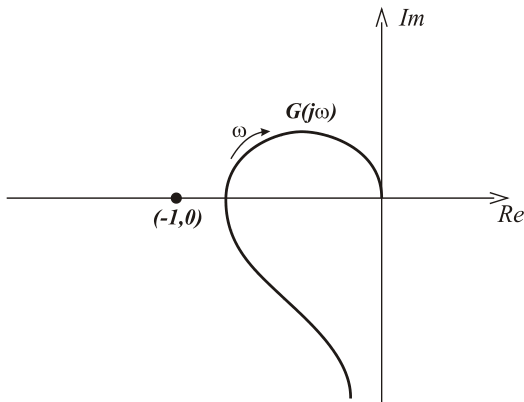
$$G(s)H(s) = -1$$

- Busca-se então mapear o percurso de Nyquist (que contorna todo o semiplano direito) via função $G(s)H(s)$ em um outro plano complexo.

Detecção de ciclos limites

Critério de Nyquist (II)

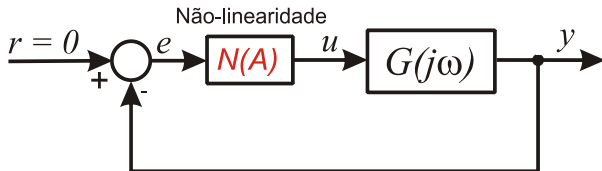
- O número de polos instáveis do sistema em MF é então determinado pelo número de vezes que o gráfico de $G(s)H(s)$ contorna o ponto $(-1, 0)$:



Detecção de ciclos limites

Critério de Nyquist Estendido (I)

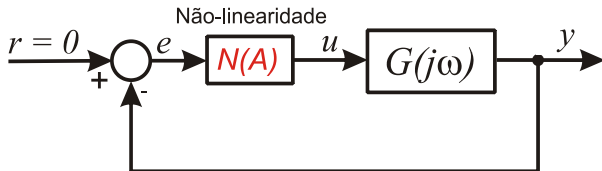
- Considere agora que o sistema contém uma linearidade:



Detecção de ciclos limites

Crítério de Nyquist Estendido (I)

- Considere agora que o sistema contém uma linearidade:



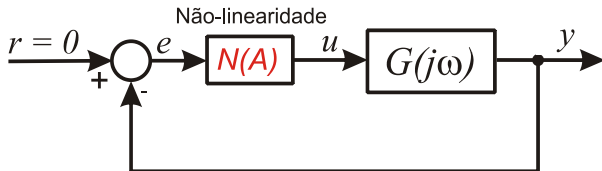
- A equação característica neste caso se torna $1 + N(A)G(j\omega) = 0$, que pode ser reescrita como:

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}$$

Detecção de ciclos limites

Critério de Nyquist Estendido (I)

- Considere agora que o sistema contém uma linearidade:



- A equação característica neste caso se torna $1 + N(A)G(j\omega) = 0$, que pode ser reescrita como:

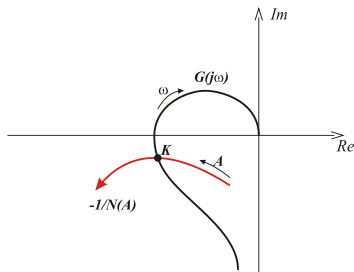
$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}$$

- **Critério de Nyquist estendido:** o número de polos instáveis passa a ser determinado pelo número de contornos do gráfico de $G(j\omega)$ em torno do ponto $-1/N(A)$.

Detecção de ciclos limites

Critério de Nyquist Estendido (II)

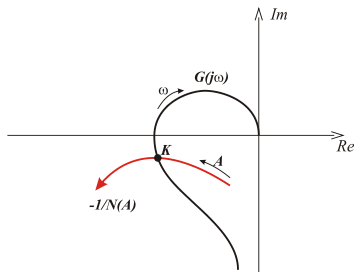
- Interpretação gráfica da equação $G(j\omega) = -1/N(A)$:



Detecção de ciclos limites

Critério de Nyquist Estendido (II)

- Interpretação gráfica da equação $G(j\omega) = -1/N(A)$:

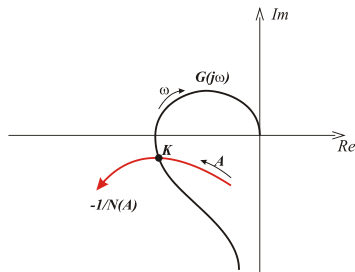


- Se as curvas de $G(j\omega)$ e de $-1/N(A)$ se interceptarem, isso aponta para a existência de um ciclo-limite. A interseção fornece estimativas para a amplitude A e a frequência ω do ciclo-limite;

Detecção de ciclos limites

Critério de Nyquist Estendido (II)

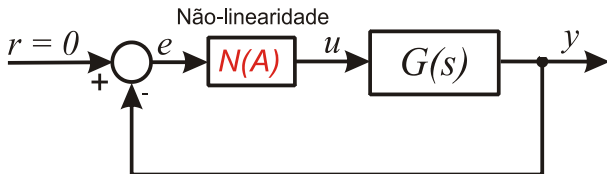
- Interpretação gráfica da equação $G(j\omega) = -1/N(A)$:



- Se as curvas de $G(j\omega)$ e de $-1/N(A)$ se interceptarem, isso aponta para a existência de um ciclo-limite. A interseção fornece estimativas para a amplitude A e a frequência ω do ciclo-limite;
- Para não-linearidades sem memória (relé, saturação, zona morta, etc.), a curva de $-1/N(A)$ fica sobre o eixo real.

Exemplo

Seja o sistema em malha fechada que contém um componente não-linear:



para o qual:

- Função de transferência do sistema linear:

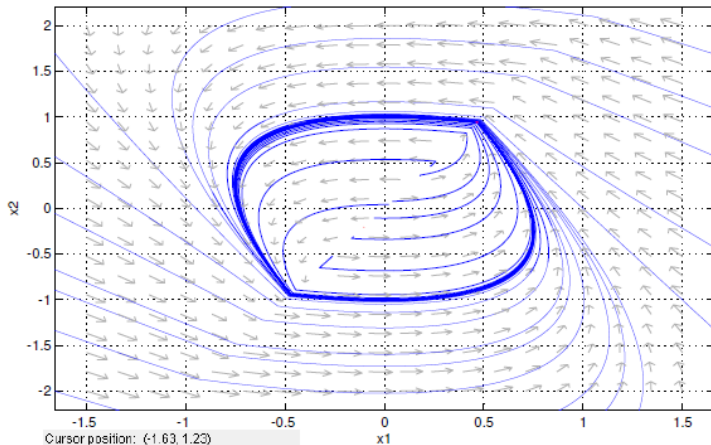
$$G(s) = \frac{1,2(1 - 2s)}{(1 + s)(1 + 2s)}$$

- Não-linearidade N : Relé com nível de saturação em $\pm 1,0$.

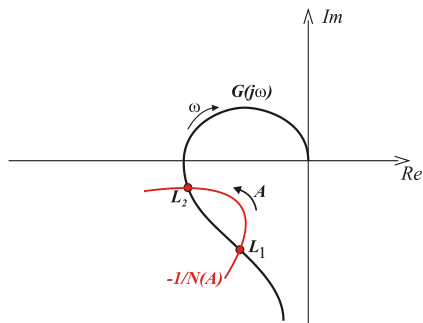
Verifique se o sistema apresenta ciclos-limites. Se este for o caso, determine estimativas para sua amplitude e frequência, e discuta sua estabilidade.

Trajetórias no Plano de Fase para exemplo

$$\begin{aligned}x_1' &= -1.5x_1 - 0.5x_2 - \text{sign}(-1.2x_1 + 0.6x_2) \\x_2' &= x_1\end{aligned}$$



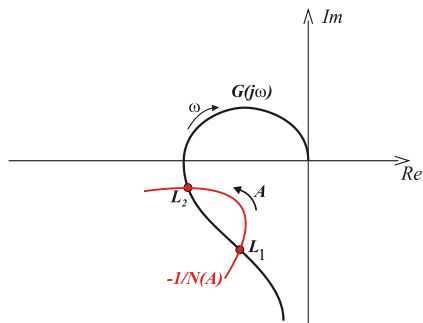
Estabilidade de Ciclos-Limite



- Depende do sentido da curva $-1/N(A)$ no ponto de interseção e do critério de Nyquist:

- **Critério:** Se pontos próximos à interseção, *no sentido de aumento de A* , não são contornados pelo gráfico de Nyquist, o CL é estável. Em caso contrário, é instável.

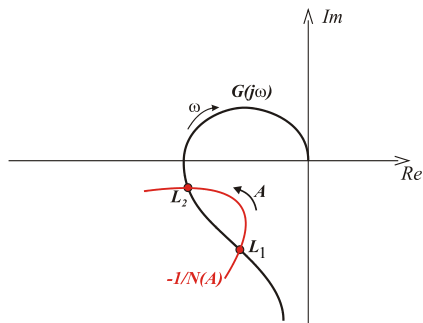
Estabilidade de Ciclos-Limite



- **Critério:** Se pontos próximos à interseção, *no sentido de aumento de A*, não são contornados pelo gráfico de Nyquist, o CL é estável. Em caso contrário, é instável.

- Depende do sentido da curva $-1/N(A)$ no ponto de interseção e do critério de Nyquist:
 - Ciclo limite correspondente ao ponto L_1 é *instável*;

Estabilidade de Ciclos-Limite

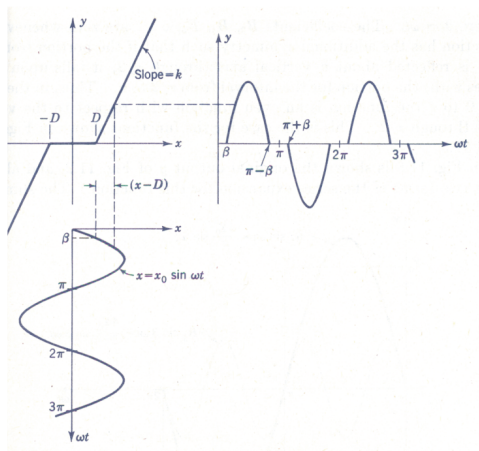


- **Critério:** Se pontos próximos à interseção, *no sentido de aumento de A*, não são contornados pelo gráfico de Nyquist, o CL é estável. Em caso contrário, é instável.

- Depende do sentido da curva $-1/N(A)$ no ponto de interseção e do critério de Nyquist:

- Ciclo limite correspondente ao ponto L_1 é *instável*;
- Ciclo limite correspondente ao ponto L_2 é *estável*.

Não-linearidade do tipo zona morta



Série de Fourier

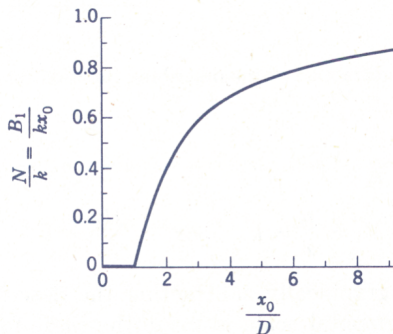
- a saída tem simetria de quarto de onda ímpar;
- Saída aproximada:

$$y(t) = b_1 \text{sen } \omega_0 t$$

- Função descritiva:

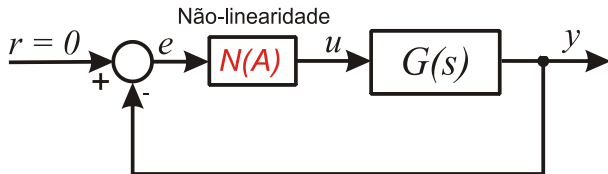
$$N = \frac{y}{x} \approx \frac{b_1 \text{sen } \omega_0 t}{x_0 \text{sen } \omega_0 t} = \frac{b_1}{x_0} = \begin{cases} \frac{k}{\pi} (\pi - 2\beta - \text{sen}2\beta), & \text{para } x_0 > D \\ 0, & \text{para } 0 \leq x_0 \leq D \end{cases}$$

Gráfico da função descritiva



Exemplo

Seja o sistema em malha fechada que contém um componente não-linear:



para o qual:

- Função de transferência do sistema linear:

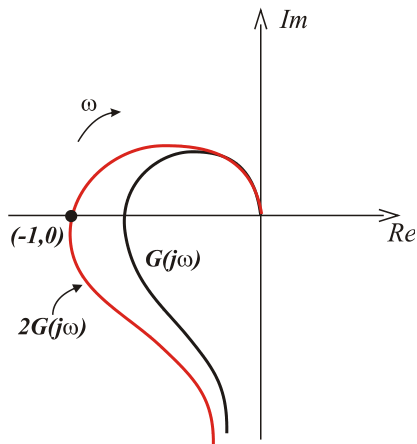
$$G(s) = \frac{2,5}{s(1+s)(1+0,25s)}$$

- Não-linearidade N : zona morta com $k = 4$ e $D = 0,5$.

Solução (I)

- Substituindo a não linearidade por um ganho K e aplicando $R-H$, obtem-se:

$$K_{crit} = 2$$



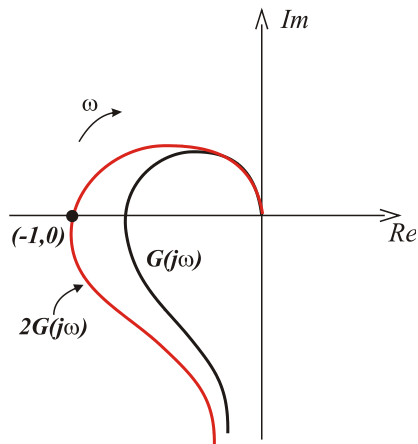
Solução (I)

- Substituindo a não linearidade por um ganho K e aplicando $R-H$, obtem-se:

$$K_{crit} = 2$$

- Portanto, $N_{cl} = 2$, e

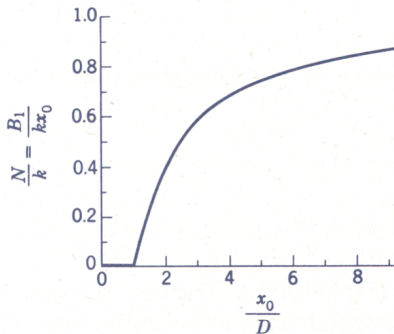
$$\frac{N_{cl}}{k} = \frac{2}{4} = 0,5$$



Solução (II)

- Com $N_{cl}/k = 0,5$,
obtem-se da curva da
 FD ao lado:

$$\frac{x_0}{D} = 2,5$$



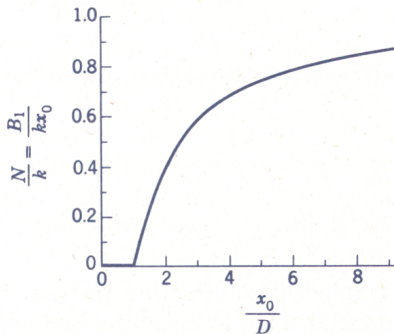
Solução (II)

- Com $N_{cl}/k = 0,5$, obtém-se da curva da *FD* ao lado:

$$\frac{x_0}{D} = 2,5$$

- Portanto, a amplitude estimada para o *CL* é

$$x_0 = 2,5 \times 0,5 = 1,25$$



Solução (II)

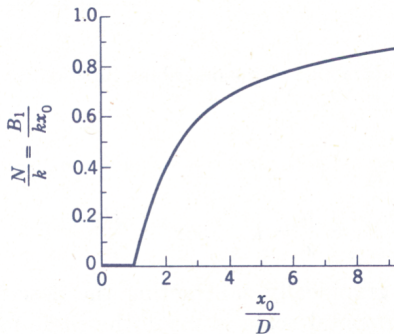
- Com $N_{cl}/k = 0,5$, obtém-se da curva da FD ao lado:

$$\frac{x_0}{D} = 2,5$$

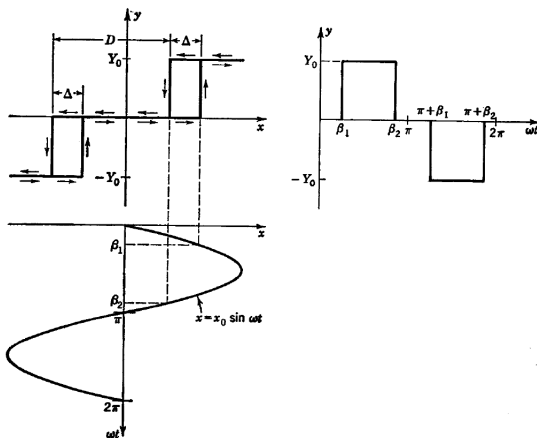
- Portanto, a amplitude estimada para o CL é

$$x_0 = 2,5 \times 0,5 = 1,25$$

- A frequência estimada para o CL pode ser obtida do critério de R-H.



Funções descritivas com fase



Série de Fourier

- Usando a série de Fourier

$$f(t) = c_0 + \sum_1^{\infty} c_n \text{sen}(n\omega_0 t + \theta_n)$$

- onde

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\theta_n = \text{tg}^{-1} \frac{a_n}{b_n}$$



Termos fundamentais

- Fundamental
- Fase
- onde

$$c_1 = \frac{4Y_0}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$$

$$\operatorname{sen} \beta_1 = \frac{D + \Delta/2}{x_0}$$

$$\operatorname{sen} \beta_2 = \frac{D - \Delta/2}{x_0}$$



Função descritiva

- Função descritiva dada por

$$N = \frac{y}{x} = \frac{c_1 \operatorname{sen}(\omega t + \phi)}{x_0 \operatorname{sen} \omega t} = |N| \angle \phi$$

- Fase

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$$

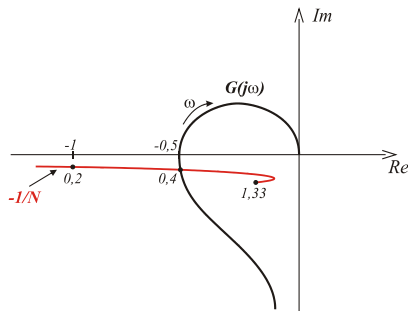
- Magnitude

$$|N| = \frac{4Y_0}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$$



Função descritiva com defasagem

- Curva de $-1/N$ para $\Delta/D = 1,0$ e $D/Y_0 = 1/8$:



- Nota-se que haverá instabilidade quando

$$\frac{D}{x_0} > 0,4 \implies x_0 \leq 2,5D$$

- Funções descritivas apresentarão defasagem quando o elemento não-linear é tal que um dado valor de entrada pode produzir mais do que um valor na saída.