Exemplo: Domínio de atração para sistema com múltiplos pontos de equilíbrio

Seja o sistema descrito por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_2^3 \end{aligned}$$

Determine o domínio de atração em relação à origem para a seguinte candidata a função de Lyapunov:

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

Domínio de atração para sist. com múlt. pts. equilíbrio

Solução (I)

a) Determinação dos pontos de equilíbrio

Como

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_1^3 \\ -x_2 + x_2^3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1(x_1^2 - 1) = 0 \\ x_2(x_2^2 - 1) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \{0, 1, -1\} \\ x_2 = \{0, 1, -1\} \end{cases}$$

Portanto, os pontos de equilíbrio são obtidos como os 9 arranjos (com repetições) destes valores:

$$\mathbf{x}^e = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

b) Determinação do domínio de atração

Como a candidata a função de Lyapunov é

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

temos

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$$

ou seja

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1(-x_1 + x_1^3) + 2(-x_2 + x^3)$$

ou ainda

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2\left[x_1^2(x_1^2 - 1) + x_2^2(x_2^2 - 1)\right]$$

Portanto

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \prec 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2(x_1^2 - 1) + x_2^2(x_2^2 - 1) < 0$$

- Vimos que $\dot{V}(\mathbf{x}) \prec 0$ é equivalente a

$$x_1^2(x_1^2 - 1) + x_2^2(x_2^2 - 1) < 0 \tag{1}$$

Domínio de atração para sist. com múlt. pts. equilíbrio

Solução (III)

- Vimos que $\dot{V}(\mathbf{x}) \prec 0$ é equivalente a

$$x_1^2(x_1^2 - 1) + x_2^2(x_2^2 - 1) < 0 \tag{1}$$

- Uma condição suficiente para isso é que

$$\begin{array}{c} x_1^2 < 1 \\ x_2^2 < 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} |x_1| < 1 \\ |x_2| < 1 \end{array} \tag{2}$$

cuja representação no plano de fase é um quadrado centrado na origem, de lado igual a 2. Esta região se qualifica portanto como um domínio de atração para a origem.

Domínio de atração para sist. com múlt. pts. equilíbrio

Solução (III)

- Vimos que $\dot{V}(\mathbf{x}) \prec 0$ é equivalente a

$$x_1^2(x_1^2 - 1) + x_2^2(x_2^2 - 1) < 0 \qquad (1)$$

- Uma condição suficiente para isso é que

$$\begin{array}{c} x_1^2 < 1 \\ x_2^2 < 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} |x_1| < 1 \\ |x_2| < 1 \end{array} \qquad (2)$$

  cuja representação no plano de fase é um quadrado centrado na origem, de lado igual a 2. Esta região se qualifica portanto como um domínio de atração para a origem.
- Entretanto, observa-se de (1) que podem existir outras combinações de x_1 e x_2 não contempladas em (2) que também satisfaçam a condição $\dot{V}(\mathbf{x}) \prec 0$.

Domínio de atração para sist. com múlt. pts. equilíbrio

Solução (III)

- Vimos que $\dot{V}(\mathbf{x}) \prec 0$ é equivalente a

$$x_1^2(x_1^2 - 1) + x_2^2(x_2^2 - 1) < 0 \tag{1}$$

- Uma condição suficiente para isso é que

$$\begin{array}{l} x_1^2 < 1 \\ x_2^2 < 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} |x_1| < 1 \\ |x_2| < 1 \end{array} \tag{2}$$

  cuja representação no plano de fase é um quadrado centrado na origem, de lado igual a 2. Esta região se qualifica portanto como um domínio de atração para a origem.
- Entretanto, observa-se de (1) que podem existir outras combinações de x_1 e x_2 não contempladas em (2) que também satisfaçam a condição $\dot{V}(\mathbf{x}) \prec 0$.
- O slide seguinte apresenta o domínio de atração obtido de (2) e o domínio de atração exato, obtido via solução numérica de (1).

Domínio de atração para sist. com múlt. pts. equilíbrio

Domínios de atração exato e calculado