Fundamentos de Controle

Capítulo 4: Controle Ótimo e Filtro de Kalman

Profs. Antonio Simões Costa e Hamilton Silveira

EEL - UFSC

- Seja o sistema contínuo controlável, de ordem n,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

- Seja o sistema contínuo controlável, de ordem n,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

- Deseja-se encontrar a lei de controle que minimiza o funcional J :

$$\min_{u} \; J = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}(\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + Ru^2)dt$$

  onde $\mathbf{Q}$ é positiva semidefinida e $R > 0$;

- Seja o sistema contínuo controlável, de ordem n,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

- Deseja-se encontrar a lei de controle que minimiza o funcional J :

$$\min_{u} \; J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + Ru^2)dt$$

  onde $\mathbf{Q}$ é positiva semidefinida e $R > 0$;

- Mostra-se que a solução é do tipo

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x},$$

  onde o vetor $\mathbf{K}$ tem dimensão $[1 \times n]$;

- Seja o sistema contínuo controlável, de ordem n,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

- Deseja-se encontrar a lei de controle que minimiza o funcional J :

$$\min_{u} \; J = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} (\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + Ru^2)dt$$

  onde $\mathbf{Q}$ é positiva semidefinida e $R > 0$;
- Mostra-se que a solução é do tipo

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x},$$

  onde o vetor $\mathbf{K}$ tem dimensão $[1 \times n]$;
- Para obter $\mathbf{K}$, resolve-se a Equação algébrica de Riccati contínua:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}R^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = -\mathbf{Q}$$

- Seja o sistema contínuo controlável, de ordem n,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

- Deseja-se encontrar a lei de controle que minimiza o funcional J :

$$\min_{u} \; J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + Ru^2)dt$$

  onde $\mathbf{Q}$ é positiva semidefinida e $R > 0$;
- Mostra-se que a solução é do tipo

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x},$$

  onde o vetor $\mathbf{K}$ tem dimensão $[1 \times n]$;
- Para obter $\mathbf{K}$, resolve-se a Equação algébrica de Riccati contínua:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}R^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = -\mathbf{Q}$$

- $\mathbf{K}$ é então dado por:

$$\mathbf{K} = R^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}$$

Observações:

- A matriz $\mathbf{Q}$ e o fator escalar R ponderam os efeitos da minização sobre os estados e a entrada, respectivamente:

Observações:

- A matriz $\mathbf{Q}$ e o fator escalar R ponderam os efeitos da minização sobre os estados e a entrada, respectivamente:
  - $diag(\mathbf{Q}) > R$: min $\|\mathbf{x}\|$ prevalece sobre min $|u|$ (esforço de controle);

Observações:

- A matriz $\mathbf{Q}$ e o fator escalar R ponderam os efeitos da minização sobre os estados e a entrada, respectivamente:
  - $diag(\mathbf{Q}) > R$: min $\|\mathbf{x}\|$ prevalece sobre min $|u|$ (esforço de controle);
  - $R > diag(\mathbf{Q})$: enfatiza-se a redução do esforço de controle.

Observações:

- A matriz $\mathbf{Q}$ e o fator escalar R ponderam os efeitos da minização sobre os estados e a entrada, respectivamente:
  - $diag(\mathbf{Q}) > R$: min $\|\mathbf{x}\|$ prevalece sobre min $|u|$ (esforço de controle);
  - $R > diag(\mathbf{Q})$: enfatiza-se a redução do esforço de controle.
- Calculando-se os ganhos $\mathbf{K}$ como acima, o sistema em malha fechada

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}$$

é estável, isto é, as raízes de

$$\det\left[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\right] = 0$$

têm todas parte real < 0;

Observações:

- A matriz $\mathbf{Q}$ e o fator escalar R ponderam os efeitos da minização sobre os estados e a entrada, respectivamente:
  - $diag(\mathbf{Q}) > R$: min $\|\mathbf{x}\|$ prevalece sobre min $|u|$ (esforço de controle);
  - $R > diag(\mathbf{Q})$: enfatiza-se a redução do esforço de controle.
- Calculando-se os ganhos $\mathbf{K}$ como acima, o sistema em malha fechada

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}$$

  é estável, isto é, as raízes de

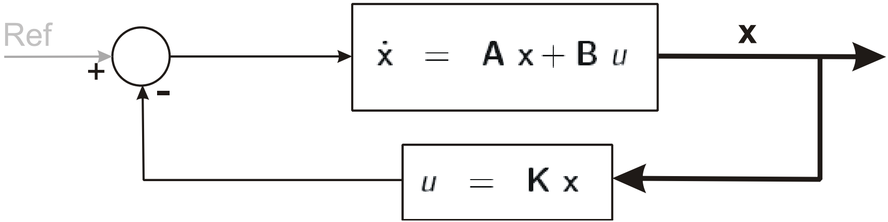
$$\det\left[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\right] = 0$$

  têm todas parte real < 0;
- Consequentemente

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

Regulador Linear-Quadrático (LQR)

Sistema em Malha Fechada



Para o sistema representado pela equação dinâmica:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

encontre a lei de controle baseada na abordagem LQR que minimiza o funcional:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x_1^2 + x_2^2 + u^2) dt$$

Adicionalmente:

- Verifique a estabilidade do sistema em malha fechada;
- Re-examine a solução se $R = 0,5$;
- Idem, se $R = 2$.

Solução:

- Resolvendo-se a Eq. de Riccati, obtem-se:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

que é positiva definida (verifique!);

Solução:

- Resolvendo-se a Eq. de Riccati, obtem-se:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

  que é positiva definida (verifique!);

- O ganho $\mathbf{K}$ é obtido como

$$\mathbf{K} = R^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = (1) \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução:

- Resolvendo-se a Eq. de Riccati, obtem-se:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

  que é positiva definida (verifique!);

- O ganho $\mathbf{K}$ é obtido como

$$\mathbf{K} = R^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = (1) \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Lei de controle ótimo:

$$u = -\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Solução:

- Resolvendo-se a Eq. de Riccati, obtem-se:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

  que é positiva definida (verifique!);
- O ganho $\mathbf{K}$ é obtido como

$$\mathbf{K} = R^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = (1) \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Lei de controle ótimo:

$$u = - \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

- Autovalores em malha fechada:

$$\det\left[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\right] = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{vmatrix} = (s+1)^2$$

- Portanto os autovalores em malha fechada são:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

e o sistema é estável;

- Portanto os autovalores em malha fechada são:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

  e o sistema é estável;
- Se agora $R = 0,5$, obteríamos

$$\mathbf{K}_1 = \left[\begin{array}{cc} 1,414 & 3,414 \end{array}\right];$$

- Portanto os autovalores em malha fechada são:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

e o sistema é estável;

- Se agora $R = 0,5$, obteríamos

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1,414 & 3,414 \end{bmatrix};$$

- Como $\|\mathbf{K}_1\| > \|\mathbf{K}\|$, teremos maior esforço de controle;

- Portanto os autovalores em malha fechada são:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

  e o sistema é estável;

- Se agora $R = 0,5$, obteríamos

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1,414 & 3,414 \end{bmatrix};$$

- Como $\|\mathbf{K}_1\| > \|\mathbf{K}\|$, teremos maior esforço de controle;
- Se $R = 2$,

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0,7 & 2,707 \end{bmatrix};$$

- Portanto os autovalores em malha fechada são:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

e o sistema é estável;

- Se agora $R = 0,5$, obteríamos

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1,414 & 3,414 \end{bmatrix};$$

- Como $\|\mathbf{K}_1\| > \|\mathbf{K}\|$, teremos maior esforço de controle;
- Se $R = 2$,

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0,7 & 2,707 \end{bmatrix};$$

- Neste caso, $\|\mathbf{K}_2\| < \|\mathbf{K}\| \Rightarrow$ menor esforço de controle.

- Seja o sistema discreto controlável, de ordem n,

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k)$$

- Seja o sistema discreto controlável, de ordem n,

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k)$$

- Deseja-se encontrar a lei de controle que minimiza J :

$$\min_{u(k)} \; J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(\mathbf{k}) + Ru^2(k))$$

onde $\mathbf{Q}$ é positiva semidefinida e $R > 0$;

- Seja o sistema discreto controlável, de ordem n,

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k)$$

- Deseja-se encontrar a lei de controle que minimiza J :

$$\min_{u(k)} J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(\mathbf{k}) + Ru^2(k))$$

onde $\mathbf{Q}$ é positiva semidefinida e $R > 0$;

- Sendo $\mathbf{K}$ um vetor $1 \times n$, mostra-se que a solução é do tipo:

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

- Seja o sistema discreto controlável, de ordem n,

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi x}(k) + \mathbf{\Gamma} u(k)$$

- Deseja-se encontrar a lei de controle que minimiza J :

$$\min_{u(k)} \; J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(\mathbf{k}) + Ru^2(k))$$

onde $\mathbf{Q}$ é positiva semidefinida e $R > 0$;

- Sendo $\mathbf{K}$ um vetor $1 \times n$, mostra-se que a solução é do tipo:

$$u(k) = -\mathbf{Kx}(k)$$

- $\mathbf{K}$ obtido recursivamente a Eq. de Riccati discreta, com $\mathbf{P}(0) = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{Q} + \mathbf{\Phi}^T\mathbf{P}(k)\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Phi}^T\mathbf{P}(k)\mathbf{\Gamma}(R+\mathbf{\Gamma}^T\mathbf{P}(k)\mathbf{\Gamma})^{-1}\mathbf{\Gamma}^T\mathbf{P}(k)\mathbf{\Phi}$$

- Seja o sistema discreto controlável, de ordem n,

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k)$$

- Deseja-se encontrar a lei de controle que minimiza J :

$$\min_{u(k)} \ J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(\mathbf{k}) + Ru^2(k))$$

  onde $\mathbf{Q}$ é positiva semidefinida e $R > 0$;
- Sendo $\mathbf{K}$ um vetor $1 \times n$, mostra-se que a solução é do tipo:

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

- $\mathbf{K}$ obtido recursivamente a Eq. de Riccati discreta, com $\mathbf{P}(0) = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{Q} + \mathbf{\Phi}^T\mathbf{P}(k)\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Phi}^T\mathbf{P}(k)\mathbf{\Gamma}(R+\mathbf{\Gamma}^T\mathbf{P}(k)\mathbf{\Gamma})^{-1}\mathbf{\Gamma}^T\mathbf{P}(k)\mathbf{\Phi}$$

- Finalmente:

$$\mathbf{K} = (R + \mathbf{\Gamma}^T\mathbf{P}\mathbf{\Gamma})^{-1}\mathbf{\Gamma}^T\mathbf{P}\mathbf{\Phi}$$

Observações:

- A matriz $\mathbf{Q}$ e o fator escalar R ponderam os efeitos da minização sobre os estados e a entrada, respectivamente;

Observações:

- A matriz $\mathbf{Q}$ e o fator escalar R ponderam os efeitos da minização sobre os estados e a entrada, respectivamente;
- Se $\mathbf{Q}$ for definida positiva e o R for positivo, a matriz $\mathbf{K}$ calculada conforme acima garante que as raízes da equação característica,

$$\det\left[zI - (\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma}\mathbf{K})\right] = 0,$$

estejam dentro do círculo unitário;

Observações:

- A matriz $\mathbf{Q}$ e o fator escalar R ponderam os efeitos da minização sobre os estados e a entrada, respectivamente;
- Se $\mathbf{Q}$ for definida positiva e o R for positivo, a matriz $\mathbf{K}$ calculada conforme acima garante que as raízes da equação característica,

$$\det\left[zI - (\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma K})\right] = 0,$$

estejam dentro do círculo unitário;

- Garante-se portanto que

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}(k) = \mathbf{0},$$

Encontrar a solução ótima do problema linear-quadrático para o sistema representado pela equação dinâmica

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k),$$

considerando $\mathbf{Q} = 10\mathbf{I}$ e $R = 1$.
Verifique também a estabilidade do sistema em malha fechada.

Solução:

- Do processo, podemos escrever

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solução:

- Do processo, podemos escrever

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- O sinal de controle é calculado por

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

Solução:

- Do processo, podemos escrever

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- O sinal de controle é calculado por

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

- A matriz **P** é calculada pela fórmula

$$\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{Q} + \mathbf{\Phi}^T\mathbf{P}(k)\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Phi}^T\mathbf{P}(k)\mathbf{\Gamma}(R+\mathbf{\Gamma}^T\mathbf{P}(k)\mathbf{\Gamma})^{-1}\mathbf{\Gamma}^T\mathbf{P}(k)\mathbf{\Phi}$$

  considerando-se

$$\mathbf{Q} = 10\ \mathbf{I}, \quad R = 1, \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{0}.$$

- Em 10 iterações, tem-se

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 83,176 & 36,768 \\ 36,768 & 34,703 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{K} = \left(R + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P} \mathbf{\Gamma}\right)^{-1} \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P} \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 7,354 & 4,941 \end{bmatrix}.$$

- Portanto, a lei de controle é:

$$u = -\begin{bmatrix} 7,354 & 4,941 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

- Portanto, a lei de controle é:

$$u = -\begin{bmatrix} 7,354 & 4,941 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

- Os autovalores do sistema em malha fechada são obtidos de

$$\det\left[zI - \left(\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma K}\right)\right] = 0;$$

- Portanto, a lei de controle é:

$$u = -\begin{bmatrix} 7,354 & 4,941 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

- Os autovalores do sistema em malha fechada são obtidos de

$$\det\left[zI - \left(\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma K}\right)\right] = 0;$$

- Com $\mathbf{\Phi}$ e $\mathbf{\Gamma}$ dados e $\mathbf{K}$ calculado conforme acima, temos que

$$\lambda_1^{MF} = 0,124 \quad \text{e} \quad \lambda_2^{MF} = -0,478$$

- Portanto, a lei de controle é:

$$u = -\begin{bmatrix} 7,354 & 4,941 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

- Os autovalores do sistema em malha fechada são obtidos de

$$\det\left[zI - (\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma K})\right] = 0;$$

- Com $\mathbf{\Phi}$ e $\mathbf{\Gamma}$ dados e $\mathbf{K}$ calculado conforme acima, temos que

$$\lambda_1^{MF} = 0,124 \quad \text{e} \quad \lambda_2^{MF} = -0,478$$

- Como

$$\left|\lambda_i^{MF}\right| < 1$$

o sistema em malha fechada é estável.

- O Capítulo 3 introduziu uma abordagem via alocação arbitrária de polos para o projeto de controladores baseados na lei de controle $u = -\mathbf{K}\ \mathbf{x}$;

- O Capítulo 3 introduziu uma abordagem via alocação arbitrária de polos para o projeto de controladores baseados na lei de controle $u = -\mathbf{K}\ \mathbf{x}$;
- Este capítulo apresenta uma abordagem alternativa para implementar a mesma lei de controle, onde $\mathbf{K}$ é obtido através da minimização de um funcional $J(\hat{\mathbf{x}})$, ou seja, mediante uma alocação ótima dos polos;

- O Capítulo 3 introduziu uma abordagem via alocação arbitrária de polos para o projeto de controladores baseados na lei de controle $u = -\mathbf{K}\ \mathbf{x}$;
- Este capítulo apresenta uma abordagem alternativa para implementar a mesma lei de controle, onde $\mathbf{K}$ é obtido através da minimização de um funcional $J(\hat{\mathbf{x}})$, ou seja, mediante uma alocação ótima dos polos;
- Também foi visto no Capítulo 3 que o projeto de observadores de estado pode igualmente ser realizado via alocação arbitrária de polos;

- O Capítulo 3 introduziu uma abordagem via alocação arbitrária de polos para o projeto de controladores baseados na lei de controle $u = -\mathbf{K}\ \mathbf{x}$;
- Este capítulo apresenta uma abordagem alternativa para implementar a mesma lei de controle, onde $\mathbf{K}$ é obtido através da minimização de um funcional $J(\hat{\mathbf{x}})$, ou seja, mediante uma alocação ótima dos polos;
- Também foi visto no Capítulo 3 que o projeto de observadores de estado pode igualmente ser realizado via alocação arbitrária de polos;
- É natural portanto levantar a questão sobre a possibilidade de se utilizar também uma abordagem ótima para o projeto do observador;

- O Capítulo 3 introduziu uma abordagem via alocação arbitrária de polos para o projeto de controladores baseados na lei de controle $u = -\mathbf{K}\ \mathbf{x}$;
- Este capítulo apresenta uma abordagem alternativa para implementar a mesma lei de controle, onde $\mathbf{K}$ é obtido através da minimização de um funcional $J(\hat{\mathbf{x}})$, ou seja, mediante uma alocação ótima dos polos;
- Também foi visto no Capítulo 3 que o projeto de observadores de estado pode igualmente ser realizado via alocação arbitrária de polos;
- É natural portanto levantar a questão sobre a possibilidade de se utilizar também uma abordagem ótima para o projeto do observador;
- A resposta à pergunta é afirmativa, e se baseia em uma formulação estocástica para o problema, que leva em conta:

- O Capítulo 3 introduziu uma abordagem via alocação arbitrária de polos para o projeto de controladores baseados na lei de controle $u = -\mathbf{K}\ \mathbf{x}$;
- Este capítulo apresenta uma abordagem alternativa para implementar a mesma lei de controle, onde $\mathbf{K}$ é obtido através da minimização de um funcional $J(\hat{\mathbf{x}})$, ou seja, mediante uma alocação ótima dos polos;
- Também foi visto no Capítulo 3 que o projeto de observadores de estado pode igualmente ser realizado via alocação arbitrária de polos;
- É natural portanto levantar a questão sobre a possibilidade de se utilizar também uma abordagem ótima para o projeto do observador;
- A resposta à pergunta é afirmativa, e se baseia em uma formulação estocástica para o problema, que leva em conta:
  - a incidência de ruídos no processo (entrada), e

- O Capítulo 3 introduziu uma abordagem via alocação arbitrária de polos para o projeto de controladores baseados na lei de controle $u = -\mathbf{K}\ \mathbf{x}$;
- Este capítulo apresenta uma abordagem alternativa para implementar a mesma lei de controle, onde $\mathbf{K}$ é obtido através da minimização de um funcional $J(\hat{\mathbf{x}})$, ou seja, mediante uma alocação ótima dos polos;
- Também foi visto no Capítulo 3 que o projeto de observadores de estado pode igualmente ser realizado via alocação arbitrária de polos;
- É natural portanto levantar a questão sobre a possibilidade de se utilizar também uma abordagem ótima para o projeto do observador;
- A resposta à pergunta é afirmativa, e se baseia em uma formulação estocástica para o problema, que leva em conta:
  - a incidência de ruídos no processo (entrada), e
  - a incidência de ruídos de medição (saída).

Considera-se a incidência de ruídos no processo (entrada) e na medição (saída):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{w} \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + v \end{aligned}$$

onde

- $\mathbf{w}$: ruídos no processo, com média zero e variância $\mathbf{Q}_o \delta(t - \tau)$;

Considera-se a incidência de ruídos no processo (entrada) e na medição (saída):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{w} \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + v\end{aligned}$$

onde

- $\mathbf{w}$: ruídos no processo, com média zero e variância $\mathbf{Q}_o\delta(t-\tau)$;
- v: ruídos na medição, com média zero e variância $R_o\delta(t-\tau)$.

Considera-se a incidência de ruídos no processo (entrada) e na medição (saída):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{w} \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + v \end{aligned}$$

onde

- $\mathbf{w}$: ruídos no processo, com média zero e variância $\mathbf{Q}_o\delta(t-\tau)$;
- v: ruídos na medição, com média zero e variância $R_o\delta(t-\tau)$.
- Exemplo - Controle de uma aeronave:

Considera-se a incidência de ruídos no processo (entrada) e na medição (saída):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{w} \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + v\end{aligned}$$

onde

- $\mathbf{w}$: ruídos no processo, com média zero e variância $\mathbf{Q}_o\delta(t-\tau)$;
- v: ruídos na medição, com média zero e variância $R_o\delta(t-\tau)$.
- Exemplo - Controle de uma aeronave:
  - $\mathbf{w}$: perturbações aleatórias devido ao vento;

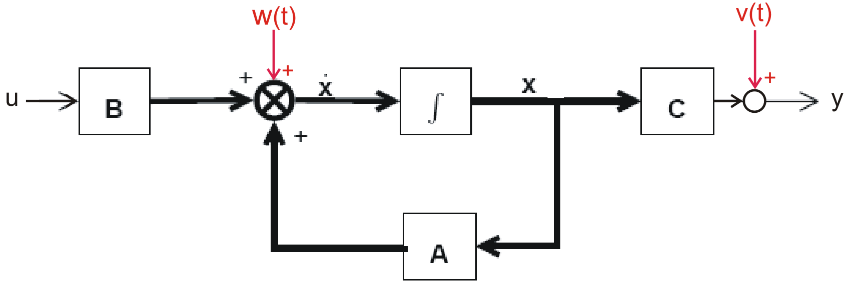
Considera-se a incidência de ruídos no processo (entrada) e na medição (saída):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{w}\\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + v\end{aligned}$$

onde

- $\mathbf{w}$: ruídos no processo, com média zero e variância $\mathbf{Q}_o\delta(t-\tau)$;
- v: ruídos na medição, com média zero e variância $R_o\delta(t-\tau)$.
- Exemplo - Controle de uma aeronave:
  - $\mathbf{w}$: perturbações aleatórias devido ao vento;
  - v : erros aleatórios devido a imprecisões nos sensores.

Representação dos Ruídos no Processo e na Medição



Observador ótimo na presença de ruídos (Filtro de Kalman)

- Kalman desenvolveu um observador ótimo capaz de minimizar os impactos dos ruídos do processo e de medição no erro de estimação;

Observador ótimo na presença de ruídos (Filtro de Kalman)

- Kalman desenvolveu um observador ótimo capaz de minimizar os impactos dos ruídos do processo e de medição no erro de estimação;
- A estrutura do observador é dada por:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(y - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})$$

- Kalman desenvolveu um observador ótimo capaz de minimizar os impactos dos ruídos do processo e de medição no erro de estimação;
- A estrutura do observador é dada por:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(y - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})$$

- O ganho **L** que minimiza o impacto dos ruídos no erro de estimação é dado por

$$\mathbf{L} = \mathbf{S}\mathbf{C}^T R_o^{-1}$$

Observador ótimo na presença de ruídos (Filtro de Kalman)

- Kalman desenvolveu um observador ótimo capaz de minimizar os impactos dos ruídos do processo e de medição no erro de estimação;
- A estrutura do observador é dada por:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(y - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})$$

- O ganho $\mathbf{L}$ que minimiza o impacto dos ruídos no erro de estimação é dado por

$$\mathbf{L} = \mathbf{S}\mathbf{C}^T R_o^{-1}$$

- A matriz $\mathbf{S}$ é a solução semidefinida positiva da equação de Riccati:

$$\mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{A}^T - \mathbf{S}\mathbf{C}^T R_o^{-1}\mathbf{C}\mathbf{S} = -\mathbf{Q}_o$$

Observador ótimo na presença de ruídos (Filtro de Kalman)

- Kalman desenvolveu um observador ótimo capaz de minimizar os impactos dos ruídos do processo e de medição no erro de estimação;
- A estrutura do observador é dada por:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(y - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})$$

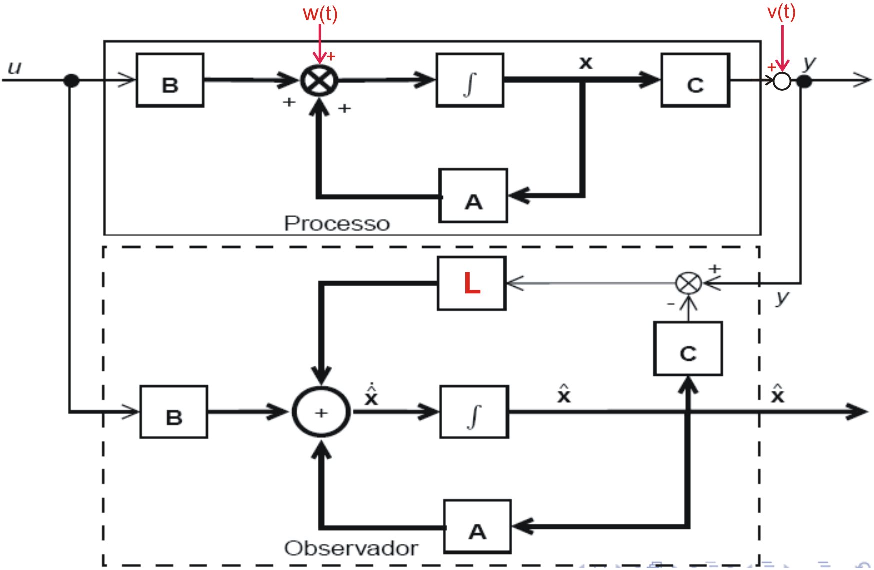
- O ganho **L** que minimiza o impacto dos ruídos no erro de estimação é dado por

$$\mathbf{L} = \mathbf{S}\mathbf{C}^T R_o^{-1}$$

- A matriz **S** é a solução semidefinida positiva da equação de Riccati:

$$\mathbf{AS} + \mathbf{SA}^T - \mathbf{SC}^T R_o^{-1}\mathbf{CS} = -\mathbf{Q}_o$$

- Observe a perfeita dualidade entre esta equação e a equação de Riccati do Regulador Linear-Quadrático, com **B** substituida por $\mathbf{C}^T$.


w(t)
v(t)
u
B
+
+
+
∫
x
C
+
y
A
Processo
L
+
−
y
C
B
+
ẋ̂
∫
x̂
x̂
A
Observador

- Os conceitos associados ao Filtro de Kalman são muito importantes e muito utilizados na Teoria da Estimação e suas aplicações práticas;

Filtro de Kalman contínuo: observações finais

- Os conceitos associados ao Filtro de Kalman são muito importantes e muito utilizados na Teoria da Estimação e suas aplicações práticas;
- Nestas aplicações, $\mathbf{Q}_o$ e R_o são de fato interpretadas como matrizes de covariância dos ruídos de medição e do processo, respectivamente;

Filtro de Kalman contínuo: observações finais

- Os conceitos associados ao Filtro de Kalman são muito importantes e muito utilizados na Teoria da Estimação e suas aplicações práticas;
- Nestas aplicações, $\mathbf{Q}_o$ e R_o são de fato interpretadas como matrizes de covariância dos ruídos de medição e do processo, respectivamente;
- Neste curso, entretanto, nosso interesse está no projeto de sistemas de controle;

Filtro de Kalman contínuo: observações finais

- Os conceitos associados ao Filtro de Kalman são muito importantes e muito utilizados na Teoria da Estimação e suas aplicações práticas;
- Nestas aplicações, $\mathbf{Q}_o$ e R_o são de fato interpretadas como matrizes de covariância dos ruídos de medição e do processo, respectivamente;
- Neste curso, entretanto, nosso interesse está no projeto de sistemas de controle;
- Desse ponto de vista, $\mathbf{Q}_o$ e R_o podem ser vistas como parâmetros de projeto, e não necessariamente como covariâncias dos ruídos de medição e do processo.

Filtro de Kalman discreto

- Seja o sistema discreto e *observável*, de ordem n:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) \\
y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k)
\end{aligned}
$$

Filtro de Kalman discreto

- Seja o sistema discreto e *observável*, de ordem n:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) \\
y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k)
\end{aligned}$$

- Podemos definir um observador da seguinte forma

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) + \mathbf{L}\left[y(k) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k)\right]$$

Filtro de Kalman discreto

- Seja o sistema discreto e *observável*, de ordem n:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

- Podemos definir um observador da seguinte forma

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) + \mathbf{L}\left[y(k) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k)\right]$$

- O vetor $\mathbf{L}$, de dimensão $[n \times 1]$, é obtido como:

$$\mathbf{L} = \mathbf{\Phi}\mathbf{S}\mathbf{C}^T\left(R_o + \mathbf{C}\mathbf{S}\mathbf{C}^T\right)^{-1}$$

Filtro de Kalman discreto

- Seja o sistema discreto e *observável*, de ordem n:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

- Podemos definir um observador da seguinte forma

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k) + \mathbf{L}\left[y(k) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k)\right]$$

- O vetor $\mathbf{L}$, de dimensão $[n \times 1]$, é obtido como:

$$\mathbf{L} = \mathbf{\Phi}\mathbf{S}\mathbf{C}^T\left(R_o + \mathbf{C}\mathbf{S}\mathbf{C}^T\right)^{-1}$$

- A matriz $\mathbf{S}$ é calculada como a solução "de regime permanente" da equação a diferenças:

$$\mathbf{S}(k+1) = \mathbf{Q}_o + \mathbf{\Phi}\mathbf{S}(k)\mathbf{\Phi}^T - \mathbf{\Phi}\mathbf{S}(k)\mathbf{C}^T\left(R_o + \mathbf{C}\mathbf{S}(k)\mathbf{C}^T\right)^{-1}\mathbf{C}\mathbf{S}(k)\mathbf{\Phi}^T$$

onde $\mathbf{Q}_o$ (positiva definida) e $R_o > 0$ são especificados como parâmetros de projeto e $\mathbf{S}(0) = \mathbf{0}$.

Exemplo para o caso discreto (I)

Encontrar um observador, baseado em filtro de Kalman, para o processo

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k), \end{aligned}$$

considerando $\mathbf{Q}_o = 10\mathbf{I}$ e $R_o = 1$.

Exemplo para o caso discreto (II)

Solução:

- Considera-se:

$$\mathbf{Q}_o = 10\mathbf{I}; \quad R_o = 1 \quad \mathbf{S}(0) = \mathbf{0}$$

Solução:

- Considera-se:

$$\mathbf{Q}_o = 10\mathbf{I}; \quad R_o = 1 \quad \mathbf{S}(0) = \mathbf{0}$$

- A matriz de Riccati é obtida a partir de

$$\mathbf{S}(k+1) = \mathbf{Q}_o + \mathbf{\Phi}\mathbf{S}(k)\mathbf{\Phi}^T - \mathbf{\Phi}\mathbf{S}(k)\mathbf{C}^T(R_o + \mathbf{C}\mathbf{S}(k)\mathbf{C}^T)^{-1}\mathbf{C}\mathbf{S}(k)\mathbf{\Phi}^T$$

Solução:

- Considera-se:

$$\mathbf{Q}_o = 10\mathbf{I}; \quad R_o = 1 \quad \mathbf{S}(0) = \mathbf{0}$$

- A matriz de Riccati é obtida a partir de

$$\mathbf{S}(k+1) = \mathbf{Q}_o + \mathbf{\Phi}\mathbf{S}(k)\mathbf{\Phi}^T - \mathbf{\Phi}\mathbf{S}(k)\mathbf{C}^T(R_o + \mathbf{C}\mathbf{S}(k)\mathbf{C}^T)^{-1}\mathbf{C}\mathbf{S}(k)\mathbf{\Phi}^T$$

- Em 10 iterações, tem-se

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 331,494 & 7,085 \\ 7,085 & 10,997 \end{bmatrix}$$

Exemplo para o caso discreto (II)

Solução:

- Considera-se:

$$\mathbf{Q}_o = 10\mathbf{I}; \quad R_o = 1 \quad \mathbf{S}(0) = \mathbf{0}$$

- A matriz de Riccati é obtida a partir de

$$\mathbf{S}(k+1) = \mathbf{Q}_o + \mathbf{\Phi}\mathbf{S}(k)\mathbf{\Phi}^T - \mathbf{\Phi}\mathbf{S}(k)\mathbf{C}^T(R_o + \mathbf{C}\mathbf{S}(k)\mathbf{C}^T)^{-1}\mathbf{C}\mathbf{S}(k)\mathbf{\Phi}^T$$

- Em 10 iterações, tem-se

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 331,494 & 7,085 \\ 7,085 & 10,997 \end{bmatrix}$$

- Portanto:

$$\mathbf{L} = \mathbf{\Phi}\mathbf{S}\mathbf{C}^T(R_o + \mathbf{C}\mathbf{S}\mathbf{C}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 7,085 \\ 0,997 \end{bmatrix}$$

Exemplo para o caso discreto (III)

- O Observador resultante é dado por:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}(k+1) &= (\mathbf{\Phi} - \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{\Gamma} u(k) + \mathbf{L} y(k) \\
&= \begin{bmatrix} -0,085 & 5 \\ 0,003 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 7,085 \\ 0,997 \end{bmatrix} y(k).
\end{aligned}
$$

- À combinação de um controlador LQR e um observador de estados baseado no Filtro de Kalman dá-se o nome de *Problema Linear-Quadrático-Gaussiano* (LQG);

Problema Linear-Quadrático-Gaussiano (LQG)

Definição

- À combinação de um controlador LQR e um observador de estados baseado no Filtro de Kalman dá-se o nome de *Problema Linear-Quadrático-Gaussiano* (LQG);
- O termo *Gaussiano* refere-se ao fato de que a distribuição estatística dos ruídos no processo (ω) e de medição (v) é suposta ser Gaussiana;

- À combinação de um controlador LQR e um observador de estados baseado no Filtro de Kalman dá-se o nome de *Problema Linear-Quadrático-Gaussiano* (LQG);
- O termo *Gaussiano* refere-se ao fato de que a distribuição estatística dos ruídos no processo (ω) e de medição (v) é suposta ser Gaussiana;
- É necessário verificar se a abordagem LQG fornece um sistema em malha fechada que permanece estável e ótimo.

- As equações da planta de interesse são:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{w} \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + v\end{aligned}$$

- As equações da planta de interesse são:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{w} \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + v\end{aligned}$$

- A parte do controlador é dada por:

$$\begin{aligned}u &= -\mathbf{K}\,\hat{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{K} &= R^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\end{aligned}$$

sendo **P** obtida resolvendo-se a equação de Riccati

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}R^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = -\mathbf{Q}$$

- A parte do observador é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(y - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{L} &= \mathbf{S}\mathbf{C}^T R_o^{-1}\end{aligned}$$

sendo **S** obtida resolvendo-se a equação de Riccati

$$\mathbf{AS} + \mathbf{SA}^T - \mathbf{SC}^T R_o^{-1}\mathbf{CS} = -\mathbf{Q}_o$$

- Considerando-se $u = -\mathbf{K}\,\hat{\mathbf{x}}$ na equação do observador:

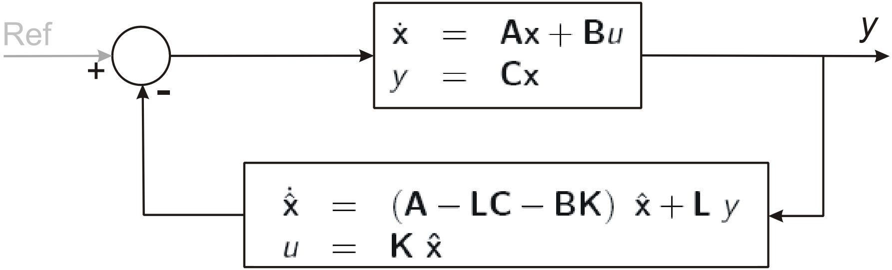
$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(y - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})$$

- Considerando-se $u = -\mathbf{K}\ \hat{\mathbf{x}}$ na equação do observador:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(y - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})$$

- obtêm-se as equações do controlador LQG, dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{K})\ \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}\ y \\ u &= -\mathbf{K}\ \hat{\mathbf{x}} \end{aligned}$$


Ref
+
-
$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$
$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$
y
$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{K})\,\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}\,y$
$u = \mathbf{K}\,\hat{\mathbf{x}}$

- Pode ser mostrado que a solução LQG resulta em um sistema assintoticamente estável em malha fechada;

- Pode ser mostrado que a solução LQG resulta em um sistema assintoticamente estável em malha fechada;
- Além disso, o controlador minimiza o funcional do problema LQR $\Rightarrow$ solução ótima;

- Pode ser mostrado que a solução LQG resulta em um sistema assintoticamente estável em malha fechada;
- Além disso, o controlador minimiza o funcional do problema LQR $\Rightarrow$ solução ótima;
- Como as estruturas do controlador e do Filtro de Kalman são similares às do Capítulo 3, aplica-se igualmente o princípio da separação $\Rightarrow$ filtro e controlador podem ser projetados independentemente.

Projetar controladores LQR e LQG para um sistema que consiste de um integrador duplo, cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

- No projeto do controlador LQR, considere que

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = 1;$$

Projetar controladores LQR e LQG para um sistema que consiste de um integrador duplo, cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

- No projeto do controlador LQR, considere que

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = 1;$$

- No projeto do filtro de Kalman, utilize

$$\mathbf{Q}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R_o = 1;$$

Projetar controladores LQR e LQG para um sistema que consiste de um integrador duplo, cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

- No projeto do controlador LQR, considere que

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = 1;$$

- No projeto do filtro de Kalman, utilize

$$\mathbf{Q}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R_o = 1;$$

- Obtenha as funções de transferência dos compensadores e do sistema compensado em malha aberta e compare os desempenhos das estratégias em termos das respectivas margens de fase e respostas temporais.

Realização da planta em FCO:

- Parâmetros dos polinômios $N(s)$ e $D(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \begin{cases} N(s) = 0s + 1 \;\Rightarrow b_1 = 0,\; b_2 = 1 \\ D(s) = s^2 + 0s + 0 \;\Rightarrow\; a_1 = 0,\; a_2 = 0 \end{cases}$$

Realização da planta em FCO:

- Parâmetros dos polinômios $N(s)$ e $D(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \begin{cases} N(s) = 0s + 1 \Rightarrow b_1 = 0, \ b_2 = 1 \\ D(s) = s^2 + 0s + 0 \Rightarrow a_1 = 0, \ a_2 = 0 \end{cases}$$

- Realização em FCO:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

Realização da planta em FCO:

- Parâmetros dos polinômios $N(s)$ e $D(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \begin{cases} N(s) = 0s + 1 \;\Rightarrow b_1 = 0,\; b_2 = 1 \\ D(s) = s^2 + 0s + 0 \;\Rightarrow\; a_1 = 0,\; a_2 = 0 \end{cases}$$

- Realização em FCO:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

- Pelo Teorema de Kalman, esta realização é *controlável* e *observável* (embora seja *instável!).*

Projeto LQR (I)

- Considerando que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad R = 1,$$

devemos resolver a equação algébrica de Riccati:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}R^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = -\mathbf{Q}$$

em que $\mathbf{P}$ é simétrica e positiva semidefinida:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix};$$

Projeto LQR (I)

- Considerando que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad R = 1,$$

devemos resolver a equação algébrica de Riccati:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}R^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = -\mathbf{Q}$$

em que $\mathbf{P}$ é simétrica e positiva semidefinida:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix};$$

- Solução:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

- Ganho **K**:

$$\mathbf{K} = R^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

- Ganho **K**:

$$\mathbf{K} = R^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

- Matriz **A** em malha fechada:

$$\mathbf{A}_{MF} = \mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

- Ganho **K**:

$$\mathbf{K} = R^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

- Matriz **A** em malha fechada:

$$\mathbf{A}_{MF} = \mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

- Autovalores em malha fechada:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm j) \;\Rightarrow\; \text{sistema é estabilizado, } \zeta = 0,707.$$

- Ganho **K**:

$$\mathbf{K} = R^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

- Matriz **A** em malha fechada:

$$\mathbf{A}_{MF} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

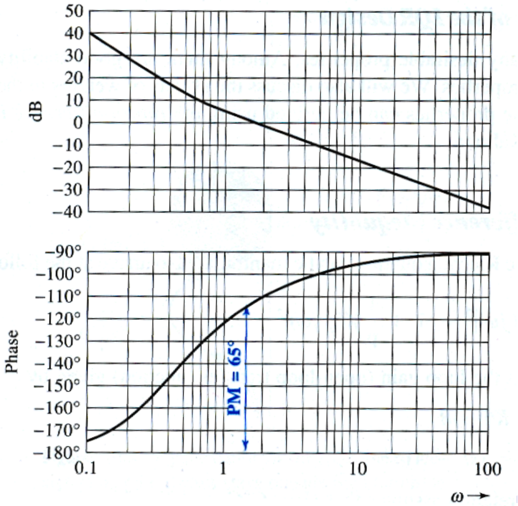
- Autovalores em malha fechada:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm j) \;\Rightarrow\; \text{sistema é estabilizado, } \zeta = 0,707.$$

- Função de transferência em malha aberta:

$$FTMA(s) = \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{1 + \sqrt{2}s}{s^2}$$

Diagramas de Bode e Margem de Fase



Projeto LQG (I)

- Neste caso:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad R_o = 1,$$

Projeto LQG (I)

- Neste caso:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad R_o = 1,$$

- Equação de Riccati:

$$\mathbf{AS} + \mathbf{SA}^T - \mathbf{SC}^T R_o^{-1} \mathbf{CS} = -\mathbf{Q}_o$$

Projeto LQG (I)

- Neste caso:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad R_o = 1,$$

- Equação de Riccati:

$$\mathbf{AS} + \mathbf{SA}^T - \mathbf{SC}^T R_o^{-1} \mathbf{CS} = -\mathbf{Q}_o$$

- Solução:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Projeto LQG (I)

- Neste caso:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad R_o = 1,$$

- Equação de Riccati:

$$\mathbf{AS} + \mathbf{SA}^T - \mathbf{SC}^T R_o^{-1} \mathbf{CS} = -\mathbf{Q}_o$$

- Solução:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

- Matriz **L** :

$$\mathbf{L} = \mathbf{SC}^T R_o^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Problema Linear-Quadrático-Gaussiano (LQG)

Projeto LQG(II)

- Função de transferência do compensador:

$$H(s) = \mathbf{K}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC} + \mathbf{BK}\right)^{-1}\mathbf{L}$$

$$H(s) = \frac{3,14(s+0,31)}{(s+1,57+j1,4)(s+1,57-j1,4)}$$

Projeto LQG(II)

- Função de transferência do compensador:

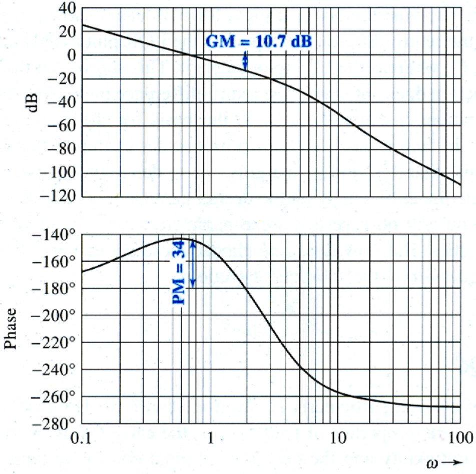
$$H(s) = \mathbf{K}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC} + \mathbf{BK}\right)^{-1}\mathbf{L}$$

$$H(s) = \frac{3,14(s+0,31)}{(s+1,57+j1,4)(s+1,57-j1,4)}$$

- Mostra-se que os polos em MF são

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm j), \frac{1}{2}(-\sqrt{3} \pm j)$$

Diagramas de Bode e Margem de Fase para o projeto LQG



- LQR apresenta margens de estabilidade maiores;

- LQR apresenta margens de estabilidade maiores;
- Ganho em baixa frequência do LQR $= 40\ dB$, enquanto para o LQG é de $27\ dB$: LQR apresenta melhor precisão em regime permanente;

- LQR apresenta margens de estabilidade maiores;
- Ganho em baixa frequência do LQR $= 40\ dB$, enquanto para o LQG é de $27\ dB$: LQR apresenta melhor precisão em regime permanente;
- LQR apresenta maior faixa passante: é mais sensível a ruído, porém apresenta resposta mais rápida;

- LQR apresenta margens de estabilidade maiores;
- Ganho em baixa frequência do LQR $= 40\ dB$, enquanto para o LQG é de $27\ dB$: LQR apresenta melhor precisão em regime permanente;
- LQR apresenta maior faixa passante: é mais sensível a ruído, porém apresenta resposta mais rápida;
- LQG tem melhores propriedade de supressão de ruídos, pois a inclinação do diagrama de Bode de magnitude é de $-60\ dB$ a altas frequências, contra $-20\ dB$ para o LQR.