Sistemas Não-Lineares, Parte II

$2^{o.}$ Método de Lyapunov

Aguinaldo S. e Silva e A. Simões Costa

Teoria de estabilidade de Lyapunov

- Método da linearização $\Longrightarrow$ comportamento local das trajetórias em torno do ponto de equilíbrio
- No método direto de Lyapunov, caracterização da solução não é necessariamente em termos locais
- A origem do método encontra-se na mecânica clássica
  - Torricelli (1608-1647) $\Longrightarrow$ "Corpos pesados conectados não podem começar a mover-se se o centro comum de gravidade deles não mover-se para baixo".
  - Lagrange (1736-1813) $\Longrightarrow$ "Um sistema mecânico que está em um estado onde sua energia potencial tem um mínimo isolado, está em um estado de equilíbrio estável"
  - Idéias generalizadas por Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, professor na Universidade de Kharkov $\Longrightarrow$ tese de doutorado (Universidade de Moscou, 1892) ¨O problema geral da estabilidade do movimento"

Método Direto de Lyapunov

Filosofia básica do Método Direto de Lyapunov:

Se a energia total de um sistema é continuamente dissipada, então este sistema, seja ele linear ou não linear, tem que finalmente chegar a um ponto de equilíbrio.

Idéias fundamentais

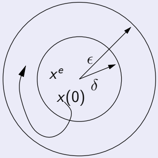
- Seja o sistema
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$
- Seja $\mathbf{0}$ um dos pontos de equilíbrio deste sistema
- Supondo que a energia deste sistema possa ser definida por uma função V tal que $V(\mathbf{0}) = 0$ (minímo global) e $V(\mathbf{x}) > 0$ para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- Dada uma condição inicial $\mathbf{x}^0 \neq \mathbf{0}$, então $V(\mathbf{x}^0) > 0$
- Se a dinâmica do sistema é tal que $\frac{dV}{dt} \leq 0$ então a energia não aumenta e dependendo de V isto pode indicar a estabilidade do ponto de equilíbrio $\mathbf{0}$
- Se $\frac{dV}{dt} < 0$ então a energia se reduzirá a zero e pode-se concluir a estabilidade do ponto de equilíbrio $\mathbf{0}$

Definições de estabilidade

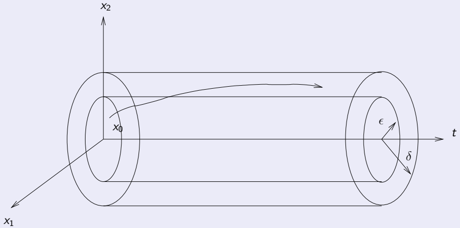
Definição

O ponto de equilíbrio $\mathbf{0}$ *é estável se, dado um* $\epsilon > 0$*, existe um* $\delta(\epsilon)$ *tal que para qualquer condição inicial* $||\mathbf{x}(t_0|| < \delta(\epsilon)$ *tem-se que* $||\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0|| < \epsilon$.

Trajetória



Movimento



Observações

- Um ponto de equilíbrio é instável se ele não for estável
- A trajetória não se afastará do ponto de equilíbrio mas também não precisará retornar ao mesmo
- Em muitas aplicações a trajetória deve retornar ao ponto de equilíbrio.

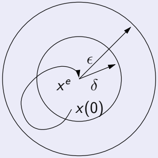
Ponto de equlíbrio assintoticamente estável

Definição

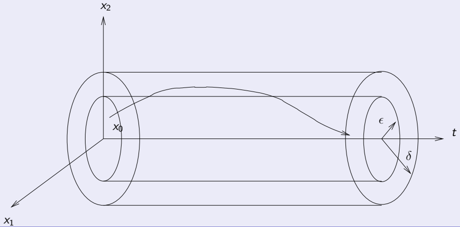
O ponto de equilíbrio $\mathbf{0}$ *é assintóticamente estável se as duas condições seguintes forem atendidas:*

1. *ele é estável*
2. $||\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)|| \to 0$ *quando* $t \to \infty$.

Trajetória



Movimento



Estabilidade assíntótica global

Definição

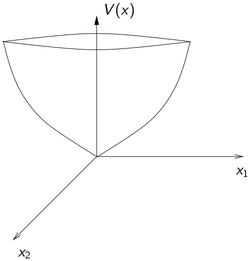
O ponto de equilíbrio $\mathbf{0}$ *é assintóticamente estável globalmente se ele for assintóticamente estável para qualquer* $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}^n$.

Função definida positiva

Definição

Uma função $V(\mathbf{x})$ é definida positiva localmente em uma vizinhança U da origem se ela é definida e contínua em U, $V(\mathbf{0}) = 0$ e $V(\mathbf{x}) > 0$ para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{x} \in U$.

- A função $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$ é definida positiva.

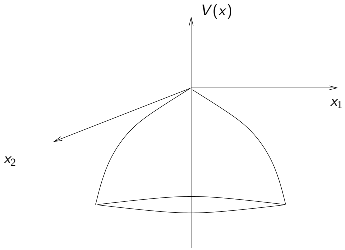


Função definida negativa

Definição

Uma função $V(\mathbf{x})$ é definida negativa localmente em uma vizinhança U da origem se ela é definida e contínua em U, $V(\mathbf{0}) = 0$ e $V(\mathbf{x}) < 0$ para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{x} \in U$.

- A função $V(\mathbf{x}) = -(x_1^2 + x_2^2)$ é definida negativa.

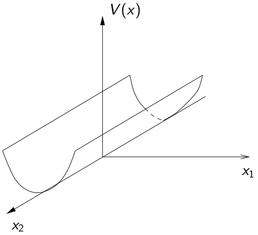


Função semi-definida positiva

Definição

Uma função $V(\mathbf{x})$ é semi-definida positiva localmente em uma vizinhança U da origem se ela é definida e contínua em U, $V(\mathbf{0}) = 0$ e $V(\mathbf{x}) \geq 0$ para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{x} \in U$.

- A função $V(\mathbf{x}) = x_1^2$ é semi-definida positiva
- Para qualquer $\mathbf{x} = [0 \quad x_2]^T$ a função é zero

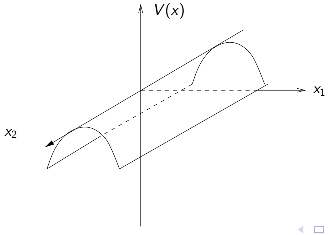


Função semi-definida negativa

Definição

Uma função $V(\mathbf{x})$ é semi-definida negativa localmente em uma vizinhança U da origem se ela é definida e contínua em U, $V(\mathbf{0}) = 0$ e $V(\mathbf{x}) \leq 0$ para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{x} \in U$.

- A função $V(\mathbf{x}) = -x_1^2$ é semi-definida negativa
- Para qualquer $\mathbf{x} = [0 \quad x_2]$ a função é zero



Teorema para estabilidade

Teorema

Se em uma vizinhança U do ponto de equilíbrio 0 existe uma função escalar $V(\mathbf{x})$ com as primeiras derivadas parciais contínuas e tal que

1. *$V(\mathbf{x})$ é definida positiva em U*
2. *$\dot{V}(\mathbf{x})$ é semi-definida negativa em U*

então o ponto de equilíbrio $\mathbf{0}$ é estável.

- Esta teorema apenas assegura a estabilidade do ponto de equilíbrio, mas não assegura que a trajetória retorna ao ponto de equilíbrio, ou seja, que a estabilidade é assíntótica

Teorema para estabilidade assíntótica

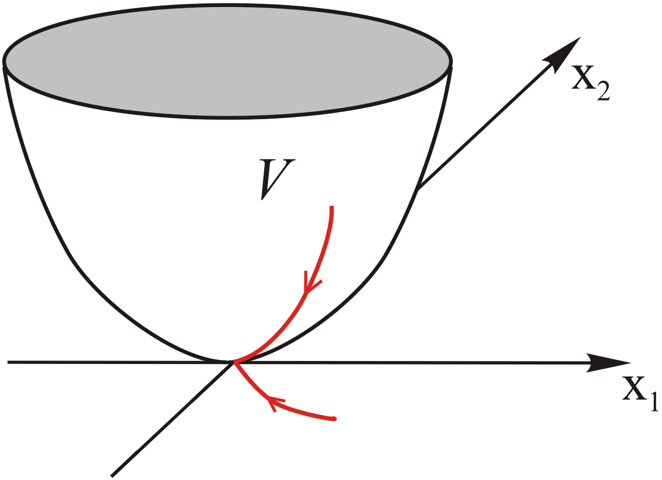
Teorema

Se em uma vizinhança U do ponto de equilíbrio 0 existe uma função escalar $V(\mathbf{x})$ com as primeiras derivadas parciais contínuas e tal que

1. $V(\mathbf{x})$ *é definida positiva em* U
2. $\dot{V}(\mathbf{x})$ *definida negativa em* U

então o ponto de equilíbrio $\mathbf{0}$ *é assintóticamente estável.*

Função de Lyapunov



Teorema para a instabilidade

Teorema

Se em uma vizinhança U do ponto de equilíbrio 0 existe uma função escalar $V(\mathbf{x})$ com as primeiras derivadas parciais contínuas e tal que

1. $V(\mathbf{x})$ *é definida positiva em U*
2. $\dot{V}(\mathbf{x})$ *definida positiva em U*

então o ponto de equilíbrio $\mathbf{0}$ é instável.

Teorema para estabilidade global

Teorema

Se existe uma função escalar $V(\mathbf{x})$ com as primeiras derivadas parciais contínuas e tal que

1. $V(\mathbf{x})$ *é definida positiva*
2. $\dot{V}(\mathbf{x})$ *definida negativa*
3. $V(\mathbf{x}) \to \infty$ *quando* $\| \mathbf{x} \| \to \infty$

então o ponto de equilíbrio $\mathbf{0}$ *é globalmente assintóticamente estável.*

- Neste caso qualquer que seja a condição inicial, a trajetória retornará ao ponto de equilíbrio

Teorema de LaSalle

- Estabilidade assintótica local ou global $\Longrightarrow$ derivada da função $\dot{V}(\mathbf{x})$ definida negativa
- Com algumas restrições adicionais, a função precise ser apenas semi-definida negativa

Teorema

Seja $V(\mathbf{x})$ uma função escalar com as primeiras derivadas parciais contínuas e tal que em uma vizinhança U da origem se tenha

1. $V(\mathbf{x})$ *é definida positiva localmente*
2. $\dot{V}(\mathbf{x})$ *é semi-definida negativa*
3. *o conjunto R definido por $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ não contem nenhuma trajetória do sistema além da trajetória trivial $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$*

então o ponto de equilíbrio $\mathbf{0}$ é assintóticamente estável.

Observações

- Uma função $V(\mathbf{x})$ para testar a estabilidade de um um ponto de equilíbrio é chamada uma função candidata de Lyapunov
- Se esta função comprova a estabilidade do ponto de equilíbrio ela é chamada de função de Liapunov
- Os teoremas apresentados não indicam como a função $V(\mathbf{x})$ pode ser determinada. Este é um problema apresentado pelo método mas, em alguns casos, pode-se seguir um procedimento sistemático para construir tais funções
- Se o ponto de equilíbrio é assintóticamente estável, existe uma vizinhança deste ponto para a qual trajetórias que partem desta vizinhança retornam ao ponto de equilíbrio. Mas qual o conjunto de todas as condições iniciais para as quais a trajetória volta ao ponto de equilíbrio?

Significado da derivada da função $V(\mathbf{x})$

- $V(\mathbf{x}) \in \Re$ é uma função escalar de várias variáveis
- Derivada com relação ao tempo

$$\frac{V(\mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \cdots + \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_n}\dot{x}_n$$

- Ou ainda

$$\frac{V(\mathbf{x})}{dt} = \left[\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_1}\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_2}\cdots + \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_n}\right]\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_1\\ \vdots\\ \dot{x}_1\end{bmatrix}$$

- O gradiente de $V(\mathbf{x})$, é dado por

$$\nabla V(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_1} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_2} \cdots + \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_n}]^T\right]$$

- Portanto

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \nabla^T V(\mathbf{x}) \,.\, \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

- **A derivada de $V(\mathbf{x})$ é o produto escalar do gradiente de $V(\mathbf{x})$ com o campo vetorial**

Derivada de Lie

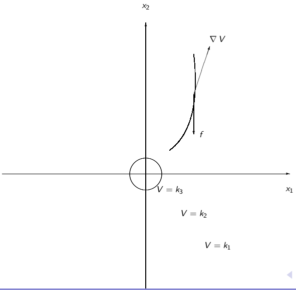
- A equação

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \nabla^T V(\mathbf{x})\,.\,\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

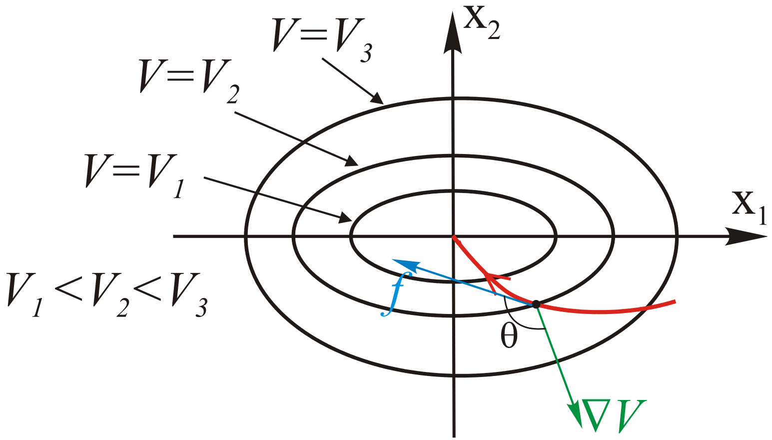
  indica que a derivada de $V(\mathbf{x})$ é calculada ao longo das trajetórias do sistema
- O vetor **f** no cálculo desta derivada
- A derivada de uma função escalar em uma direção (aqui a direção dada pelo campo vetorial) é chamada derivada de Lie

Interpretação do método de Lyapunov

- A derivada é dada por $\dot{V}(\mathbf{x}) = \nabla^T V(\mathbf{x})\,.\,\mathbf{f}(\mathbf{x})$
- Gradiente é direção de máximo crescimento da função e é ortogonal às curvas de nível da função $V(x)$
- Produto escalar é negativo se ângulo é maior do que 90°
- Derivada é negativa se campo vetorial (tangente às trajetórias) ¨entrar¨ na curva de nível de $V(\mathbf{x})$



Interpretação do Método de Lyapunov



$$\theta > 90^o \implies \cos\theta < 0 \implies \dot{V} < 0$$

Exemplo 1

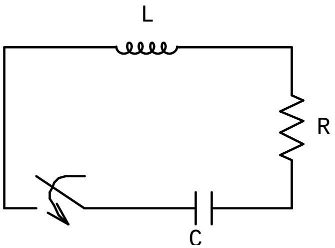
Dado o sistema

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1$$

determine a estabilidade da origem.

Exemplo 2

Para o sistema da figura, determine a estabilidade do ponto de equilíbrio na origem.



Região ou domínio de atração

- Resultados anteriores determinam se um ponto de equilíbrio é assintoticamente estável
- Se o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável, isto apenas assegura que existe uma vizinhança do ponto de equilíbrio, que pode ser muito pequena, onde as trajetórias que se originam dentro desta vizinhança retornam ao ponto de equilíbrio
- Uma questão importante nas aplicações é saber qual o conjunto de condições iniciais para as quais as trajetórias retornam para o ponto de equilíbrio
- Este conjunto constitui o domínio de atração do sistema

Propriedades da região de atração

Teorema

Se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é uma ponto de equilíbrio estável assintoticamente, então seu domínio de atração é um conjunto aberto invariante e a fronteira deste conjunto é formado por trajetórias do sistema

- A determinação do domínio de atração exato de um sistema não é fácil
- Simulação pode ser usada para determinar este domínio
- Determinação analítica do domínio de atração só é possível para alguns sistemas simples
- Mas pode-se obter uma estimativa do domínio de atração usando funções de Lyapunov

Estimativa do domínio de atração

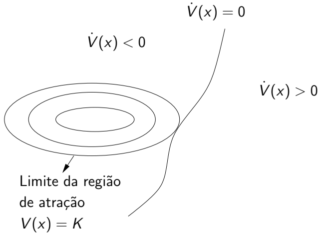
Teorema

Seja $V(\mathbf{x})$ uma função escalar e $D \in \Re^n$ um conjunto aberto e suponha que $U = \{\mathbf{x} \ / \ V(\mathbf{x}) < K\}$ com $U \subset D$, é um conjunto compacto (limitado e aberto). Seja $\dot{V}(\mathbf{x})$ a derivada de $V(\mathbf{x})$ ao longo das trajetórias do sistema, e $\mathbf{0} \in U$ um ponto de equilíbrio. Se

- $V(\mathbf{0}) = 0$
- $V(\mathbf{x}) > 0$ *para* $\mathbf{x} \neq 0$, $\mathbf{x} \in U$
- $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ *para* $\mathbf{x} \neq 0$, $\mathbf{x} \in U$
- $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ *para* $\mathbf{x} = 0$

então a origem é assintoticamente estável e todas as trajetórias que partem de U convergem para a origem quando $t \to \infty$.

Uso para estimativa do domínio de atração



- Conjunto $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ separa o conjunto D em duas regiões: $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ e $\dot{V}(\mathbf{x}) > 0$
- Maior curva de nível de $V(\mathbf{x})$ na região $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ corresponde ao conjunto U e é estimativa do domínio de atração
- Uma trajetória que parta de ponto no interior da eqüipotencial ($\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$) tenderá a eqüipotenciais de menor valor, até o ponto de equilíbrio

Observações

- A estimativa do domínio de atração depende da função de Lyapunov utilizada
- Pode-se aumentar a estimativa do domínio de atração escolhendo uma função de Lyapunov mais adequada, o que não é uma tarefa fácil
- O domínio exato de atração pode ser obtido por simulação, o que, novamente, não é uma tarefa fácil
- Em alguns casos pode-se obter uma expressão analítica para o domínio exato de atração, usando o teorema de Zubov. Infelizmente, isto é válido apenas para alguns poucos sistemas

Exemplo 3

Para o sistema descrito por

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_1^3$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_2^3$$

a) Determine todos os pontos de equilíbrio do sistema;
b) Determine a estabilidade do ponto de equilíbrio na origem usando uma função de Lyapunov. Sugestão: Use uma função quadrática como candidata à função de Lyapunov;
c) Determine uma estimativa do domínio de atração da origem;
d) Use um software de simulação numérica para estimar o real domínio de atração do ponto de equilíbrio na origem.

Métodos para a construção de funções de Lyapunov

- O método de Lyapunov não indica como funções que provem a estabilidade ou não do ponto de equilíbrio podem ser construidas
- As funções não são únicas e distintas funções podem ser funções de Lyapunov para um ponto de equilíbrio
- Vários métodos foram desenvolvidos para permitir uma procura sistemática por funções de Lyapunov

Método de Krasovskii

- Seja o sistema dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

com $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, ou seja, a origem é o ponto de equilíbrio de interesse

- Seja a candidata a função de Lyapunov

$$V = \mathbf{f}^T \mathbf{P} \mathbf{f}$$

onde $\mathbf{P}$ é definida positiva

- A derivada de V é dada por

$$\dot{V} = \dot{\mathbf{f}}^T \mathbf{P} \mathbf{f} + \mathbf{f}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{f}}$$

- Desde que

$$\dot{\mathbf{f}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$$

- Denotando por $\mathbf{J}$ a matriz jacobiana, ou seja, $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$ chega-se a

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{f}^T \mathbf{J}^T \mathbf{P}\,\mathbf{f} + \mathbf{f}^T \mathbf{P}\,\mathbf{J}\,\mathbf{f} \\ &= \mathbf{f}^T (\mathbf{J}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\,\mathbf{J})\,\mathbf{f} \end{aligned}$$

- Seja a matriz

$$\mathbf{Q} = \mathbf{J}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\,\mathbf{J}$$

- Se condições puderem ser impostas para garantir que $\mathbf{Q}$ é definida negativa (ou semi-definida negativa) e desde que V é definida positiva, pois é quadrática com $\mathbf{P}$ definida positiva, então V será uma função de Lyapunov para a estabilidade da origem

Método de Zubov

Teorema

Seja A um conjunto simplesmente conexo, contendo a origem e sejam $V(\mathbf{x})$ e $h(\mathbf{x})$ duas funções escalares tal que

1. *V é definida, contínua em A, e tal que $0 < V(\mathbf{x}) < 1$, para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$*
2. *h é definida positiva*
3. *Para $\mathbf{x} \in A$,*

$$\frac{dV}{dt} = -h(\mathbf{x})(1 - V(\mathbf{x}))(1 + \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\,\mathbf{f}(\mathbf{x}))^{\frac{1}{2}}$$

4. *Quando $\mathbf{x}$ se aproxima de um ponto da fronteira de A ou, no caso de A ser ilimitada, quando $|\mathbf{x}| \to \infty$, então $\lim V(\mathbf{x}) = 1$*

então o domínio exato de atração é dado por A.

Aplicação do método de Zubov

- Escolhe-se a função $h(\mathbf{x})$ definida positiva
- Resolve se a equação

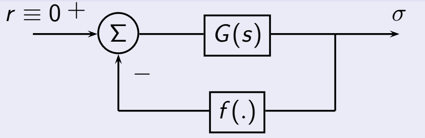
$$\frac{dV}{dt} = -h(\mathbf{x})(1 - V(\mathbf{x}))(1 + \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\,\mathbf{f}(\mathbf{x}))^{\frac{1}{2}}$$

- A fronteira do domínio de atração é então dada por $\{\mathbf{x} : V(\mathbf{x}) = 1\}$
- Dificuldade $\Longrightarrow$ equação só tem solução analítica em poucos casos
- Soluções numéricas, envolvendo expansão em série da função $V(\mathbf{x})$ tem uso limitado, desde que a série não tem convergência monotônica

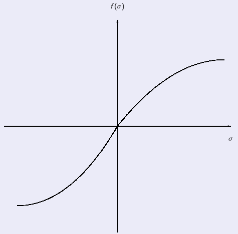
Funções tipo Lur'e

- Problema da estabilidade de um sistema linear, dado por uma função de transferência $G(s)$, com uma realimentação não-linear $f(.)$
- A função não-linear $f(.)$ atende a uma condição de setor $\Longrightarrow$ pertence ao primeiro e terceiro quadrantes

Sistema tipo L'ure



Não-linearidade



Função de Lyapunov

- Sistema é descrito pelas equações

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\,\mathbf{x} - f(\sigma) \\ \sigma &= \mathbf{c}\,\mathbf{x} \end{aligned}$$

- Candidata à função de Lyapunov é soma de uma função quadrática e a integral da não-linearidade:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\,\mathbf{P}\,\mathbf{x} + \int_0^{\sigma} f(\sigma)\,d\sigma \tag{3}$$

- O teorema de Kalman-Yakubovich permite determinar a matriz **P**

Funções de Lyapunov baseadas na física do sistema

- A determinação de funções de Lyapunov pode ser difícil, especialmente para sistemas complexos
- Os métodos apresentados geram funções de Lyapunov a partir de considerações matemáticas
- A propriedades físicas do sistema e considerações do ponto de vista de engenharia podem levar a funções de Lyapunov
- A energia total do sistema é um exemplo de função de Lyapunov gerada a partir de considerações da física do sistema

Exemplo - Sistema elétrico

- As equações de uma máquina conectada a uma barra infinita são dadas por

$$\dot{\delta} = \omega$$
$$M\dot{\omega} = P_m - D\omega - P_{max}\, sen\delta$$

- Uma função de Lyapunov é a soma da energia cinética mais a energia potencial da máquina

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{M} M\, \omega^2 - \int_{\delta^e}^{\delta} (P_m - P_{max}\, sen\, \delta)\; d\delta$$