

Exemplo de projeto de Seguimento Robusto

Para o processo cuja função de transferência é

$$F(s) = \frac{7}{2s + 10},$$

projetar um servocompensador robusto capaz de seguir referências do tipo

$$R(t) = 2 \cos 3t$$

e rejeitar perturbações *constantes* na saída do processo.

1. Processo

- Realização do processo:

1. Processo

- Realização do processo:
 - Função de transferência na forma canônica:

$$F(s) = \frac{3,5}{s + 5}$$

1. Processo

- Realização do processo:
 - Função de transferência na forma canônica:

$$F(s) = \frac{3,5}{s + 5}$$

- Realização em Forma Canônica de Controlabilidade:

$$\begin{aligned}\dot{x}_f &= -5 x_f + u \\ y &= 3,5 x_f + W\end{aligned}$$

1. Processo

- Realização do processo:

- Função de transferência na forma canônica:

$$F(s) = \frac{3,5}{s+5}$$

- Realização em Forma Canônica de Controlabilidade:

$$\begin{aligned}\dot{x}_f &= -5 x_f + u \\ y &= 3,5 x_f + W\end{aligned}$$

- Logo:

$$A_f = -5; \quad B_f = 1; \quad C_f = 3,5; \quad D_f = 0$$

2. Projeto do servocompensador (I)

Operador Anulador

- Operador anulador da perturbação constante:

$$pW(t) = 0$$

2. Projeto do servocompensador (I)

Operador Anulador

- Operador anulador da perturbação constante:

$$pW(t) = 0$$

- Operador anulador para a entrada de referência $r(t) = 2 \cos 3t$:

$$(p^2 + 9)r(t) = 0$$

2. Projeto do servocompensador (I)

Operador Anulador

- Operador anulador da perturbação constante:

$$pW(t) = 0$$

- Operador anulador para a entrada de referência $r(t) = 2 \cos 3t$:

$$(p^2 + 9)r(t) = 0$$

- Operador anulador comum:

$$p(p^2 + 9) = p^3 + 9p \implies d_1 = 0, d_2 = -9, d_3 = 0$$

2. Projeto do servocompensador (II)

Realização do servocompensador

- Relação entre ρ e u :

$$(p^3 + 9p)u = \rho$$

2. Projeto do servocompensador (II)

Realização do servocompensador

- Relação entre ρ e u :

$$(p^3 + 9p)u = \rho$$

- Realização do servocompensador por FCC:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_u &= \mathbf{A}_u \mathbf{x}_u + \mathbf{B}_u \rho \\ u &= \mathbf{C}_u \mathbf{x}_u\end{aligned}$$

2. Projeto do servocompensador (II)

Realização do servocompensador

- Relação entre ρ e u :

$$(p^3 + 9p)u = \rho$$

- Realização do servocompensador por FCC:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_u &= \mathbf{A}_u \mathbf{x}_u + \mathbf{B}_u \rho \\ u &= \mathbf{C}_u \mathbf{x}_u\end{aligned}$$

- onde

$$\mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} 0 & -9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_u = [0 \quad 0 \quad 1] \quad D_u = 0$$

3. Relação entre entrada do Servo e erro (I)

Equação dinâmica (I)

- A relação entre ρ e ϵ é obtida pela combinação em cascata de processo e servocompensador, com entrada ρ e saída ϵ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_p \\ \dot{\mathbf{x}}_\epsilon \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_f & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_u \mathbf{C}_f & \mathbf{A}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{x}_\epsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_f \\ -\mathbf{B}_u \mathbf{D}_f \end{bmatrix} \rho \\ \epsilon &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{x}_\epsilon \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. Relação entre entrada do Servo e erro (I)

Equação dinâmica (I)

- A relação entre ρ e ϵ é obtida pela combinação em cascata de processo e servocompensador, com entrada ρ e saída ϵ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_\rho \\ \dot{x}_\epsilon \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_f & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_u \mathbf{C}_f & \mathbf{A}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\rho \\ x_\epsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_f \\ -\mathbf{B}_u \mathbf{D}_f \end{bmatrix} \rho \\ \epsilon &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\rho \\ x_\epsilon \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- ou, de forma mais compacta,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \rho \\ \epsilon &= \mathbf{C} \mathbf{x} \end{aligned}$$

3. Relação entre entrada do Servo e erro (II)

Equação dinâmica e propriedades

- Usando as realizações $\{\mathbf{A}_f, \mathbf{B}_f, \mathbf{C}_f, 0\}$ e $\{\mathbf{A}_u, \mathbf{B}_u, \mathbf{C}_u, 0\}$ obtidas anteriormente:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|ccc} -5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -3,5 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$
$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad D = 0$$

3. Relação entre entrada do Servo e erro (II)

Equação dinâmica e propriedades

- Usando as realizações $\{\mathbf{A}_f, \mathbf{B}_f, \mathbf{C}_f, 0\}$ e $\{\mathbf{A}_u, \mathbf{B}_u, \mathbf{C}_u, 0\}$ obtidas anteriormente:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|ccc} -5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -3,5 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$
$$\mathbf{C} = [\quad 0 \mid 0 \quad 0 \quad 1] \quad D = 0$$

- Mostra-se que esta equação dinâmica é controlável e observável (verifique!).

4. Projeto do Estabilizador (I)

Estratégia de projeto

- O estabilizador consiste em um **observador + ganho de realimentação de estados** para o sistema $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, D\}$ acima;

4. Projeto do Estabilizador (I)

Estratégia de projeto

- O estabilizador consiste em um **observador + ganho de realimentação de estados** para o sistema $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, D\}$ acima;
- Através desta estratégia, consegue-se “inverter o sentido” das variáveis de $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, 0\}$, isto é, a entrada passa a ser ϵ e a saída será ρ ;

4. Projeto do Estabilizador (I)

Estratégia de projeto

- O estabilizador consiste em um **observador + ganho de realimentação de estados** para o sistema $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, D\}$ acima;
- Através desta estratégia, consegue-se “inverter o sentido” das variáveis de $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, 0\}$, isto é, a entrada passa a ser ϵ e a saída será ρ ;
- O estabilizador tem a forma:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{K}) \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L} \epsilon \\ \rho &= -\mathbf{K} \hat{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

onde \mathbf{K} e \mathbf{L} podem ser obtidos mediante as técnicas do Capítulo 3 (alocação de polos) ou do Capítulo 4 (LQR e LQG).

4. Projeto do Estabilizador (II)

Projeto do ganho de realimentação de estados

- Polos especificados para o sistema em malha fechada para Controle Modal:

$$P_{CM}^{espec} = \{-1 \pm j1, -2 \pm j1\}$$

4. Projeto do Estabilizador (II)

Projeto do ganho de realimentação de estados

- Polos especificados para o sistema em malha fechada para Controle Modal:

$$P_{CM}^{espec} = \{-1 \pm j1, -2 \pm j1\}$$

- Vetor de ganhos de realimentação de estados determinado pelo Controle Modal:

$$\mathbf{K} = [1,0 \quad -1,7143 \quad 10,2857 \quad -2,8571]$$

4. Projeto do Estabilizador (II)

Projeto do ganho de realimentação de estados

- Polos especificados para o sistema em malha fechada para Controle Modal:

$$P_{CM}^{espec} = \{-1 \pm j1, -2 \pm j1\}$$

- Vetor de ganhos de realimentação de estados determinado pelo Controle Modal:

$$\mathbf{K} = [1,0 \quad -1,7143 \quad 10,2857 \quad -2,8571]$$

- Pode-se verificar que

$$\lambda(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) = P_{CM}^{espec}$$

4. Projeto do Estabilizador (III)

Projeto do Observador

- Polos especificados para o Observador:

$$P_{Observ}^{espec} = \{-3 \pm j2, -4 \pm j2\}$$

4. Projeto do Estabilizador (III)

Projeto do Observador

- Polos especificados para o Observador:

$$P_{Observ}^{spec} = \{-3 \pm j2, -4 \pm j2\}$$

- Vetor de distribuição da saída do observador determinado por projeto:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -11,429 & -37,0 & 27,0 & 9,0 \end{bmatrix}^T$$

4. Projeto do Estabilizador (III)

Projeto do Observador

- Polos especificados para o Observador:

$$P_{Observ}^{espec} = \{-3 \pm j2, -4 \pm j2\}$$

- Vetor de distribuição da saída do observador determinado por projeto:

$$\mathbf{L} = [-11,429 \quad -37,0 \quad 27,0 \quad 9,0]^T$$

- Pode-se verificar que

$$\lambda(\mathbf{A} - \mathbf{LC}) = P_{Observ}^{espec}$$

4. Projeto do Estabilizador (IV)

Resultado Final

- Equação dinâmica do Estabilizador:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{LC} - \mathbf{BK}) \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L} \epsilon \\ \rho &= -\mathbf{K} \hat{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

4. Projeto do Estabilizador (IV)

Resultado Final

- Equação dinâmica do Estabilizador:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{LC} - \mathbf{BK}) \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L} \epsilon \\ \rho &= -\mathbf{K} \hat{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

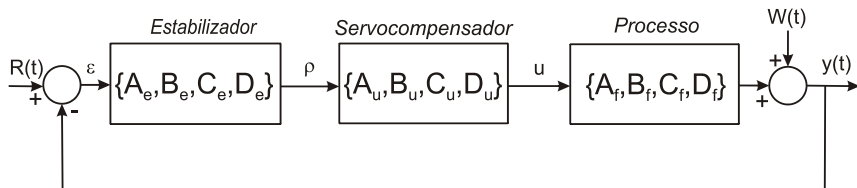
- Com os vetores \mathbf{K} e \mathbf{L} determinados nos passos anteriores:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -6,0 & 1,71 & -10,29 & 14,29 \\ -3,5 & 0 & -9,0 & 37,00 \\ 0 & 1 & 0 & -27,00 \\ 0 & 0 & 1 & -9,00 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -11,43 \\ -37,00 \\ 27,00 \\ 9,00 \end{bmatrix} \rho$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} -1,0 & 1,71 & -10,29 & 2,86 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Sistema Estabilizador+Servocompensador+Processo

Diagrama de blocos



Equação dinâmica do sistema em malha aberta

- Utilizando repetidamente as regras de combinação em série de equações dinâmicas:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_a \\ \dot{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_b \mathbf{C}_a & \mathbf{A}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_a \\ \mathbf{B}_b \mathbf{D}_a \end{bmatrix} \rho$$
$$\epsilon = \begin{bmatrix} D_b \mathbf{C}_a & \mathbf{C}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} + D_b D_a \rho$$

pode-se determinar a equação dinâmica do sistema em malha aberta.

Sistema Estabilizador+Servocompensador+Processo

Equação dinâmica em malha aberta

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -6,00 & 1,71 & -10,29 & 14,29 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3,50 & 0 & -9,00 & 37,00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,00 & 0 & -27,00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,00 & -9,00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,00 & 1,71 & -10,29 & 2,86 & 0 & -9,00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,00 & -5,00 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -11,43 \\ -37,00 \\ 27,00 \\ 9,00 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 3,50 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Equação Dinâmica em Malha Fechada

Utilizando:

- A equação dinâmica do sistema composto em malha aberta determinada acima, e

Equação Dinâmica em Malha Fechada

Utilizando:

- A equação dinâmica do sistema composto em malha aberta determinada acima, e
- as regras de conexão em realimentação unitária de uma equação dinâmica (com $D = 0$):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{BC}) \mathbf{x} + \mathbf{Bu} \\ y &= \mathbf{C} \mathbf{x}\end{aligned}$$

pode-se determinar a equação dinâmica do sistema em malha fechada;

Equação Dinâmica em Malha Fechada

Utilizando:

- A equação dinâmica do sistema composto em malha aberta determinada acima, e
- as regras de conexão em realimentação unitária de uma equação dinâmica (com $D = 0$):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{BC}) \mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C} \mathbf{x}\end{aligned}$$

pode-se determinar a equação dinâmica do sistema em malha fechada;

- A partir da matriz \mathbf{A} em malha fechada, é possível confirmar o cumprimento das especificações do projeto.

- Matriz A em malha fechada:

$$\mathbf{A}_{MF} = \begin{bmatrix} -6,00 & 1,71 & -10,29 & 14,29 & 0 & 0 & 0 & 40,00 \\ -3,50 & 0 & -9,00 & 37,00 & 0 & 0 & 0 & 129,50 \\ 0 & 1,00 & 0 & -27,00 & 0 & 0 & 0 & -94,50 \\ 0 & 0 & 1,00 & -9,00 & 0 & 0 & 0 & -31,50 \\ -1,00 & 1,71 & -10,29 & 2,86 & 0 & -9,00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,00 & -5,00 \end{bmatrix}$$

- Matriz A em malha fechada:

$$\mathbf{A}_{MF} = \begin{bmatrix} -6,00 & 1,71 & -10,29 & 14,29 & 0 & 0 & 0 & 40,00 \\ -3,50 & 0 & -9,00 & 37,00 & 0 & 0 & 0 & 129,50 \\ 0 & 1,00 & 0 & -27,00 & 0 & 0 & 0 & -94,50 \\ 0 & 0 & 1,00 & -9,00 & 0 & 0 & 0 & -31,50 \\ -1,00 & 1,71 & -10,29 & 2,86 & 0 & -9,00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,00 & -5,00 \end{bmatrix}$$

- Autovalores em malha fechada:

$$\lambda(\mathbf{A}_{MF}) = \{-4,00 \pm j2,00, -3,00 \pm j2,00, -2,00 \pm j1,00, -1,00 \pm j1,00\}$$