FUNDAMENTOS DE CONTROLE - EEL 7531

Professor: Aguinaldo S. e Silva

LABSPOT-EEL-UFSC

14 de maio de 2015

Introdução a sistemas não-lineares

- Embora modelos lineares sejam muito usados, sistemas reais apresentam algum tipo de não-linearidade
- Em muitos casos a faixa de operação limitada faz com que o efeito destas não-linearidades seja limitado $\longrightarrow$ modelo linear adequado para uma análise qualitiva e mesmo quantitativa suficientemente precisa
- Engenheiros procurem sempre modelos lineares pois a teoria de sistemas lineares é bem consolidada e os resultados são gerais
- Para sistemas não-lineares, resultados são mais limitados e freqüentemente aplicáveis somente a classes de sistemas
- Em muitas aplicações reais, onde as não-linearidades tem grande influência no comportamento do sistema, tem-se que aplicar técnicas de análise e síntese derivadas da teoria de sistemas não-lineares

Modelo matemático

- Sistemas não-lineares podem ser representados por um sistema de equações diferenciais da forma

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m) \\
\dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m)
\end{aligned}
$$

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são os estados do sistema e $u_1, u_2, \ldots, u_m$ são entradas externas no sistema

Forma compacta de representação

- Definindo os vetores de estados, de funções não-lineare e de funções de entrada ou forçantes

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

- Tem-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$$

- O vetor **f** é conhecido como *campo vetorial*
- **f** depende explicitamente do tempo ou seja, parâmetros do sistema podem variar com o tempo.

Sistemas autônomos

- A entrada $\mathbf{u}$ caracteriza um sistema forçado
- Se $\mathbf{u}$ não aparece explicitamente, então o sistema é não-forçado

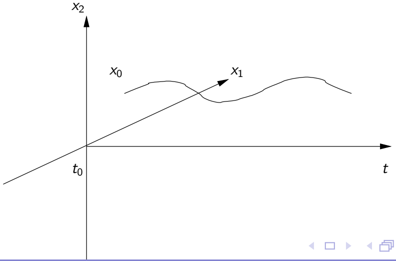
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

- O sistema não-forçado ocorre mesmo quando a entrada existe mas é uma função do estado $\mathbf{x}$ do sistema ou constante
- A entrada constante equivale a um parâmetro e não aparece explicitamente
- Um sistema que não depende explicitamente do tempo é chamado de sistema autônomo
- Sistemas autônomos não forçados são representados por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

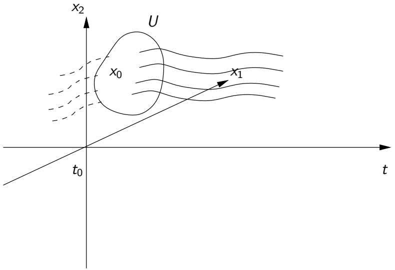
Existência e solução de equações diferenciais

- A solução de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ é o vetor $\mathbf{x}(t)$
- Para cada condição inicial no tempo t_0, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$, há uma solução
- Supondo que solução existe e é única para cada condição inicial a solução será uma curva em um espaço de dimensão $n+1$
- Sistema de segunda ordem a solução que passa por x_0 e t_0



Fluxo

- Para o mesmo tempo t_0, qualquer ponto no plano transversal ao eixo dos tempos pode ser condição inicial $\longrightarrow$ solução é família de curvas



- Soluções representadas como $\phi_t = \phi(x, t) \longrightarrow$ cada valor de t temos um valor associado do estado $x(t)$
- Esta família de soluções constitui um fluxo ϕ_t

- Para um conjunto $U \subseteq \mathcal{R}^n$ e um intervalo $I = (a, b) \subseteq \mathcal{R}$

$$\left.\frac{d\phi}{dt}(\mathbf{x}, t)\right|_{\tau} = f(\phi(\mathbf{x}, \tau))$$

  para todo $\mathbf{x} \in U$ e $\tau \in I$
- Para uma dada condição inicial em $t = 0$ dada por $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ procura-se a solução $\phi(\mathbf{x}_0, t)$ tal que $\phi(\mathbf{x}_0, 0) = \mathbf{x}_0$
- Esta solução também é denotada por $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ ou $\mathbf{x}(t)$
- A solução $\phi(\mathbf{x}_0, .)$ define uma curva solução, trajetória ou órbita

Condições de Lipschitz

- Existência de solução: dada uma condição inicial $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ existe um vetor $\mathbf{x}(t)$ que satisfaz esta para algum intervalo de tempo $[t_0, t)$? Esta solução é única?
- Para representar o comportamento de sistemas reais, uma resposta afirmativa a estas questões é crucial para que o modelo matemático tenha utilidade
- A condição de existência e unicidade de solução é dada pela condição de Lipschitz:

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq K \parallel \mathbf{x} - \mathbf{y} \parallel$$

  para algum $K < \infty$ (constante de Lipschitz).
- Para modelos que representam corretamente sistemas físicos, a condição de Lipschiz é sempre satisfeita

Pontos de equilíbrio

- Pontos de equilíbrio, ou pontos fixos ou zeros, são soluções da equação diferencial para as quais o campo vetorial se anula

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{e}) = \mathbf{0}$$

- Determinar os pontos de equilíbrio, por si só pode apresentar considerável dificuldade
- Uum sistema não-linear pode apresentar um único, vários, infinitos ou nenhum ponto de equilíbrio
- No caso de sistemas lineares o sistema tem um ou infinitos pontos de equilíbrio

Ponto de equilíbrio na origem

- Usualmente supõe-se que o ponto de equilíbrio é a origem
- Para um sistema de segunda ordem, o ponto $\mathbf{x} = [0 \quad 0]^T$, também representado por $(0, 0)$ é o equilíbrio. Ou seja,

$$\mathbf{f}(0,0) = \begin{bmatrix} f_1(0,0) \\ f_2(0,0) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

- A suposição de que a origem é um ponto de equilíbrio não constitui perda de generalidade
- Realmente, cada ponto de equiíbrio pode ser transladado para a origem

Translação do ponto de equilíbrio para a origem

- Para o sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

  com ponto de equiíbrio $\mathbf{x}^e$, ou seja, $\mathbf{f}(\mathbf{x}^e) = 0$
- Definindo-se novas variáveis de estado tais que $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^e$, tem-se $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{x}^e$
- Substituindo-se na equação

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y} + \mathbf{x}^e)$$

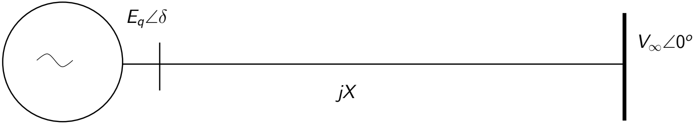
- O ponto $\mathbf{y} = [0 \quad 0]$ é agora um ponto de equiíbrio
- A mudança de variáveis de estado corresponde a uma translação de eixos

Exemplos de sistemas não-lineares

- Alguns exemplos são apresentados para mostrar que técnicas de análise não-linear não são suficientes para analisar todos os aspectos do comportamento destes sistemas
- São discutidos
  - Sistemas elétricos de potência
  - Ecosistemas

Sistema elétrico de potência

- Sistema máquina síncrona conectada a uma barra infinita



Equações do sistema

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \omega \\ M\dot{\omega} &= P_m - D\omega - P_{max}\, sen\delta \end{aligned}$$

- $P_{max} = \dfrac{E_q V}{X}$, é a máxima potência transmitida pela linha, M é a inércia da máquina, D é um coeficiente de amortecimento, ω é a velocidade do rotor e δ é o ângulo da máquina
- Sistema não-linear e autônomo.

Pontos de equilíbrio

- Dados por

$$\begin{aligned} 0 &= \omega \\ 0 &= P_m - D\omega - P_{max}\, sen\delta^e \end{aligned}$$

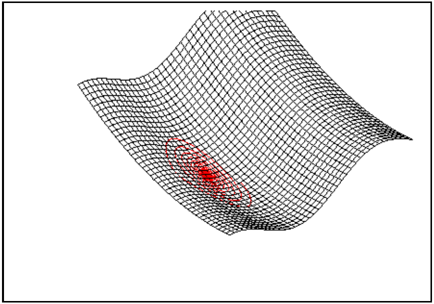
- ou

$$\begin{aligned} \delta^e &= sen^{-1}\frac{P_m}{P_{max}} \\ \omega^e &= 0 \end{aligned}$$

- Infinitos pontos de equilíbrio, pois existem infinitos arcos que atendem à condição sobre o ângulo δ
- Três pontos dados por $(\delta^e, 0)$, com $\delta^e \in (-\pi, \pi)$, $(\pi - \delta^e, 0)$ e $-\pi - (\delta^e, 0)$ tem interesse físico

Resposta para uma pequena perturbação

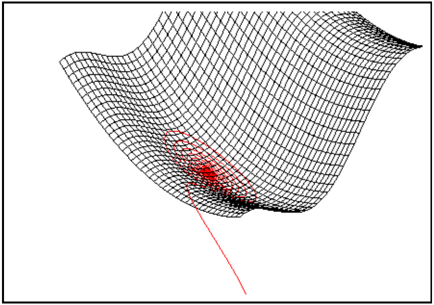
- Ponto de equilíbrio é estável



- Observa-se que o sistema retorna ao ponto de equilíbrio δ^e.

Resposta para uma grande perturbação

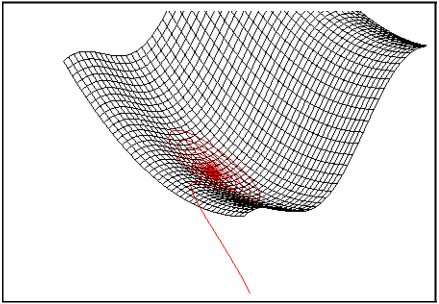
- Ponto de equilíbrio é estável



- Embora o ponto de equilíbrio seja estável, além da estabilidade do ponto de equilíbrio temos que determinar uma região de atração desse ponto

Ponto de equilíbrio é instável

- Condição inicial muito próxima do ponto de equilíbrio $(\pi - \delta^e, 0)$



- Trajetória se afasta do ponto de equilíbrio

Ecosistemas

- Modelos que representam ecosistems e equilíbrio em sistemas envolvendo presas e predadores podem ser não-lineares
- Um exemplo é a equação de Lotka-Volterra

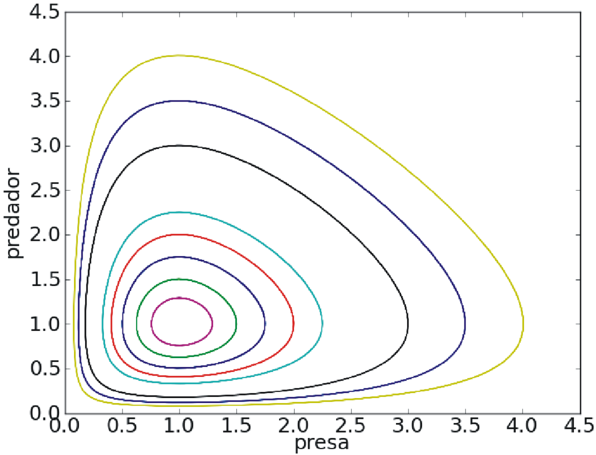
Modelo de Lotka-Volterra

- Desenvolvido para modelar a relação predadores e presas

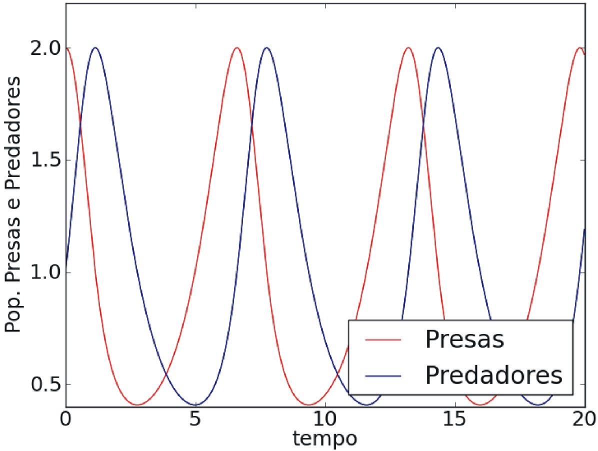
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_1\,x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 - x_1\,x_2 \end{aligned}$$

- x_1 é o número de predatores e x_2 é o número de presas
- Se $x_2 = 0$ (nenhuma presa) a solução é $x_1 = x_{10}\,e^{-t} \longrightarrow$ população de predadores cai exponencialmente a zero
- Se $x_1 = 0$ (o número de predadores é zero) a solução é $x_2 = x_{20}\,e^{t} \longrightarrow$ a população de presas aumenta exponencialmente
- A solução da equação, em um sistema com predatores e presas, é periódica

Modelo de Lotka-Volterra - Plano de fase



Modelo de Lotka-Volterra - Evolução no tempo



Alguns tópicos a serem abordados no curso

- Como determinar se um ponto de equilíbrio de um sistema não-linear é estável? Para o caso de sistemas lineares a resposta é trivial usando os autovalores
- Se um ponto de equilíbrio é estável, qual o conjunto de condições iniciais para as quais a trajetória retorna para este ponto de equilíbrio?
- Em que condições uma solução periódica pode existir para um sistema não-linear? Qual a freqüência e a amplitude da oscilação?
- Quais técnicas podem ser empregadas para o controle de um sistema não-linear?

Sistemas de segunda ordem

- Sistemas de segunda ordem apresentam vantagens já que as soluções podem ser representadas por curvas no plano
- conceitos relacionados a sistemas não-lineares tem uma interpretação geométrica simples
- Nem todos os resultados válidos para sistemas de segunda ordem podem ser estendidos para sistemas de ordem superior

Trajetória e espaço de estado

- Sistema de segunda ordem representado de forma genérica por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1[t, x_1(t), x_2(t)] \\ \dot{x}_2 &= f_2[t, x_1(t), x_2(t)] \end{aligned}$$

- Considerando apenas sistemas autônomos

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

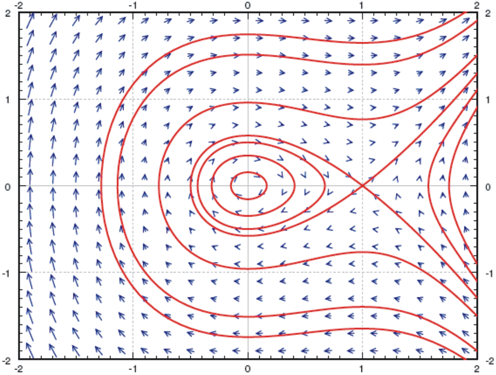
- **Trajetória** é solução $[x_1, x_2]$ no plano x_1, x_2
- Se a primeira equação for

$$\dot{x}_1 = x_2(t)$$

o espaço de estado é chamado plano de fase

Exemplo de Plano de fase

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_1^2\end{aligned}$$



Campo vetorial

- A cada vetor $[x_1 \quad x_2]^T$ pode-se associar um vetor $\mathbf{f} = [f_1(x_1, x_2) \quad f_2(x_1, x_2)]^T$ chamado campo vetorial

Definição

Um campo vetorial é uma função contínua $\mathbf{f} : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$. *A direção do campo vetorial* $\mathbf{f}$ *no ponto* $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^2$ *é dada por*

$$\theta_t = tan^{-1} \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

- Tem-se ainda

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

- O vetor $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ é tangente à trajetória em $\mathbf{x}$

Pontos singulares (I)

- Em um ponto qualquer do plano de fase, $f2(x_1, x_2)/f1(x_1, x_2)$ é a inclinação da reta tangente à trajetória e tem valor bem definido;

Pontos singulares (I)

- Em um ponto qualquer do plano de fase, $f2(x_1, x_2)/f1(x_1, x_2)$ é a inclinação da reta tangente à trajetória e tem valor bem definido;
- Este fato implica que as trajetórias não se interceptam;

Pontos singulares (I)

- Em um ponto qualquer do plano de fase, $f2(x_1, x_2)/f1(x_1, x_2)$ é a inclinação da reta tangente à trajetória e tem valor bem definido;
- Este fato implica que as trajetórias não se interceptam;
- Porém em um ponto de equilíbrio do sistema de 2a. ordem:

$$\frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = \frac{0}{0}$$

ou seja, a inclinação é indeterminada $\Longrightarrow$ muitas trajetórias podem se interceptar em pontos de equilíbrio;

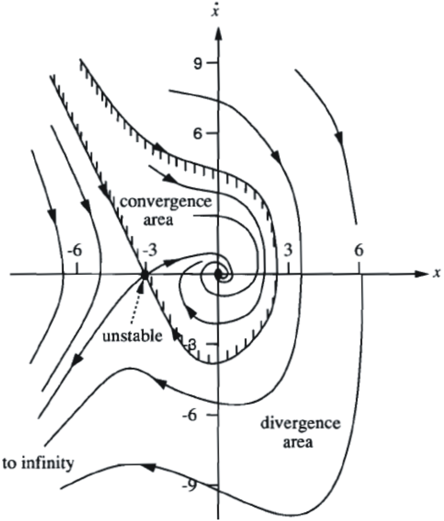
Pontos singulares (I)

- Em um ponto qualquer do plano de fase, $f2(x_1, x_2)/f1(x_1, x_2)$ é a inclinação da reta tangente à trajetória e tem valor bem definido;
- Este fato implica que as trajetórias não se interceptam;
- Porém em um ponto de equilíbrio do sistema de 2a. ordem:

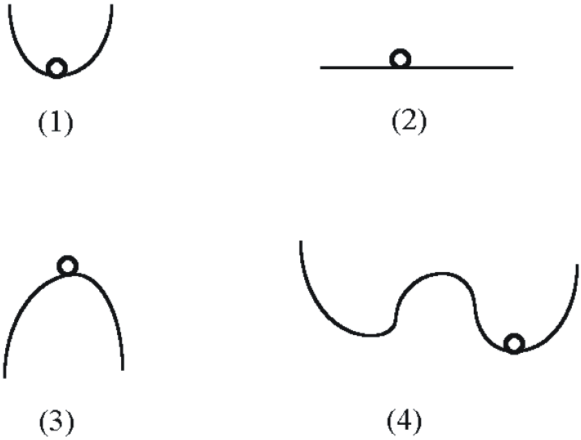
$$\frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = \frac{0}{0}$$

  ou seja, a inclinação é indeterminada $\Longrightarrow$ muitas trajetórias podem se interceptar em pontos de equilíbrio;
- Devido a esta indeterminação, os pontos de equilíbrio são considerados pontos singulares.

Ilustração de Pontos Singulares



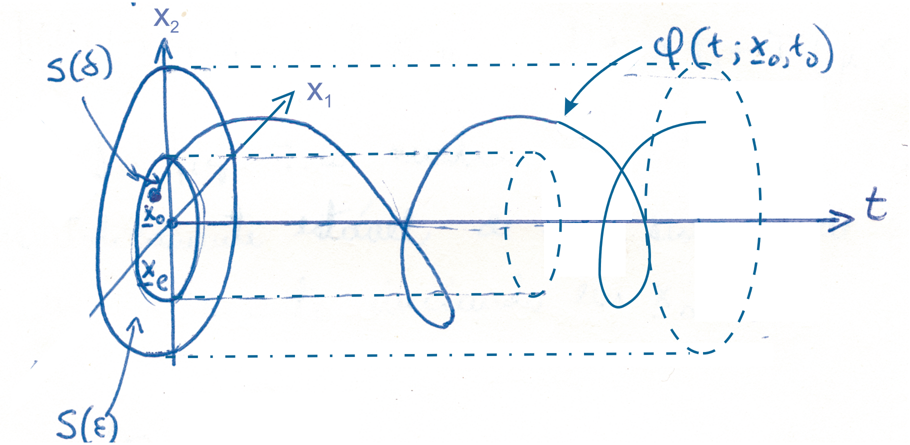
Interpretação Intuitiva de Estabilidade



Estabilidade no sentido de Lyapunov

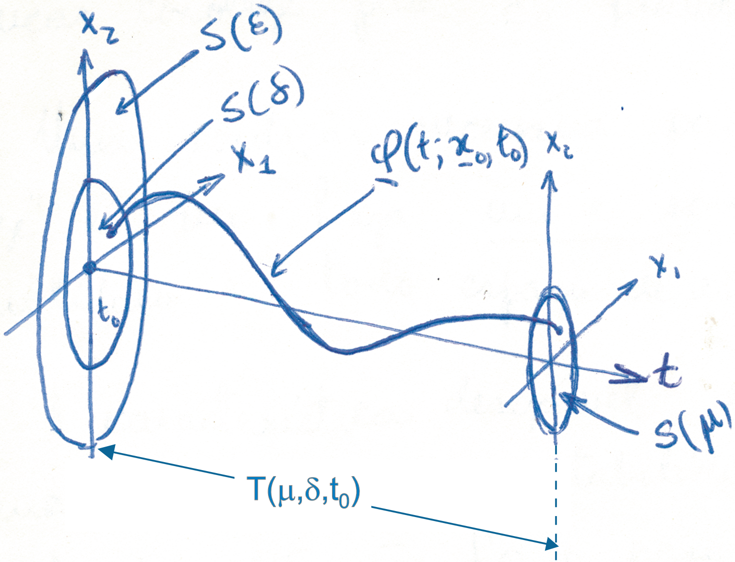
Um estado de equilíbrio $\mathbf{x}^e$ é **estável no sentido de Lyapunov** se e somente se, para cada número real $\varepsilon > 0$ existe um número real $\delta(\varepsilon, t_0)$ tal que

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^e\| \leq \delta \Longrightarrow \|\boldsymbol{\phi}(t; \mathbf{x}_0, t_0)\| \leq \varepsilon \ , \ \forall t \geq t_0$$


x2
x1
S(δ)
x0
xe
S(ε)
φ(t; x0, t0)
t

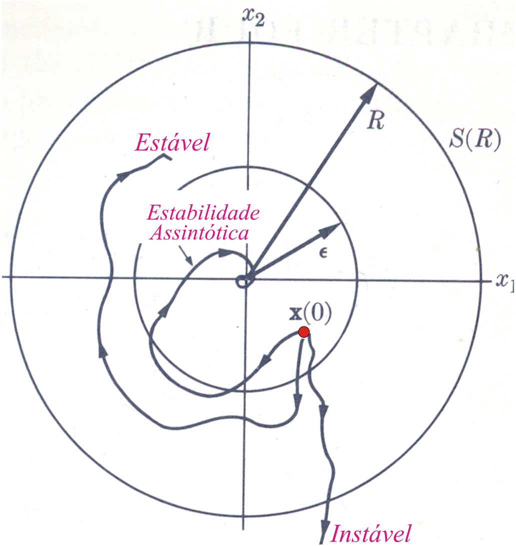
Estabilidade Assintótica

Um estado de equilíbrio $\mathbf{x}^e$ é **assintoticamente estável** se for estável no sentido de Lyapunov e se toda solução que se inicie em um estado $\mathbf{x}_0$ suficientemente próximo a $\mathbf{x}^e$ convirja para $\mathbf{x}^e$ quando $t \longrightarrow \infty$.



x_2
$S(\varepsilon)$
$S(\delta)$
x_1
$\varphi(t; \underline{x}_0, t_0)$
x_2
t_0
x_1
t
$S(\mu)$
$T(\mu,\delta,t_0)$

Ilustração das definições de Estabilidade no Plano de Fase



Estabilidade "in the large"

O estado de equilíbrio $\mathbf{x}^e$ é **assintoticamente estável "in the large"** se for estável n.s.L. e se *toda* solução converge para $\mathbf{x}^e$ quando $t \longrightarrow \infty$.

- Observações:

Estabilidade "in the large"

O estado de equilíbrio $\mathbf{x}^e$ é **assintoticamente estável "in the large"** se for estável n.s.L. e se *toda* solução converge para $\mathbf{x}^e$ quando $t \longrightarrow \infty$.

- Observações:
  - Uma condição necessária para estabilidade assintótica "in the large" é que haja *um e somente um* estado de equilíbrio em todo espaço de estado;

Estabilidade "in the large"

O estado de equilíbrio $\mathbf{x}^e$ é **assintoticamente estável "in the large"** se for estável n.s.L. e se *toda* solução converge para $\mathbf{x}^e$ quando $t \longrightarrow \infty$.

- Observações:
  - Uma condição necessária para estabilidade assintótica "in the large" é que haja *um e somente um* estado de equilíbrio em todo espaço de estado;
  - Quando a origem de um sistema *linear* for assintoticamente estável, então ela também será assintoticamente estável "in the large". Da mesma forma, se um estado de equilíbrio de um sistema linear é estável n.s.L., ele também o será "in the large";

Estabilidade "in the large"

O estado de equilíbrio $\mathbf{x}^e$ é **assintoticamente estável "in the large"** se for estável n.s.L. e se *toda* solução converge para $\mathbf{x}^e$ quando $t \longrightarrow \infty$.

- Observações:
    - Uma condição necessária para estabilidade assintótica "in the large" é que haja *um e somente um* estado de equilíbrio em todo espaço de estado;
    - Quando a origem de um sistema *linear* for assintoticamente estável, então ela também será assintoticamente estável "in the large". Da mesma forma, se um estado de equilíbrio de um sistema linear é estável n.s.L., ele também o será "in the large";
    - Para sistemas *não lineares*, se um $\mathbf{x}^e$ não for assintoticamente estável "in the large", o problema se transforma na determinação da maior região de estabilidade assintótica (maior domínio de atração);

Estabilidade "in the large"

O estado de equilíbrio $\mathbf{x}^e$ é **assintoticamente estável "in the large"** se for estável n.s.L. e se *toda* solução converge para $\mathbf{x}^e$ quando $t \longrightarrow \infty$.

- Observações:
  - Uma condição necessária para estabilidade assintótica "in the large" é que haja *um e somente um* estado de equilíbrio em todo espaço de estado;
  - Quando a origem de um sistema *linear* for assintoticamente estável, então ela também será assintoticamente estável "in the large". Da mesma forma, se um estado de equilíbrio de um sistema linear é estável n.s.L., ele também o será "in the large";
  - Para sistemas *não lineares*, se um $\mathbf{x}^e$ não for assintoticamente estável "in the large", o problema se transforma na determinação da maior região de estabilidade assintótica (maior domínio de atração);
  - Na prática, busca-se determinar um domínio de atração suficientemente grande para que nenhuma perturbação o exceda.

Sistema linear de segunda ordem

- Sistema linear autônomo de segunda ordem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2\\ \dot{x}_2 &= a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2\end{aligned}$$

com condições iniciais dadas por

$$\begin{aligned}x_1(0) &= x_{10}\\ x_2(0) &= x_{20}\end{aligned}$$

- Na forma matricial

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\,\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

onde $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2]^T$ e

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

- Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores de $\mathbf{A}$ com autovetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, respectivamente

Diagonalização

- Uma solução pode ser obtida facilmente se a matriz $\mathbf{A}$ for diagonalizada
- Isto permite desacoplar as duas equações, resolvendo-as uma de cada vez e obtendo a forma das trajetórias
- A diagonalização de $\mathbf{A}$ pode ser feita por uma transformação de similaridade $\mathbf{z} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x}$ onde $\mathbf{Q}$ é dada por

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}$$

Diagonalização

- Usando-se a transformação de similaridade

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Q}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{Q}\,\mathbf{x}$$

- A matriz $\mathbf{Q}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{Q}$ é diagonal

$$\mathbf{Q}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Caso de autovalores reais

- λ_1 e λ_2 são os autovalores reais de $\mathbf{A}$
- λ_1 e λ_2 não são necessariamente distintos
- A matriz diagonal pode ser obtida no caso de autovalores iguais se autovetores linearmente independentes puderem ser obtidos
- Se os autovalores são repetidos e autovetores linearmente independentes não puderem ser obtidos pode-se ainda obter a forma de Jordan

$$\mathbf{Q}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Caso de autovalores complexos

- Autovalores complexos conjugados dados por $\alpha \pm j\beta$
- Os autovetores são $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2^\star$
- Pode-se obter

$$\mathbf{Q}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

- A matriz $\mathbf{Q}$ é dada por

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Re(\mathbf{v}_1) & Im(\mathbf{v}_1) \end{bmatrix}$$

Solução para autovalores reais

- Na forma diagonal

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1 \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2 \end{aligned}$$

com condições iniciais

$$\begin{aligned} z_1(0) &= z_{10} \\ z_2(0) &= z_{20} \end{aligned}$$

- As soluções são dadas por

$$\begin{aligned} z_1 &= z_{10}\, e^{\lambda_1 t} \\ z_2 &= z_{20}\, e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

Equação das trajetórias

- Supondo $\lambda_1 \neq 0$

$$\begin{aligned} \ln z_1 &= \ln z_{10} + \lambda_1 t \\ \ln z_2 &= \ln z_{20} + \lambda_2 t \end{aligned}$$

- Eliminando-se o tempo

$$z_2 = z_{20} \left(\frac{z_1}{z_{10}} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

Solução para autovalores complexos

- Para $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ o sistema pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \alpha\, z_1 + \beta\, z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\beta\, z_1 + \alpha_2\, z_2 \end{aligned}$$

com condições iniciais

$$\begin{aligned} z_1(0) &= z_{10} \\ z_2(0) &= z_{20} \end{aligned}$$

- A forma das trajetórias pode ser obtida com uma transformação de coordenadas para a forma polar

Equações na forma polar

- Definindo-se:

$$\begin{aligned} r &= (z_1^2 + z_2^2)^{\frac{1}{2}} \\ \phi &= tg^{-1}\frac{z_2}{z_1} \end{aligned}$$

- Derivando-se a primeira equação

$$\dot{r} = \frac{\alpha(z_1^2 + z_2^2)}{(z_1^2 + z_2^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ou

$$\boxed{\dot{r} = \alpha\, r}$$

- Derivando-se a segunda equação

$$\boxed{\dot{\phi} = -\beta}$$

- Sistema na forma polar

Trajetórias

- O comportamento das trajetórias pode ser estudado usando-se
  - para autovalores reais

$$z_2 = z_{20} \left(\frac{z_1}{z_{10}} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

  - para autovalores complexos

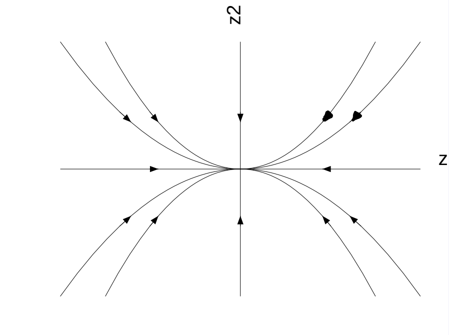
$$\begin{aligned} \dot{r} &= \alpha\, r \\ \dot{\phi} &= -\beta \end{aligned}$$

- Dependendo de λ_1 e λ_2 vários casos podem ocorrer

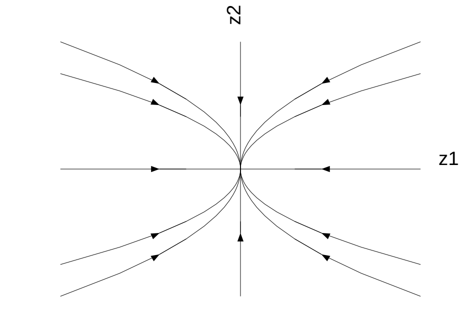
Nó estável

- λ_1 e λ_2 são reais de mesmo sinal e negativos
- O ponto de equilíbrio é chamado **nó estável**.

$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$



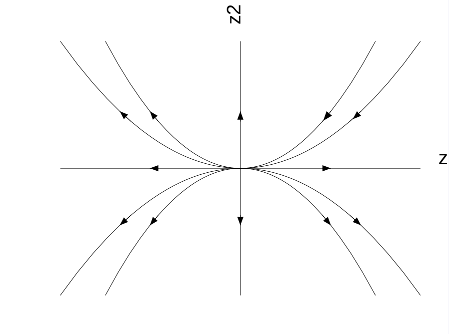
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$



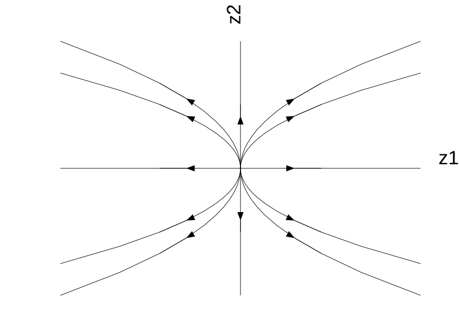
Nó instável

- λ_1 e λ_2 reais de mesmo sinal e positivos
- O ponto de equilíbrio é chamado um **nó instável**

$0 < \lambda_1 < \lambda_2$



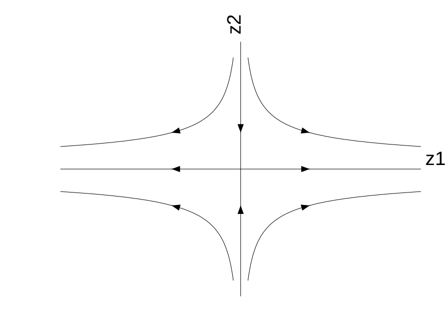
$0 < \lambda_2 < \lambda_1$



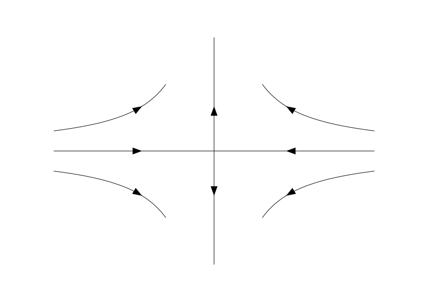
Ponto de sela

- Caso onde λ_1 e λ_2 reais de sinais opostos
- O ponto de equilíbrio é chamado de **ponto de sela**

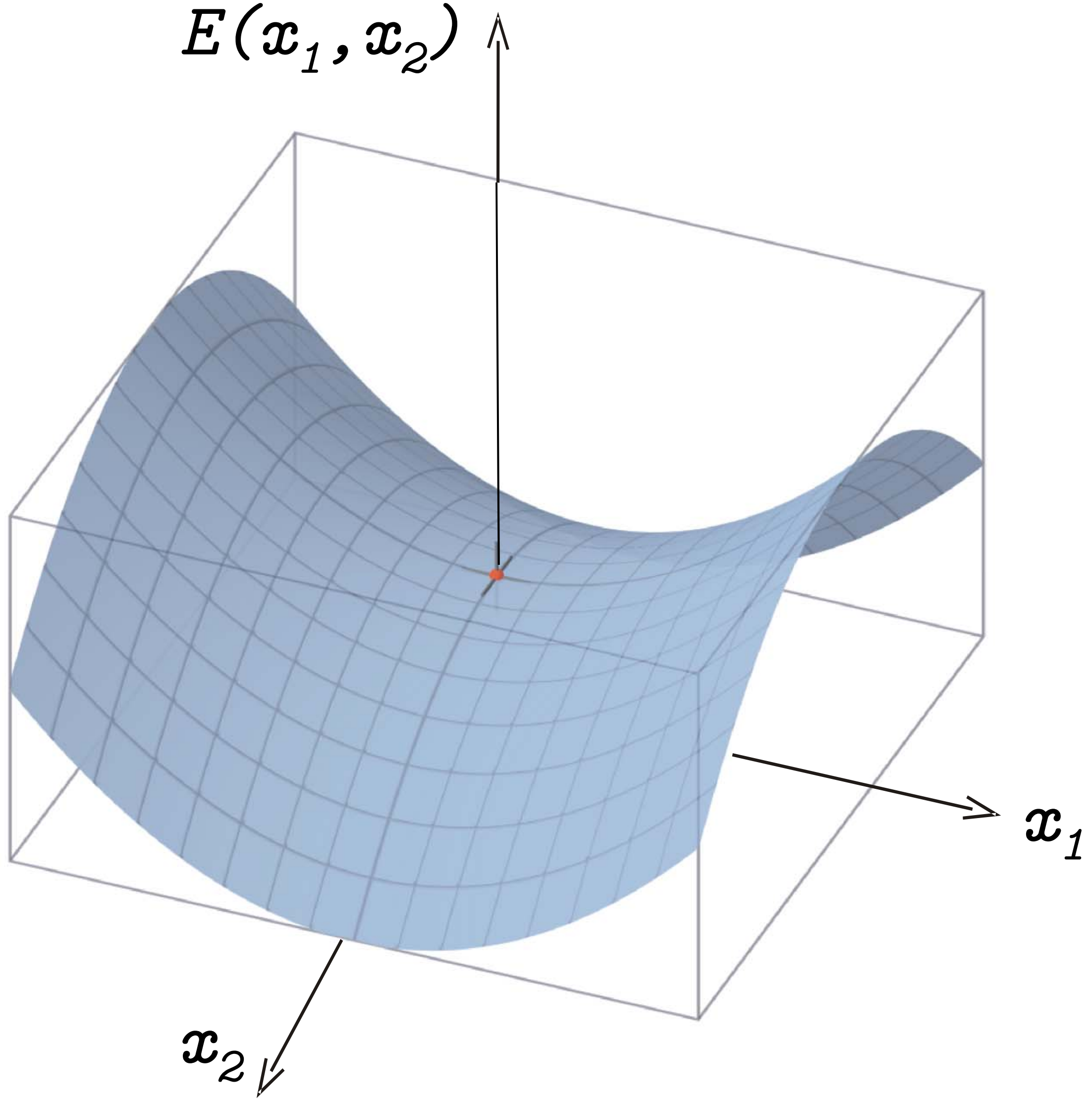
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$



$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

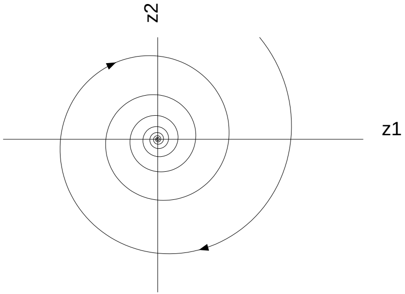


Ponto de Sela



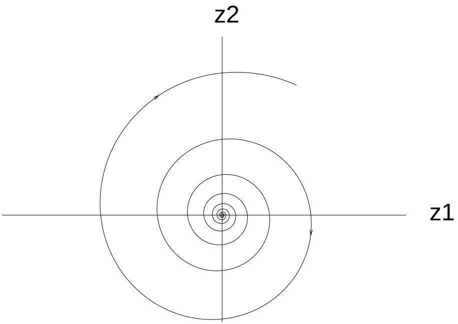
Foco estável

- Caso onde λ_1 e λ_2 são complexos conjugados com $\alpha < 0$.
- O ponto de equilíbrio neste caso é chamado um **foco estável**.



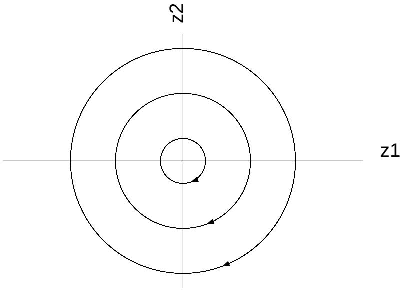
Foco instável

- Caso onde λ_1 e λ_2 são complexos conjugados com $\alpha > 0$
- O ponto de equilíbrio é chamado de **foco instável**.

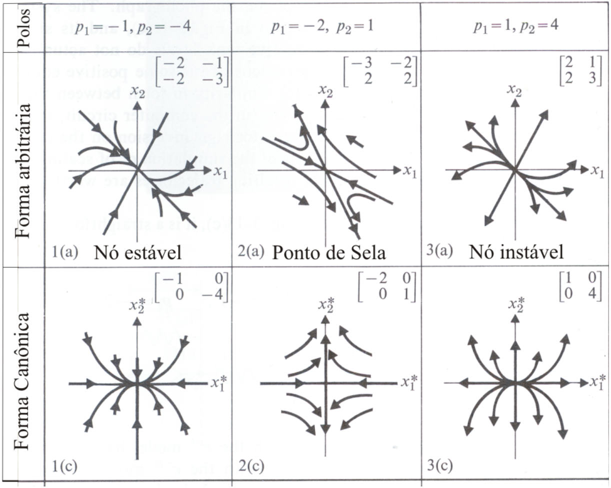


Centro

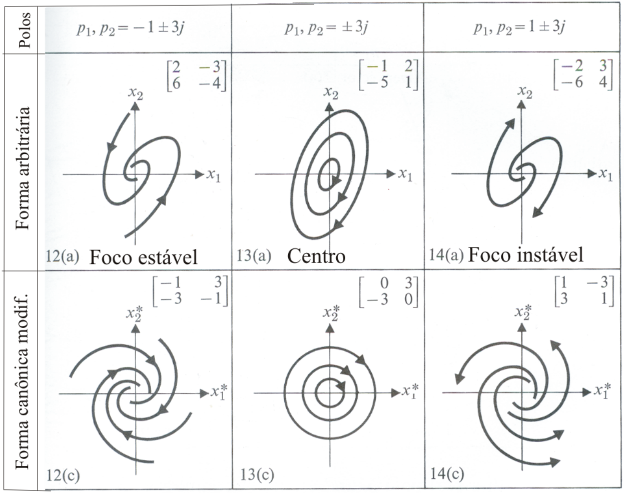
- Caso onde $\alpha = 0$. Os autovalores são imaginários puros
- O ponto de equilíbrio é chamado de **centro**.



Planos de fase, formas genérica e canônica - polos reais



Planos de fase, formas genérica e canônica - polos complexos



Sistemas não-lineares

- Seja o sistema não-linear autônomo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

- $(0, 0)$ é considerado o ponto de equilíbrio

$$0 = f_1(0, 0) \tag{1}$$
$$0 = f_2(0, 0) \tag{2}$$

- Translação de eixos assegura ponto de equilíbrio na origem

Linearização

- Expansão em série de Taylor na vizinhança do ponto de equilíbrio $(0,0)$

$$\begin{aligned}
f_1(x_1,x_2) &= f_1(0,0) + \left.\frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|_{(0,0)} x_1 + \left.\frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|_{(0,0)} x_2 \\
&\quad + \text{termos de ordem mais elevada} \\
f_2(x_1,x_2) &= f_2(0,0) + \left.\frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|_{(0,0)} x_1 + \left.\frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|_{(0,0)} x_2 \\
&\quad + \text{termos de ordem mais elevada}
\end{aligned}$$

- Desde que $f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0$ e desprezando-se os termos de ordem mais elevada da série

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 \\
\dot{y}_2 &= a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2
\end{aligned}
$$

- Onde

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \left.\frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|_{(0,0)} & a_{12} &= \left.\frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|_{(0,0)} \\
a_{21} &= \left.\frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|_{(0,0)} & a_{22} &= \left.\frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|_{(0,0)}
\end{aligned}
$$

Estabilidade do ponto de equilíbrio pela linearização

- Os termos de primeira ordem da série de Taylor correspondem à matriz jacobiana calculada no ponto de equilíbrio:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(0,0)}$$

- Os autovalores da matriz jacobiana determinam a estabilidade do ponto de equilíbrio.

Pontos de equilíbrio para o sistema linearizado e não-linear

Sistema linearizado	Sistema não-linear
Ponto de equilíbrio $y_1 = 0, y_2 = 0$	Ponto de equilíbrio $x_1 = 0, x_2 = 0$
Nó estável	Nó estável
Nó instável	Nó instável
Ponto de sela	Ponto de sela
Foco estável	Foco estável
Foco Instável	Foco instável
Centro	Nada se afirma

Trajetórias do sistema não-linear

- Pode-se determinar o comportamento das trajetórias do sistema não-linear em uma vizinhança do ponto de equilíbrio a partir das trajetórias do sistema linearizado
- Isto não se aplica se a matriz jacobiana

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

  tiver autovalores com parte real zero
- No caso de centro no sistema linearizado os termos desprezados na série de Taylor é que vão indicar se há crescimento ou decrescimento das oscilações
- Se o ponto de equlíbrio é tal que a matriz jacobiana calculada neste ponto de equilíbrio não tem autovalores com parte real zero, então o ponto de equilíbrio é chamado *hiperbólico* ou *não-degenerado*.

Primeiro Método de Lyapunov: conclusões

- Se todos os autovalores de **A** estão estritamente no semiplano complexo esquerdo, então o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável para o sistema não-linear;
- Se ao menos um dos autovalores de **A** pertencer *estritamente* ao semiplano complexo direito, então o ponto de equilíbrio é instável para o sistema não-linear;
- Se pelo menos um dos autovalores de **A** está sobre o eixo $j\omega$ e os demais estão no semiplano complexo esquerdo, então nada se pode concluir a partir da aproximação linear (o ponto de equilíbrio pode ser estável, assintoticamente estável, ou instável para o sistema não-linear).

Observações sobre o Primeiro Método de Lyapunov

- A indefinição no caso de autovalores com parte real nula (com todos os outros tendo parte real < 0) deve-se ao fato de que a estabilidade neste caso não pode ser determinada pela aproximação de 1a. ordem, pois depende fortemente dos termos de ordem superior da aproximação em série de Taylor para $\mathbf{f}(\mathbf{x})$;

Observações sobre o Primeiro Método de Lyapunov

- A indefinição no caso de autovalores com parte real nula (com todos os outros tendo parte real < 0) deve-se ao fato de que a estabilidade neste caso não pode ser determinada pela aproximação de 1a. ordem, pois depende fortemente dos termos de ordem superior da aproximação em série de Taylor para $\mathbf{f}(\mathbf{x})$;

- Se o sistema em análise apresentar mais do que um ponto de equilíbrio, o primeiro método aplica-se a cada um deles, investigado separadamente;

Observações sobre o Primeiro Método de Lyapunov

- A indefinição no caso de autovalores com parte real nula (com todos os outros tendo parte real < 0) deve-se ao fato de que a estabilidade neste caso não pode ser determinada pela aproximação de 1a. ordem, pois depende fortemente dos termos de ordem superior da aproximação em série de Taylor para $\mathbf{f}(\mathbf{x})$;

- Se o sistema em análise apresentar mais do que um ponto de equilíbrio, o primeiro método aplica-se a cada um deles, investigado separadamente;

- O primeiro método de Lyapunov fornece informação apenas sobre a estabilidade local, isto é, não fornece nenhuma indicação sobre o tamanho do domínio de atração.

Primeiro método ou método indireto de Lyapunov

- Os resultados anteriores, discutidos para um sistema de segunda ordem, tem uma generalização para sistemas de qualquer ordem
- **Método indireto de Lyapunov**: Se todos os autovalores da matriz jacobiana $\mathbf{A}$ tem parte real negativa, então o ponto de equilíbrio do sistema não-linear é assintoticamente estável. Se algum autovalor de $\mathbf{A}$ tem parte real positiva, então o ponto de equilíbrio do sistema não-linear é instável.
- Observa-se que nada se pode concluir se existirem autovalores com parte real nula.

Exemplo 1

Estude a estabilidade local da origem do sistema

$$\dot{x}_1 = 2\,x_1\,x_2 - x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = 5\,x_1^4 + x_2^3 + 2\,x_1 - 3\,x_2$$

usando linearização.