EEL 7100
Despacho Econômico de Unidades Térmicas
Parte 1

Antonio Simões Costa

UFSC - LABSPOT

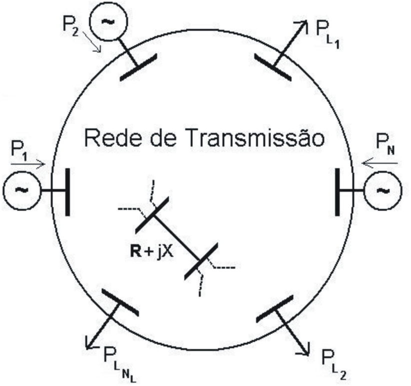
Introdução

- Importância da consideração da eficiência econômica na operação de sistemas de potência;
- Despacho de unidades térmicas:
  - Características das unidades geradoras térmicas;
  - Representação simplificada da rede elétrica;
  - Consideração das perdas de transmissão.
- O Despacho Econômico (DE) é um problema de *otimização com restrições*.

Modelagem da Rede no DE Clássico

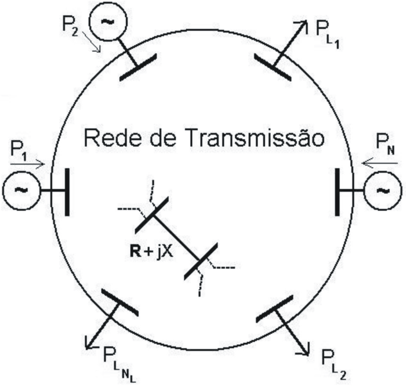
- Rede elétrica real

- Rede elétrica real



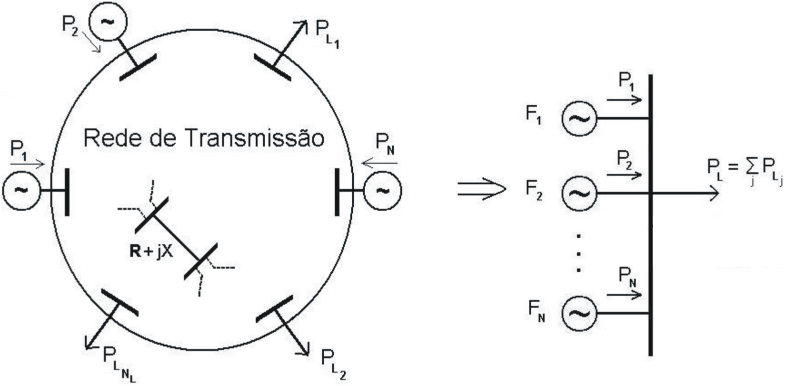
(a)

- Rede elétrica real
- Modelo em Barra única



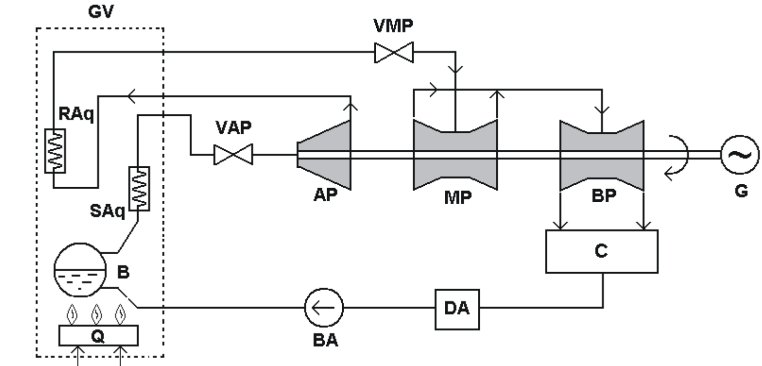
(a)

- Rede elétrica real
- Modelo em Barra única

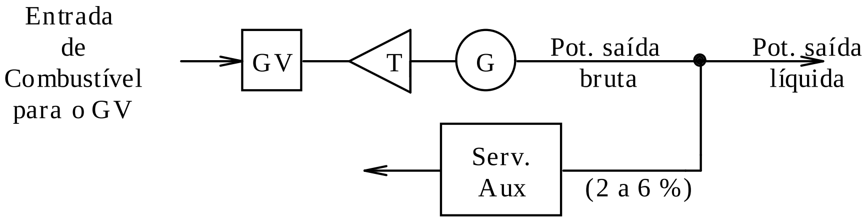


(a) **(b)**

Diagrama Esquemático de uma Central Térmica



Configuração Esquemática



Características das Unidades Térmicas

- Taxa de entrada de calor para a unidade $\times$ *Saída líquida de potência elétrica*:

$$\begin{array}{ll} H: & \text{Taxa de entrada de calor para a unidade, } MBtu/h \\ F: & \text{Custo operacional da unidade, } \$/h \end{array}$$

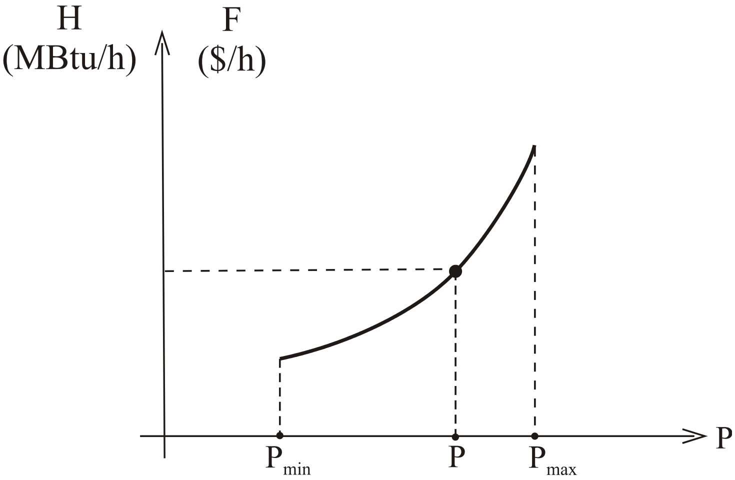
- Se f é o custo unitário de combustível, em $\$/MBtu$, então:

$$F = f \times H$$

  F pode ser encarado como *custo operacional* (incluindo mão-de-obra para operação da unidade);

- *Tanto* H quanto F são funções da potência elétrica líquida gerada, P

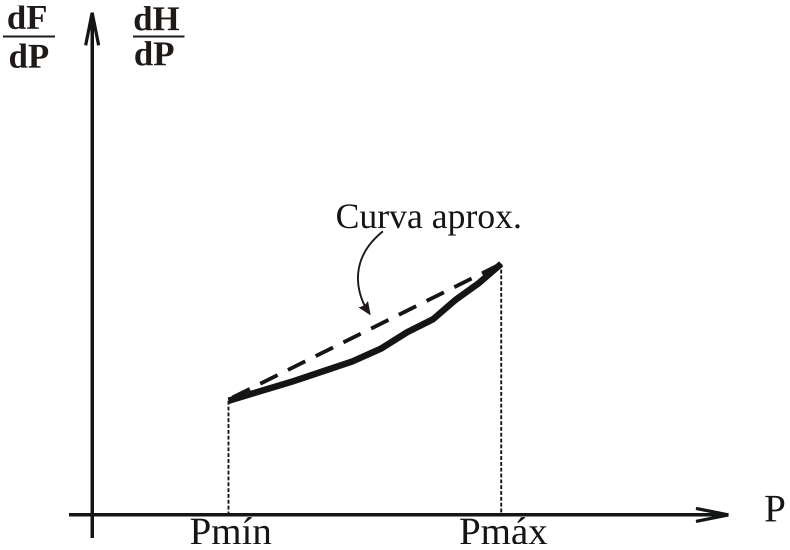
Curva típica entrada-saída



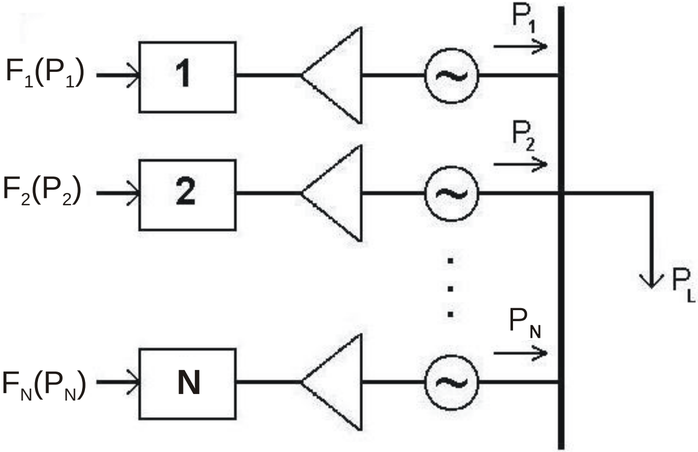
Curva entrada-saída (ou função de produção) de uma unidade térmica.

Potências Máxima e Mínima

- **Potência mínima**, $\underline{P}$: depende da estabilidade da combustão no GV ($\approx$ 30% da capacidade nominal, para unidades supercríticas);
- **Potência máxima,** $\overline{P}$: $\approx$ 5% da capacidade com válvulas totalmente abertas.


dF
dP
dH
dP
Curva aprox.
P
Pmín
Pmáx

Representação das Unidades Geradoras



Formulação matemática do Problema de Despacho Econômico

$$\min F_T(P_1, P_2, ..., P_N) = \sum_{i=1}^{N} F_i(P_i)$$

sujeito a

$$\begin{array}{rcccl} P_L & - & \sum_{i=1}^{N} P_i & = & 0 \\ \underline{P}_i & \leq & P_i & \leq & \overline{P}_i, \quad i = 1, ..., N \end{array}$$

Revisão de Otimização com Restrições

- Otimização Irrestrita
- Otimização com Restrições de Igualdade
- Otimização com Restrições de Igualdade e Desigualdade

Otimização Irrestrita

- Formulação matemática:

$$\boxed{\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})}$$

onde a *função-objetivo* $f(\mathbf{x})$ é uma função convexa de $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, x_2, \ldots, x_N]^T$;

Otimização Irrestrita

- Formulação matemática:

$$\boxed{\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})}$$

onde a *função-objetivo* $f(\mathbf{x})$ é uma função convexa de $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, x_2, \ldots, x_N]^T$;

- Condição de otimalidade:

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

Otimização Irrestrita

- Formulação matemática:

$$\boxed{\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})}$$

onde a *função-objetivo* $f(\mathbf{x})$ é uma função convexa de $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, x_2, \ldots, x_N]^T$;

- Condição de otimalidade:

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

- A condição de otimalidade acima fornece os *pontos estacionários;*

Otimização Irrestrita

- Formulação matemática:

$$\boxed{\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})}$$

onde a *função-objetivo* $f(\mathbf{x})$ é uma função convexa de $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, x_2, \ldots, x_N]^T$;

- Condição de otimalidade:

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

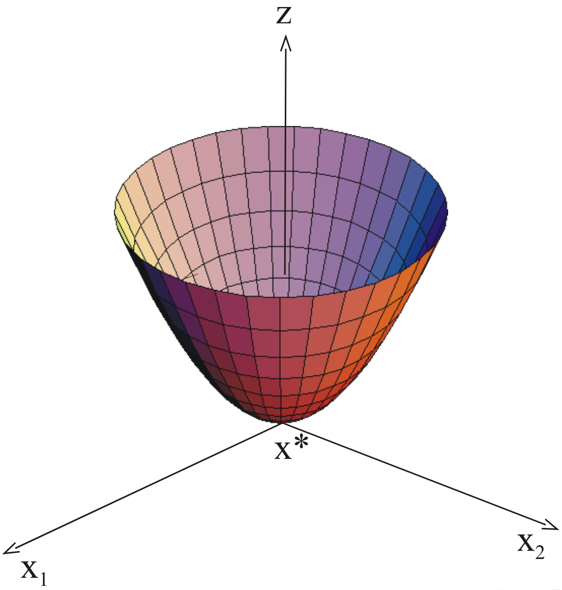
- A condição de otimalidade acima fornece os *pontos estacionários;*

- O mínimo de $f(\mathbf{x})$ é necessariamente um ponto estacionário.

Caso Irrestrito: Exemplo

$$\min_{\mathbf{x}} \; f(x_1, x_2) = 0,25 \; x_1^2 + x_2^2$$

Caso Irrestrito: interpretação gráfica



Otimização com restrições de igualdade

- Formulação matemática:

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a} & \\ & \omega(\mathbf{x}) = 0 \end{array}$$

- Formulação matemática:

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a} & \\ & \omega(\mathbf{x}) = 0 \end{array}$$

- Neste caso, forma-se a *Função Lagrangeana:*

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda\omega(\mathbf{x})$$

onde a variável escalar λ é chamada *multiplicador de Lagrange;*

Otimização com restrições de igualdade

- Formulação matemática:

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a} & \\ & \omega(\mathbf{x}) = 0 \end{array}$$

- Neste caso, forma-se a *Função Lagrangeana:*

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda\omega(\mathbf{x})$$

  onde a variável escalar λ é chamada *multiplicador de Lagrange;*
- As condições de otimalidade são:

Otimização com restrições de igualdade

- Formulação matemática:

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a} & \\ & \omega(\mathbf{x}) = 0 \end{array}$$

- Neste caso, forma-se a *Função Lagrangeana:*

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda\omega(\mathbf{x})$$

onde a variável escalar λ é chamada *multiplicador de Lagrange;*

- As condições de otimalidade são:
  - Factibilidade dual:

$$\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{L}\big|_* = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \nabla f(\mathbf{x}^*) + \lambda \ \nabla\omega(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

- Formulação matemática:

$$\begin{array}{ll} \text{min} & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a} & \\ & \omega(\mathbf{x}) = 0 \end{array}$$

- Neste caso, forma-se a *Função Lagrangeana:*

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda\omega(\mathbf{x})$$

  onde a variável escalar λ é chamada *multiplicador de Lagrange;*
- As condições de otimalidade são:
  - Factibilidade dual:

$$\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{L}|_* = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \nabla f(\mathbf{x}^*) + \lambda\ \nabla\omega(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

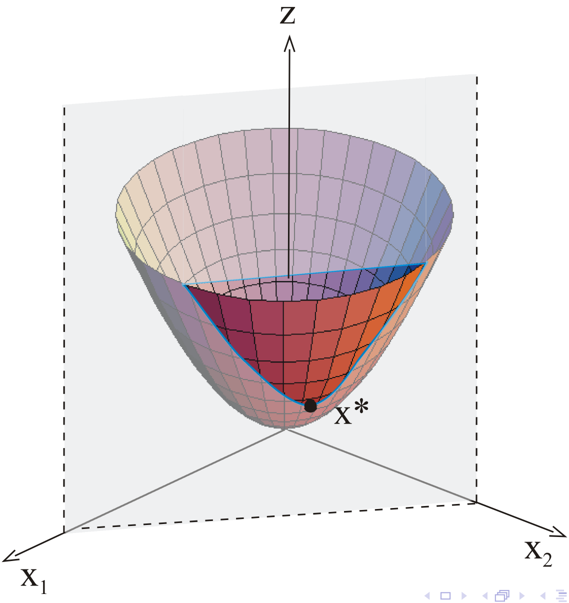
  - Factibilidade primal:

$$\nabla_{\lambda}\mathcal{L}|_* = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \omega(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

Caso restrito: Função-objetivo e Restrições

$$\begin{array}{ll} \text{min} & f(x_1, x_2) = 0,25\; x_1^2 + x_2^2 \\ \text{sujeito a} & \\ & \omega(x_1, x_2) = 5 - x_1 - x_2 = 0 \end{array}$$

Caso com restrições: ilustração



Condições de Otimalidade

- Função Lagrangeana:

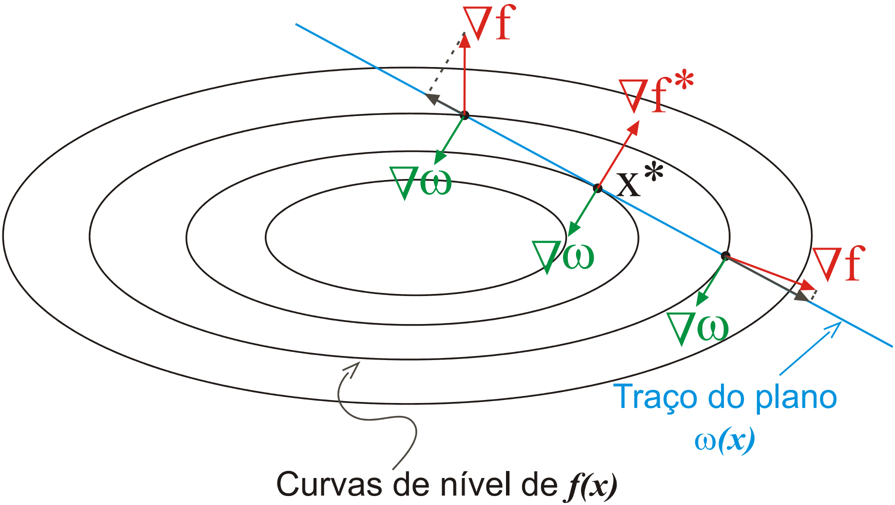
$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}\ \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$$

- Factibilidade dual:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \nabla_{\mathbf{x}}\ f(\mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\lambda}\ \nabla_{\mathbf{x}}\ \omega(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

- Factibilidade primal:

$$\nabla_{\lambda} \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \omega(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$



∇f
∇f*
x*
∇ω
∇ω
∇f
∇ω
Traço do plano
ω(x)
Curvas de nível de f(x)

Exemplo 1 de Despacho Econômico: Enunciado

Considere o problema de três unidades térmicas alimentando uma carga total de 800 MW. Os dados das unidades são:

Unidade 1:	$\underline{P}_1 = 150\ MW$	$\overline{P}_1 = 550\ MW$
	$F_1 = 500 + 8\,P_1 + 0,0016\,P_1^2$	
Unidade 2:	$\underline{P}_2 = 50\ MW$	$\overline{P}_2 = 200\ MW$
	$F_2 = 80 + 9\,P_2 + 0,0048\,P_2^2$	
Unidade 3:	$\underline{P}_3 = 80\ MW$	$\overline{P}_3 = 230\ MW$
	$F_3 = 100 + 8,5\,P_3 + 0,003\ P_3^2$	

Exemplo 1 de Despacho Econômico: Formulação

- O problema de DE para as 3 unidades é formulado como:

$$\min F_T(P_1, P_2, P_3) = F_1(P_1) + F_2(P_2) + F_3(P_3)$$

sujeito a

$$P_L - (P_1 + P_2 + P_3) = 0$$

Exemplo 1 de Despacho Econômico: Formulação

- O problema de DE para as 3 unidades é formulado como:

$$\min F_T(P_1, P_2, P_3) = F_1(P_1) + F_2(P_2) + F_3(P_3)$$

sujeito a

$$P_L - (P_1 + P_2 + P_3) = 0$$

- A função Lagrangeana neste caso é:

$$\mathcal{L}(P_1, P_2, P_2, \lambda) = \sum_{i=1}^{3} F_i(P_i) + \lambda(P_L - \sum_{i=1}^{N} P_i)$$

Exemplo 1 de Despacho Econômico: Formulação

- O problema de DE para as 3 unidades é formulado como:

$$\begin{aligned} &\min F_T(P_1, P_2, P_3) = F_1(P_1) + F_2(P_2) + F_3(P_3) \\ &\text{sujeito a} \\ &\qquad P_L - (P_1 + P_2 + P_3) \quad = \quad 0 \end{aligned}$$

- A função Lagrangeana neste caso é:

$$\mathcal{L}(P_1, P_2, P_2, \lambda) \quad = \quad \sum_{i=1}^{3} F_i(P_i) + \lambda(P_L - \sum_{i=1}^{N} P_i)$$

- As condições de otimalidade são:

Exemplo 1 de Despacho Econômico: Formulação

- O problema de DE para as 3 unidades é formulado como:

$$\min F_T(P_1, P_2, P_3) = F_1(P_1) + F_2(P_2) + F_3(P_3)$$
sujeito a
$$P_L - (P_1 + P_2 + P_3) = 0$$

- A função Lagrangeana neste caso é:

$$\mathcal{L}(P_1, P_2, P_2, \lambda) = \sum_{i=1}^{3} F_i(P_i) + \lambda(P_L - \sum_{i=1}^{N} P_i)$$

- As condições de otimalidade são:
  - Factibilidade dual:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{P}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{0} \implies \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_i}\right|_* = F_i'(P_i^*) - \lambda^* = 0, \;\; i = 1, 2, 3$$

Exemplo 1 de Despacho Econômico: Formulação

- O problema de DE para as 3 unidades é formulado como:

$$
\begin{aligned}
&\min F_T(P_1, P_2, P_3) = F_1(P_1) + F_2(P_2) + F_3(P_3) \\
&\text{sujeito a} \\
&\qquad P_L - (P_1 + P_2 + P_3) \quad = \quad 0
\end{aligned}
$$

- A função Lagrangeana neste caso é:

$$
\mathcal{L}(P_1, P_2, P_2, \lambda) \quad = \quad \sum_{i=1}^{3} F_i(P_i) + \lambda(P_L - \sum_{i=1}^{N} P_i)
$$

- As condições de otimalidade são:
  - Factibilidade dual:

$$
\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{P}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_i} \right|_* = F_i^{'}(P_i^*) - \lambda^* = 0, \;\; i = 1, 2, 3
$$

  - Factibilidade primal (equação de balanço de potência):

$$
\nabla_\lambda \mathcal{L}(\mathbf{P}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) {=} \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad P_L = P_1^* + P_2^* + P_3^*
$$

Exemplo 1 de Despacho Econômico: solução

- As condições de factibilidade dual fornecem:

$$\begin{array}{rcll} F_1'(P_1) = & 8 + 0,0032\ P_1 & = \lambda & \\ F_2'(P_2) = & 9 + 0,0096\ P_2 & = \lambda & \Rightarrow \\ F_3'(P_3) = & 8,5 + 0,006\ P_3 & = \lambda & \end{array} \quad \begin{array}{l} P_1 = (\lambda - 8)/0,0032 \\ P_2 = (\lambda - 9)/0,0096 \\ P_3 = (\lambda - 8,5)/0,006 \end{array}$$

Exemplo 1 de Despacho Econômico: solução

- As condições de factibilidade dual fornecem:

$$\begin{array}{rclcl} F_1'(P_1) = & 8 + 0,0032\ P_1 & = \lambda & & P_1 = (\lambda - 8)/0,0032 \\ F_2'(P_2) = & 9 + 0,0096\ P_2 & = \lambda & \Rightarrow & P_2 = (\lambda - 9)/0,0096 \\ F_3'(P_3) = & 8,5 + 0,006\ P_3 & = \lambda & & P_3 = (\lambda - 8,5)/0,006 \end{array}$$

- Substituindo P_1, P_2 e P_3 na equação de balanço de potência com $P_L = 800\ MW$:

$$\frac{\lambda - 8}{0,0032} + \frac{\lambda - 9}{0,0096} + \frac{\lambda - 8,5}{0,006} = 800 \;\Rightarrow\; \lambda^* = 9,693\ \$/MWh$$

Exemplo 1 de Despacho Econômico: solução

- As condições de factibilidade dual fornecem:

$$
\begin{array}{rcll}
F_1'(P_1) = & 8 + 0,0032\ P_1 & = \lambda & \qquad P_1 = (\lambda - 8)/0,0032 \\
F_2'(P_2) = & 9 + 0,0096\ P_2 & = \lambda \quad \Rightarrow & \qquad P_2 = (\lambda - 9)/0,0096 \\
F_3'(P_3) = & 8,5 + 0,006\ P_3 & = \lambda & \qquad P_3 = (\lambda - 8,5)/0,006
\end{array}
$$

- Substituindo P_1, P_2 e P_3 na equação de balanço de potência com $P_L = 800\ MW$:

$$\frac{\lambda - 8}{0{,}0032} + \frac{\lambda - 9}{0{,}0096} + \frac{\lambda - 8{,}5}{0{,}006} = 800 \quad \Rightarrow \quad \lambda^* = 9,693\ \$/MWh$$

- Com este valor de λ obtemos as potências geradas:

$$P_1^* = 529,02\ MW \quad P_2^* = 72,17\ MW \quad P_3^* = 198,81\ MW$$

Exemplo 1 de Despacho Econômico: solução

- As condições de factibilidade dual fornecem:

$$\begin{array}{rclcl} F_1'(P_1) = & 8 + 0,0032\ P_1 & = \lambda & & P_1 = (\lambda - 8)/0,0032 \\ F_2'(P_2) = & 9 + 0,0096\ P_2 & = \lambda & \Rightarrow & P_2 = (\lambda - 9)/0,0096 \\ F_3'(P_3) = & 8,5 + 0,006\ P_3 & = \lambda & & P_3 = (\lambda - 8,5)/0,006 \end{array}$$

- Substituindo P_1, P_2 e P_3 na equação de balanço de potência com $P_L = 800\ MW$:

$$\frac{\lambda - 8}{0,0032} + \frac{\lambda - 9}{0,0096} + \frac{\lambda - 8,5}{0,006} = 800 \ \Rightarrow\ \lambda^* = 9,693\ \$/MWh$$

- Com este valor de λ obtemos as potências geradas:

$$P_1^* = 529,02\ MW \quad P_2^* = 72,17\ MW \quad P_3^* = 198,81\ MW$$

- Como todas elas obedecem os limites mínimos e máximos das respectivas unidades, este é o despacho ótimo.

Exemplo 2 de Despacho Econômico

Reconsidere o problema de três unidades térmicas, cujos dados são os mesmos do Exemplo 1. Entretanto, a carga total é agora aumentada para 950 MW. Recalcule o despacho ótimo das unidades.

Solução:

- Como apenas P_L muda em relação ao Exemplo 1, o novo valor de λ é obtido de

$$\frac{\lambda - 8}{0{,}0032} + \frac{\lambda - 9}{0{,}0096} + \frac{\lambda - 8{,}5}{0{,}006} = 950 \;\; \Rightarrow \;\; \lambda^* = 9,95 \;\$/\,MWh$$

que fornece

$$P_1 = 609,37 \;\; MW \quad P_2 = 98,96 \;\; MW \quad P_3 = 241 \;\; MW$$

Reconsidere o problema de três unidades térmicas, cujos dados são os mesmos do Exemplo 1. Entretanto, a carga total é agora aumentada para 950 MW. Recalcule o despacho ótimo das unidades.

Solução:

- Como apenas P_L muda em relação ao Exemplo 1, o novo valor de λ é obtido de

$$\frac{\lambda-8}{0{,}0032}+\frac{\lambda-9}{0{,}0096}+\frac{\lambda-8{,}5}{0{,}006}=950 \;\Rightarrow\; \lambda^*=9,95\ \$/MWh$$

que fornece

$$P_1=609,37\ MW \quad P_2=98,96\ MW \quad P_3=241\ MW$$

- Observa-se que $P_1 > \overline{P}_1$ e $P_3 > \overline{P}_3$. Portanto esta solução é *inviável*.

Observações sobre o Exemplo 2

- A não consideração dos limites de geração na formulação do problema pode conduzir a soluções inviáveis;

Observações sobre o Exemplo 2

- A não consideração dos limites de geração na formulação do problema pode conduzir a soluções inviáveis;
- É possível modificar a solução obtida de modo a torná-la viável, mas não haverá garantias sobre a otimalidade da nova solução encontrada;

Observações sobre o Exemplo 2

- A não consideração dos limites de geração na formulação do problema pode conduzir a soluções inviáveis;
- É possível modificar a solução obtida de modo a torná-la viável, mas não haverá garantias sobre a otimalidade da nova solução encontrada;
- Fica evidente a necessidade da consideração dos limites de geração, sob a forma de restrições de desigualdade, na formulação e solução do problema de otimização.