EEL 7100
Despacho Econômico de Unidades Térmicas
Parte 2

Antonio Simões Costa

UFSC - LABSPOT

Inclusão das Restrições de Desigualdade

- Formulação matemática do problema de otimização

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min\limits_{\mathbf{x}} & f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a:} & \\ & \omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{array}} \quad \begin{array}{l} (\mathbf{x}: \; n \times 1) \\ \\ \textit{(uma restrição)} \\ (N_g \; \textit{restrições}) \end{array}$$

Inclusão das Restrições de Desigualdade

- Formulação matemática do problema de otimização

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min\limits_{\mathbf{x}} & f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a:} & \\ & \omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{array}} \quad \begin{array}{l} (\mathbf{x}: \ n \times 1) \\ \\ \textit{(uma restrição)} \\ (N_g \ \textit{restrições}) \end{array}$$

- Função Lagrangeana:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = f(\mathbf{x}) + \lambda\, \omega(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}),$$

onde

$$\boldsymbol{\pi} = \left[\ \pi_1 \quad \pi_2 \quad \ldots \quad \pi_{N_g}\ \right]^T$$

é o vetor de multiplicadores de Lagrange das restrições de desigualdade.

Classificação das variáveis

- Problema de otimização e função Lagrangeana:

$$
\begin{aligned}
\min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\
\text{Sujeito a:} \quad & \\
& \omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\
& \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = f(\mathbf{x}) + \lambda\, \omega(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

Classificação das variáveis

- Problema de otimização e função Lagrangeana:

$$\begin{array}{rl} \min\limits_{\mathbf{x}} & f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a:} & \\ & \omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{array}$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = f(\mathbf{x}) + \lambda\, \omega(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

- Variáveis primais - são as variáveis de otimização, **x**;

Classificação das variáveis

- Problema de otimização e função Lagrangeana:

$$\min_{\mathbf{x}} \quad f(\mathbf{x})$$

Sujeito a:

$$\omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = f(\mathbf{x}) + \lambda\, \omega(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

- Variáveis primais - são as variáveis de otimização, $\mathbf{x}$;
- Variáveis duais - são os multiplicadores de Lagrange:

Classificação das variáveis

- Problema de otimização e função Lagrangeana:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a:} \quad & \\ & \omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = f(\mathbf{x}) + \lambda\, \omega(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

- Variáveis primais - são as variáveis de otimização, $\mathbf{x}$;
- Variáveis duais - são os multiplicadores de Lagrange:
  - da restrição de igualdade, λ;

Classificação das variáveis

- Problema de otimização e função Lagrangeana:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a:} \quad & \\ & \omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = f(\mathbf{x}) + \lambda\, \omega(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

- Variáveis primais - são as variáveis de otimização, $\mathbf{x}$;
- Variáveis duais - são os multiplicadores de Lagrange:
  - da restrição de igualdade, λ;
  - das restrições de desigualdade, $\boldsymbol{\pi}$.

Condições de Otimalidade

A otimalidade da solução exige o cumprimento das condições de Karush-Kuhn-Tucker, que consistem de:

- Condições de Factibilidade Dual;

Condições de Otimalidade

A otimalidade da solução exige o cumprimento das condições de Karush-Kuhn-Tucker, que consistem de:

- Condições de Factibilidade Dual;
- Condições de Factibilidade Primal;

Condições de Otimalidade

A otimalidade da solução exige o cumprimento das condições de Karush-Kuhn-Tucker, que consistem de:

- Condições de Factibilidade Dual;
- Condições de Factibilidade Primal;
- Condições de Folga Complementar.

- Problema de Otimização e Função Lagrangeana:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a:} \quad & \\ & \omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = f(\mathbf{x}) + \lambda\ \omega(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

- Problema de Otimização e Função Lagrangeana:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a:} \quad & \\ & \omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = f(\mathbf{x}) + \lambda\, \omega(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

- Factibilidade Dual:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}|_* = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \nabla f(\mathbf{x}^*) + \lambda^*\, \boldsymbol{\nabla}\omega(\mathbf{x}^*) + \mathbf{G}(\mathbf{x}^*)^T\, \boldsymbol{\pi}^* = \mathbf{0},$$

onde

$$\boldsymbol{\nabla}\omega = [\partial\omega/\partial\mathbf{x}] \;\; (n \times 1) \quad \text{e} \quad \mathbf{G}(\mathbf{x}) = [\partial\mathbf{g}/\partial\mathbf{x}] \;\; (N_g \times n)$$

- Problema de Otimização e Função Lagrangeana:

$$
\begin{aligned}
\min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\
\text{Sujeito a:} \quad & \\
& \omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\
& \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = f(\mathbf{x}) + \lambda\, \omega(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})
$$

- Problema de Otimização e Função Lagrangeana:

$$\begin{array}{rl} \min\limits_{\mathbf{x}} & f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a:} & \\ & \omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{array}$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = f(\mathbf{x}) + \lambda\, \omega(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

- Factibilidade Primal:

$$\begin{array}{l} \omega(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{0} \end{array}$$

- Problema de Otimização e Função Lagrangeana:

$$\begin{array}{rl} \min\limits_{\mathbf{x}} & f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a:} & \\ & \omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{array}$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = f(\mathbf{x}) + \lambda\, \omega(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

Condições de Karush-Kuhn-Tucker (3)

Folga Complementar (1)

- Problema de Otimização e Função Lagrangeana:

$$\begin{array}{rl} \min\limits_{\mathbf{x}} & f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a:} & \\ & \omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{array}$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = f(\mathbf{x}) + \lambda\ \omega(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

- Condições de Folga complementar:

$$\left.\begin{array}{rcl} \pi_i^*\ g_i(\mathbf{x}^*) & = & 0 \\ \pi_i^* & \geq & 0 \end{array}\right\} i = 1, \ldots, N_g$$

Interpretação das condições de Folga Complementar:

$$\pi_i^* \ g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \pi_i^* = 0, \ g_i(\mathbf{x}^*) < 0 & \Rightarrow \text{Restr. } g_i \text{ inativa na solução} \\ \qquad \text{ou} & \\ \pi_i^* > 0, \ g_i(\mathbf{x}^*) = 0 & \Rightarrow \text{Restr. } g_i \text{ ativa na solução} \end{cases}$$

Exemplo Genérico Ilustrativo (1)

- Problema:

$$
\begin{aligned}
\min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) = 0,25x_1^2 + x_2^2 \\
\text{Sujeito a:} \quad & \\
& \omega(\mathbf{x}) = 5 - x_1 - x_2 = 0 \\
& \mathbf{g}(\mathbf{x}) = x_1 + 0,2x_2 - 3 \leq 0
\end{aligned}
$$

Exemplo Genérico Ilustrativo (1)

- Problema:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) = 0,25x_1^2 + x_2^2 \\ \text{Sujeito a:} \quad & \\ & \omega(\mathbf{x}) = 5 - x_1 - x_2 = 0 \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) = x_1 + 0,2x_2 - 3 \leq 0 \end{aligned}$$

- Função Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = 0,25x_1^2 + x_2^2 + \lambda \times (5 - x_1 - x_2) + \pi \times (x_1 + 0,2x_2 - 3)$$

Exemplo Genérico Ilustrativo (2)

- Função Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = 0,25x_1^2 + x_2^2 + \lambda\ (5 - x_1 - x_2) + \pi\ (x_1 + 0,2x_2 - 3)$$

Exemplo Genérico Ilustrativo (2)

- Função Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = 0,25x_1^2 + x_2^2 + \lambda\ (5 - x_1 - x_2) + \pi\ (x_1 + 0,2x_2 - 3)$$

- Condições de KKT:

Exemplo Genérico Ilustrativo (2)

- Função Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = 0,25x_1^2 + x_2^2 + \lambda\ (5 - x_1 - x_2) + \pi\ (x_1 + 0,2x_2 - 3)$$

- Condições de KKT:
  - Factibilidade dual ($\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}|_* = \mathbf{0}$):

$$\begin{aligned} 0,5x_1 - \lambda + \pi &= 0 \\ 2x_2 - \lambda + 0,2\pi &= 0 \end{aligned}$$

Exemplo Genérico Ilustrativo (2)

- Função Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = 0,25x_1^2 + x_2^2 + \lambda\ (5 - x_1 - x_2) + \pi\ (x_1 + 0,2x_2 - 3)$$

- Condições de KKT:
  - Factibilidade dual ($\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{L}|_* = \mathbf{0}$):

$$\begin{aligned} 0,5x_1 - \lambda + \pi &= 0 \\ 2x_2 - \lambda + 0,2\pi &= 0 \end{aligned}$$

  - Factibilidade Primal:

$$\begin{aligned} 5 - x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + 0,2x_2 - 3 &\leq 0 \end{aligned}$$

Exemplo Genérico Ilustrativo (2)

- Função Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = 0,25x_1^2 + x_2^2 + \lambda\ (5 - x_1 - x_2) + \pi\ (x_1 + 0,2x_2 - 3)$$

- Condições de KKT:
  - Factibilidade dual ($\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{L}|_* = \mathbf{0}$):

$$\begin{aligned} 0,5x_1 - \lambda + \pi &= 0 \\ 2x_2 - \lambda + 0,2\pi &= 0 \end{aligned}$$

  - Factibilidade Primal:

$$\begin{aligned} 5 - x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + 0,2x_2 - 3 &\leq 0 \end{aligned}$$

  - Folga complementar:

$$\begin{aligned} \pi\,(x_1 + 0,2x_2 - 3) &= 0 \\ \pi &\geq 0 \end{aligned}$$

Exemplo Genérico Ilustrativo (3)

Solução:

- Hipótese: A restrição de desigualdade é inativa na solução$\Rightarrow \pi = 0$:

Exemplo Genérico Ilustrativo (3)

Solução:

- Hipótese: A restrição de desigualdade é inativa na solução$\Rightarrow \pi = 0$:
  - Neste caso, resolve-se o sistema formado pelas conds. de otimalidade dadas por *equações*, com $\pi = 0$:

$$\begin{array}{rcl} 0,5x_1 - \lambda & = & 0 \\ 2x_2 - \lambda & = & 0 \\ 5 - x_1 - x_2 & = & 0 \end{array} ,$$

o que resulta em

$$x_1 = 4; \quad x_2 = 1; \quad \lambda = 2$$

Exemplo Genérico Ilustrativo (3)

Solução:

- Hipótese: A restrição de desigualdade é inativa na solução$\Rightarrow$ $\pi = 0$:
  - Neste caso, resolve-se o sistema formado pelas conds. de otimalidade dadas por *equações*, com $\pi = 0$:

$$\begin{array}{rcl} 0,5x_1 - \lambda & = & 0 \\ 2x_2 - \lambda & = & 0 \\ 5 - x_1 - x_2 & = & 0 \end{array},$$

    o que resulta em

$$x_1 = 4; \quad x_2 = 1; \quad \lambda = 2$$

  - Esta candidata a solução é inviável, pois

$$x_1 + 0,2x_2 - 3 \quad \nleq \quad 0$$

Exemplo Genérico Ilustrativo (4)

- Conclui-se portanto que a hipótese anterior é incorreta. Logo, a restrição de desigualdade deve estar ativa na solução$\Rightarrow \pi > 0$;

Exemplo Genérico Ilustrativo (4)

- Conclui-se portanto que a hipótese anterior é incorreta. Logo, a restrição de desigualdade deve estar ativa na solução$\Rightarrow \pi > 0$;
- Como $\pi > 0 \Rightarrow g_i(\mathbf{x}^*) = 0$, devemos resolver agora o sistema formado por 4 equações e 4 incóginitas:

$$\begin{array}{rcl} 0,5x_1 - \lambda + \pi & = & 0 \\ 2x_2 - \lambda + 0,2\pi & = & 0 \\ 5 - x_1 - x_2 & = & 0 \\ x_1 + 0,2x_2 - 3 & = & 0 \end{array},$$

o que fornece

$$x_1^* = 2,5; \quad x_2^* = 2,5; \quad \lambda^* = 5,9375 \quad \pi^* = 4,6875$$

Exemplo Genérico Ilustrativo (4)

- Conclui-se portanto que a hipótese anterior é incorreta. Logo, a restrição de desigualdade deve estar ativa na solução$\Rightarrow \pi > 0$;
- Como $\pi > 0 \Rightarrow g_i(\mathbf{x}^*) = 0$, devemos resolver agora o sistema formado por 4 equações e 4 incóginitas:

$$\begin{array}{rcl} 0,5x_1 - \lambda + \pi & = & 0 \\ 2x_2 - \lambda + 0,2\pi & = & 0 \\ 5 - x_1 - x_2 & = & 0 \\ x_1 + 0,2x_2 - 3 & = & 0 \end{array},$$

o que fornece

$$x_1^* = 2,5; \quad x_2^* = 2,5; \quad \lambda^* = 5,9375 \quad \pi^* = 4,6875$$

- Como $\pi > 0$, esta solução é viável e portanto é a solução ótima.

- Os limites inferior e superior de geração são expressos como:

$$\underline{P}_i \leq P_i \leq \overline{P}_i, i = 1, ..., N$$

- Os limites inferior e superior de geração são expressos como:

$$\underline{P}_i \leq P_i \leq \overline{P}_i, i = 1, ..., N$$

- É fácil se concluir que cada uma destas restrições pode ser decomposta em duas restrições do tipo "menor ou igual":

$$\begin{aligned} P_i - \bar{P}_i &\leq 0 \\ -P_i + \underline{P}_i &\leq 0 \end{aligned}$$

- Consideraremos o problema composto por *duas* unidades geradoras:

$$
\begin{array}{ll}
\min & F_T(P_1, P_2) = F_1(P_1) + F_2(P_2) \\
\text{s.a.} & \\
& \begin{array}{rcl}
P_L - P_1 - P_2 & = & 0 \\
P_1 - \bar{P}_1 & \leq & 0 \\
-P_1 + \underline{P}_1 & \leq & 0 \\
P_2 - \bar{P}_2 & \leq & 0 \\
-P_2 + \underline{P}_2 & \leq & 0
\end{array}
\end{array}
$$

Aplicação ao Problema de Despacho Econômico

- Consideraremos o problema composto por *duas* unidades geradoras:

$$
\begin{array}{ll}
\min & F_T(P_1, P_2) = F_1(P_1) + F_2(P_2) \\
\text{s.a.} & \\
& \begin{array}{rcl}
P_L - P_1 - P_2 & = & 0 \\
P_1 - \bar{P}_1 & \leq & 0 \\
-P_1 + \underline{P}_1 & \leq & 0 \\
P_2 - \bar{P}_2 & \leq & 0 \\
-P_2 + \underline{P}_2 & \leq & 0
\end{array}
\end{array}
$$

- A função Lagrangeana correspondente é dada por:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{L}(P_1, P_2, \lambda, \bar{\pi}_1, \underline{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \underline{\pi}_2) & = & F_1(P_1) + F_2(P_2) + \\
& & \lambda(P_L - P_1 - P_2) + \\
& & \bar{\pi}_1(P_1 - \bar{P}_1) + \underline{\pi}_1(-P_1 + \underline{P}_1) + \\
& & \bar{\pi}_2(P_2 - \bar{P}_2) + \underline{\pi}_2(-P_2 + \underline{P}_2)
\end{array}
$$

Condições de KKT

a) Condições de factibilidade dual:

$$\begin{array}{rcl} F_1'(P_1) - \lambda + \bar{\pi}_1 - \underline{\pi}_1 & = & 0 \\ F_2'(P_2) - \lambda + \bar{\pi}_2 - \underline{\pi}_2 & = & 0 \end{array}$$

b) Condições de factibilidade primal:

$$\begin{array}{rcl} P_L - P_1 - P_2 & = & 0 \\ P_1 - \bar{P}_1 & \leq & 0 \\ -P_1 + \underline{P}_1 & \leq & 0 \\ P_2 - \bar{P}_2 & \leq & 0 \\ -P_2 + \underline{P}_2 & \leq & 0 \end{array}$$

c) Condições de folga complementar:

$$\begin{array}{lll} \bar{\pi}_1(P_1 - \bar{P}_1) = 0, & \underline{\pi}_1(-P_1 + \underline{P}_1) = 0, & \bar{\pi}_1 \geq 0, \underline{\pi}_1 \geq 0 \\ \bar{\pi}_2(P_2 - \bar{P}_2) = 0, & \underline{\pi}_2(-P_2 + \underline{P}_2) = 0, & \bar{\pi}_2 \geq 0, \underline{\pi}_2 \geq 0 \end{array}$$

Caso 1: Nenhum limite de geração é atingido

- Não há restrição de desigualdade ativa $\Rightarrow \bar{\pi}_i = 0$ e $\underline{\pi}_i = 0$, $i = 1, 2$;

Caso 1: Nenhum limite de geração é atingido

- Não há restrição de desigualdade ativa $\Rightarrow \bar{\pi}_i = 0$ e $\underline{\pi}_i = 0$, $i = 1, 2$;
- As conds. de Factibilidade dual então fornecem:

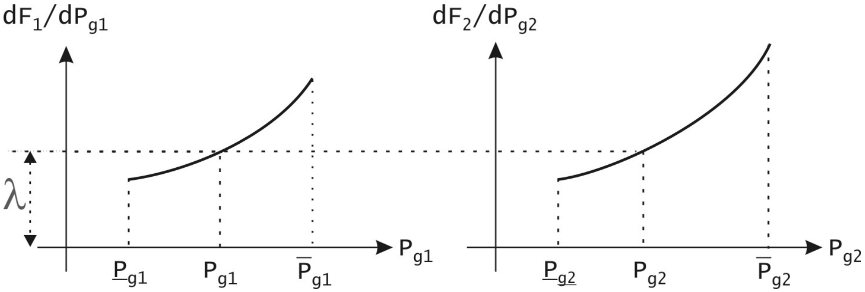
$$F'(P_1) = F_2'(P_2) = \lambda$$

Caso 1: Nenhum limite de geração é atingido

- Não há restrição de desigualdade ativa $\Rightarrow \bar{\pi}_i = 0$ e $\underline{\pi}_i = 0$, $i = 1, 2$;
- As conds. de Factibilidade dual então fornecem:

$$F'(P_1) = F_2'(P_2) = \lambda$$

- Logo, os custos incrementais das unidades devem ser iguais entre si:



Unidade 1 está no limite superior

- Nesta situação, as conds. de folga complem. preconizam que $\bar{\pi}_1 > 0$ (demais $\pi' s = 0$);

Unidade 1 está no limite superior

- Nesta situação, as conds. de folga complem. preconizam que $\bar{\pi}_1 > 0$ (demais $\pi' s = 0$);
- As conds. de Factibilidade dual então fornecem::

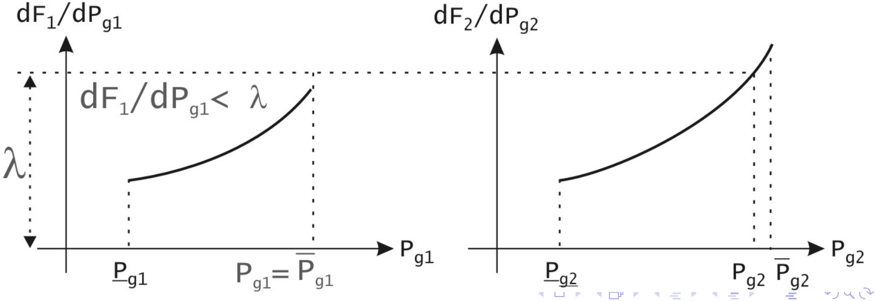
$$\begin{array}{rcccrcll} F_1'(P_1^*) - \lambda^* + \bar{\pi}_1^* & = & 0 & \Longrightarrow & F_1'(P_1) & = & \lambda^* - \bar{\pi}_1 & < \lambda \\ F_2'(P_2^*) - \lambda^* & = & 0 & \Longrightarrow & F_2'(P_2) & = & \lambda^* & \end{array}$$

Unidade 1 está no limite superior

- Nesta situação, as conds. de folga complem. preconizam que $\bar{\pi}_1 > 0$ (demais $\pi' s = 0$);
- As conds. de Factibilidade dual então fornecem::

$$\begin{array}{rcccrcll} F_1'(P_1^*) - \lambda^* + \bar{\pi}_1^* & = & 0 & \Longrightarrow & F_1'(P_1) & = & \lambda^* - \bar{\pi}_1 & < \lambda \\ F_2'(P_2^*) - \lambda^* & = & 0 & \Longrightarrow & F_2'(P_2) & = & \lambda^* & \end{array}$$

- Logo, o custo incremental do gerador 1 será $< \lambda$, enquanto que o do gerador livre será igual a λ :



Unidade 1 está em seu limite inferior

- Neste caso, $\underline{\pi}_1 > 0$, e os demais π_i's são todos nulos. Portanto, teremos:

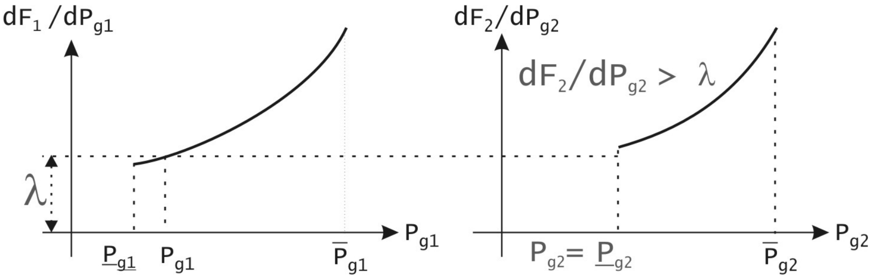
$$\begin{array}{rcccrcl} F_1'(P_1^*) - \lambda^* - \underline{\pi}_1 & = & 0 & \Longrightarrow & F_1'(P_1^*) & = & \lambda + \underline{\pi}_1 > \lambda \\ F_2'(P_2^*) - \lambda^* & = & 0 & \Longrightarrow & F_2'(P_2^*) & = & \lambda \end{array}$$

Unidade 1 está em seu limite inferior

- Neste caso, $\underline{\pi}_1 > 0$, e os demais π_i's são todos nulos. Portanto, teremos:

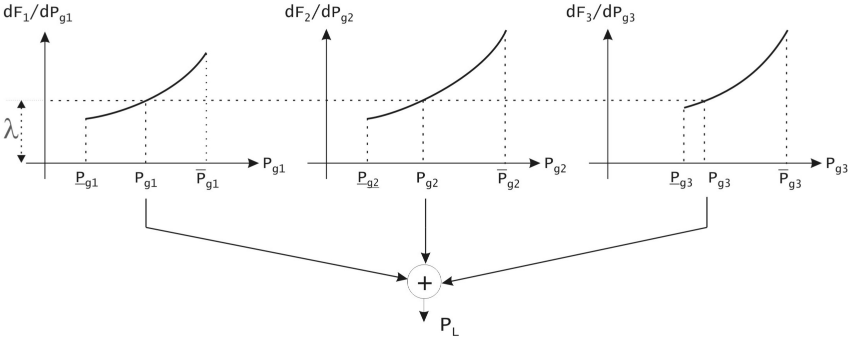
$$
\begin{array}{rclcrcl}
F_1'(P_1^*) - \lambda^* - \underline{\pi}_1 & = & 0 & \Longrightarrow & F_1'(P_1^*) & = & \lambda + \underline{\pi}_1 > \lambda \\
F_2'(P_2^*) - \lambda^* & = & 0 & \Longrightarrow & F_2'(P_2^*) & = & \lambda
\end{array}
$$

- Conclui-se que, quando um gerador atinge seu limite inferior, seu custo incremental será maior que λ :



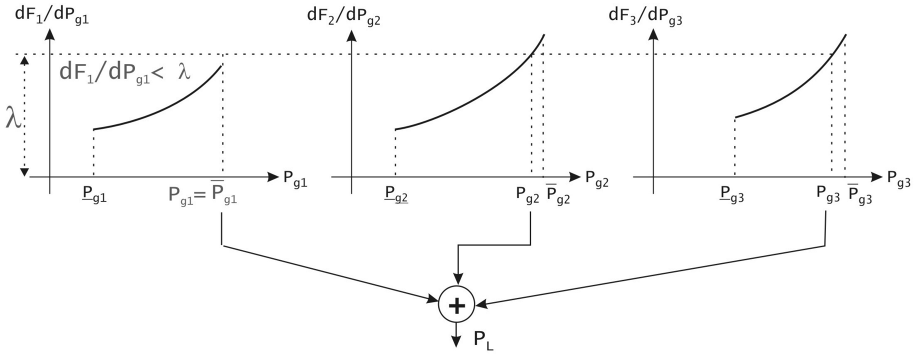
Generalização para Várias Unidades (1)

Todas as unidades livres



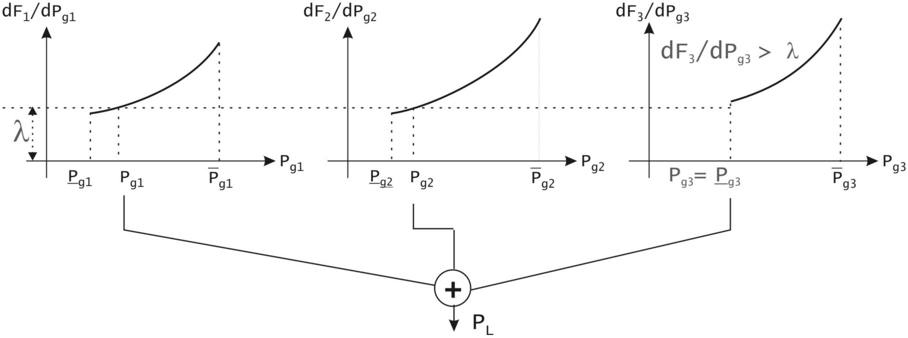
Generalização para Várias Unidades (2)

Unidade 1 atinge limite superior



Generalização para Várias Unidades (3)

Unidade 3 atinge limite inferior



Exemplo A (1)

- Dados das unidades geradoras:

Unidade 1:	$\underline{P}_1 = 150\ MW$	$\overline{P}_1 = 600\ MW$
(carvão)	$H_1(P_1) = 510 + 7,2\,P_1 + 0,00142\,P_1^2$	
Unidade 2:	$\underline{P}_2 = 100\ MW$	$\overline{P}_2 = 400\ MW$
(óleo)	$H_2(P_2) = 310 + 7,85\,P_2 + 0,00194\,P_2^2$	
Unidade 3:	$\underline{P}_3 = 50\ MW$	$\overline{P}_3 = 200\ MW$
(óleo)	$H_3(P_3) = 78 + 7,97\,P_3 + 0,00482\,P_3^2$	

Exemplo A (1)

- Dados das unidades geradoras:

Unidade 1:	$\underline{P}_1 = 150\ MW$	$\overline{P}_1 = 600\ MW$
(carvão)	$H_1(P_1) = 510 + 7,2\,P_1 + 0,00142\,P_1^2$	
Unidade 2:	$\underline{P}_2 = 100\ MW$	$\overline{P}_2 = 400\ MW$
(óleo)	$H_2(P_2) = 310 + 7,85\,P_2 + 0,00194\,P_2^2$	
Unidade 3:	$\underline{P}_3 = 50\ MW$	$\overline{P}_3 = 200\ MW$
(óleo)	$H_3(P_3) = 78 + 7,97\,P_3 + 0,00482\,P_3^2$	

- Custo dos combustíveis: $f_{carvão} = 1,10\ \$/\,MBtu$ e $f_{óleo} = 1,00\ \$/\,MBtu$;

Exemplo A (1)

- Dados das unidades geradoras:

Unidade 1:	$\underline{P}_1 = 150\ MW$	$\overline{P}_1 = 600\ MW$
(carvão)	$H_1(P_1) = 510 + 7,2\,P_1 + 0,00142\,P_1^2$	
Unidade 2:	$\underline{P}_2 = 100\ MW$	$\overline{P}_2 = 400\ MW$
(óleo)	$H_2(P_2) = 310 + 7,85\,P_2 + 0,00194\,P_2^2$	
Unidade 3:	$\underline{P}_3 = 50\ MW$	$\overline{P}_3 = 200\ MW$
(óleo)	$H_3(P_3) = 78 + 7,97\,P_3 + 0,00482\,P_3^2$	

- Custo dos combustíveis: $f_{carvão} = 1,10\ \$/\,MBtu$ e $f_{óleo} = 1,00\ \$/\,MBtu$;
- Carga:

$$P_L = 850\ MW$$

Exemplo A (2)

- Funções-custo:

Unidade 1:	$\underline{P}_1 = 150\ MW$	$\overline{P}_1 = 600\ MW$
(carvão)	$F_1(P_1) = 561 + 7,92\, P_1 + 0,001562\, P_1^2$	
Unidade 2:	$\underline{P}_2 = 100\ MW$	$\overline{P}_2 = 400\ MW$
(óleo)	$F_2(P_2) = 310 + 7,85\, P_2 + 0,00194\, P_2^2$	
Unidade 3:	$\underline{P}_3 = 50\ MW$	$\overline{P}_3 = 200\ MW$
(óleo)	$F_3(P_3) = 78 + 7,97\, P_3 + 0,00482\ P_3^2$	

Exemplo B:

- Supor agora que $f_{carvão} = 0,90\ \$/\,MBtu$;

Exemplo B:

- Supor agora que $f_{carvão} = 0,90\ \$/\,MBtu$;

- Neste caso, as funções-custo tornam-se:

Unidade 1:	$\underline{P}_1 = 150\ MW$	$\overline{P}_1 = 600\ MW$
(carvão)	$F1(P1) = 459 + 6,48P1 + 0,00128P_1^2$	
Unidade 2:	$\underline{P}_2 = 100\ MW$	$\overline{P}_2 = 400\ MW$
(óleo)	$F_2(P_2) = 310 + 7,85\,P_2 + 0,00194\,P_2^2$	
Unidade 3:	$\underline{P}_3 = 50\ MW$	$\overline{P}_3 = 200\ MW$
(óleo)	$F_3(P_3) = 78 + 7,97\,P_3 + 0,00482\ P_3^2$	

Exemplo B:

- Supor agora que $f_{carvão} = 0,90\ \$/MBtu$;
- Neste caso, as funções-custo tornam-se:

Unidade 1:	$\underline{P}_1 = 150\ MW$	$\overline{P}_1 = 600\ MW$
(carvão)	$F1(P1) = 459 + 6,48P1 + 0,00128P_1^2$	
Unidade 2:	$\underline{P}_2 = 100\ MW$	$\overline{P}_2 = 400\ MW$
(óleo)	$F_2(P_2) = 310 + 7,85\ P_2 + 0,00194\ P_2^2$	
Unidade 3:	$\underline{P}_3 = 50\ MW$	$\overline{P}_3 = 200\ MW$
(óleo)	$F_3(P_3) = 78 + 7,97\ P_3 + 0,00482\ P_3^2$	

- Resolver o problema de DE para o mesmo carregamento de 850 MW.

Despacho Econômico x Alocação de Unidades

- Em estudos de programação da operação, o problema de DE é precedido pela solução de outro problema, denominado Alocação de Unidades (*"Unit Commitment"*);

Despacho Econômico x Alocação de Unidades

- Em estudos de programação da operação, o problema de DE é precedido pela solução de outro problema, denominado Alocação de Unidades (*"Unit Commitment"*);
- O problema de Alocação de Unidades contempla horizontes de operação mais amplo (um dia, vários dias, uma semana), e busca determinar quantas e quais unidades devem estar em operação para cada condição de carregamento;

Despacho Econômico x Alocação de Unidades

- Em estudos de programação da operação, o problema de DE é precedido pela solução de outro problema, denominado Alocação de Unidades (*"Unit Commitment"*);
- O problema de Alocação de Unidades contempla horizontes de operação mais amplo (um dia, vários dias, uma semana), e busca determinar quantas e quais unidades devem estar em operação para cada condição de carregamento;
- O DE parte da solução do problema de Alocação de Unidades para determinar os despachos ótimos das unidades para cada patamar de carga do horizonte de estudo;

- Em estudos de programação da operação, o problema de DE é precedido pela solução de outro problema, denominado Alocação de Unidades (*"Unit Commitment"*);
- O problema de Alocação de Unidades contempla horizontes de operação mais amplo (um dia, vários dias, uma semana), e busca determinar quantas e quais unidades devem estar em operação para cada condição de carregamento;
- O DE parte da solução do problema de Alocação de Unidades para determinar os despachos ótimos das unidades para cada patamar de carga do horizonte de estudo;
- Portanto, na solução do DE não existe a opção de se alterar as decisões tomadas na alocação de unidades, tais como:

Despacho Econômico x Alocação de Unidades

- Em estudos de programação da operação, o problema de DE é precedido pela solução de outro problema, denominado Alocação de Unidades (*"Unit Commitment"*);
- O problema de Alocação de Unidades contempla horizontes de operação mais amplo (um dia, vários dias, uma semana), e busca determinar quantas e quais unidades devem estar em operação para cada condição de carregamento;
- O DE parte da solução do problema de Alocação de Unidades para determinar os despachos ótimos das unidades para cada patamar de carga do horizonte de estudo;
- Portanto, na solução do DE não existe a opção de se alterar as decisões tomadas na alocação de unidades, tais como:
  - retirar de operação uma unidade, ou

Despacho Econômico x Alocação de Unidades

- Em estudos de programação da operação, o problema de DE é precedido pela solução de outro problema, denominado Alocação de Unidades (*"Unit Commitment"*);
- O problema de Alocação de Unidades contempla horizontes de operação mais amplo (um dia, vários dias, uma semana), e busca determinar quantas e quais unidades devem estar em operação para cada condição de carregamento;
- O DE parte da solução do problema de Alocação de Unidades para determinar os despachos ótimos das unidades para cada patamar de carga do horizonte de estudo;
- Portanto, na solução do DE não existe a opção de se alterar as decisões tomadas na alocação de unidades, tais como:
  - retirar de operação uma unidade, ou
  - colocar em operação uma nova unidade.

Interpretação do Multiplicador de Lagrange λ (1)

- Problema de despacho de N unidades geradoras desconsiderandoos limites de geração:

$$\begin{aligned} \min \quad & F_t(P) = \sum_{i=1}^{N} F_i(P_i) \\ \text{s.a.} \quad & \\ & e^T P - P_L = 0 \end{aligned}$$

onde: $e^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ e $P^T = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_N \end{bmatrix}$;

Interpretação do Multiplicador de Lagrange λ (1)

- Problema de despacho de N unidades geradoras desconsiderandoos limites de geração:

$$\begin{aligned} \min \quad & F_t(P) = \sum_{i=1}^{N} F_i(P_i) \\ \text{s.a.} \quad & \\ & e^T P - P_L = 0 \end{aligned}$$

onde: $e^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ e $P^T = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_N \end{bmatrix}$;

- Função Lagrangeana correspondente:

$$\mathcal{L} = F_T(P) + \lambda(P_L - e^T P)$$

Interpretação do Multiplicador de Lagrange λ (2)

- Condições de otimalidade

Interpretação do Multiplicador de Lagrange λ (2)

- Condições de otimalidade
  - Factibilidade dual:

$$\nabla_{\mathbf{P}} \mathcal{L} \;=\; 0 \;\Longrightarrow\; \nabla F_T(P^*) \;=\; \lambda^* e$$

Interpretação do Multiplicador de Lagrange λ (2)

- Condições de otimalidade
  - Factibilidade dual:

$$\nabla_{\mathbf{P}}\mathcal{L} = 0 \implies \nabla F_T(P^*) = \lambda^* e$$

  - Factibilidade primal:

$$e^T P^* = P_L$$

Interpretação do Multiplicador de Lagrange λ (2)

- Condições de otimalidade
  - Factibilidade dual:

$$\nabla_{\mathbf{P}}\mathcal{L} = 0 \implies \nabla F_T(P^*) = \lambda^* e$$

  - Factibilidade primal:

$$e^T P^* = P_L$$

- Supor variação de carga, de P_L para $P_L + \Delta P_L$. Em conseqüência:

Interpretação do Multiplicador de Lagrange λ (2)

- Condições de otimalidade
  - Factibilidade dual:

$$\nabla_{\mathbf{P}}\mathcal{L} \quad = \quad 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla F_T(P^*) \quad = \quad \lambda^* e$$

  - Factibilidade primal:

$$e^T P^* = P_L$$

- Supor variação de carga, de P_L para $P_L + \Delta P_L$. Em conseqüência:
  - despacho variará desde o valor ótimo P^* para $P^* + \Delta P$ para garantir o balanço de potência:

$$e^T(P^* + \Delta P) = P_L + \Delta P_L$$

Interpretação do Multiplicador de Lagrange λ (2)

- Condições de otimalidade
  - Factibilidade dual:

$$\nabla_{\mathbf{P}} \mathcal{L} = 0 \implies \nabla F_T(P^*) = \lambda^* e$$

  - Factibilidade primal:

$$e^T P^* = P_L$$

- Supor variação de carga, de P_L para $P_L + \Delta P_L$. Em conseqüência:
  - despacho variará desde o valor ótimo P^* para $P^* + \Delta P$ para garantir o balanço de potência:

$$e^T (P^* + \Delta P) = P_L + \Delta P_L$$

  - Logo:

$$e^T \Delta P = \Delta P_L$$

Interpretação do Multiplicador de Lagrange λ (3)

- Ainda em consequência da variação de carga de P_L para $P_L + \Delta P_L$, o custo total variará de

$$\Delta F_T = F_T(P^* + \Delta P) - F_T(P^*)$$

Interpretação do Multiplicador de Lagrange λ (3)

- Ainda em consequência da variação de carga de P_L para $P_L + \Delta P_L$, o custo total variará de

$$\Delta F_T = F_T(P^* + \Delta P) - F_T(P^*)$$

- Ou, pela expansão em série de Taylor até o termo de 1a. ordem:

$$\Delta F_T \approx \nabla^T F_T(P^*)\ \Delta P$$

Interpretação do Multiplicador de Lagrange λ (3)

- Ainda em consequência da variação de carga de P_L para $P_L + \Delta P_L$, o custo total variará de

$$\Delta F_T = F_T(P^* + \Delta P) - F_T(P^*)$$

- Ou, pela expansão em série de Taylor até o termo de 1a. ordem:

$$\Delta F_T \approx \nabla^T F_T(P^*)\ \Delta P$$

- Como $\nabla F_T(P^*) = \lambda^* e$ e $e^T \Delta P = \Delta P_L$, conclui-se que

$$\Delta F_T \approx \lambda^* \Delta P_L$$

ou

$$\boxed{\lambda^* \approx \frac{\Delta F_T}{\Delta P_L}}$$

Interpretação do Multiplicador de Lagrange λ (4)

$$\boxed{\lambda^* \approx \frac{\Delta F_T}{\Delta P_L}}$$

- *Conclusão:* λ^* é o incremento de custo em relação ao despacho ótimo para se gerar o próximo MW de potência;

Interpretação do Multiplicador de Lagrange λ (4)

$$\boxed{\lambda^* \approx \frac{\Delta F_T}{\Delta P_L}}$$

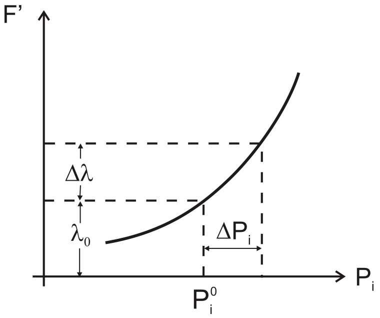
- *Conclusão:* λ^* é o incremento de custo em relação ao despacho ótimo para se gerar o próximo MW de potência;
- Portanto, λ^* é o custo marginal de operação do sistema.

Fatores de Participação (1)

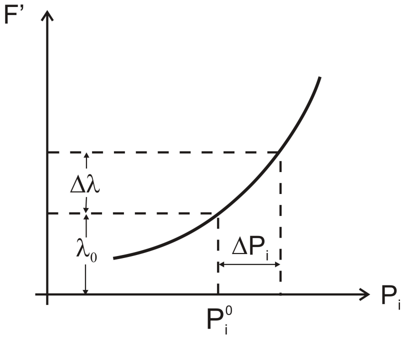
- Permitem extrapolar os resultados da solução mais recente do Despacho Econômico;

Fatores de Participação (1)

- Permitem extrapolar os resultados da solução mais recente do Despacho Econômico;
- Calculados a partir da curva de *custo incremental* de cada unidade:

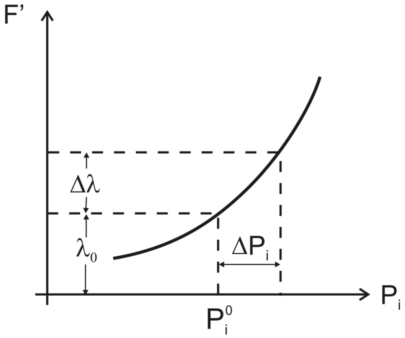


Fatores de Participação (1)



- Supondo que a variação ΔP_i é pequena, temos:

$$\Delta\lambda = F_i''(P_i^0)\ \Delta P_i \Rightarrow \Delta P_i = \Delta\lambda / F_i''(P_i^0) \qquad (\bigstar)$$



- Supondo que a variação ΔP_i é pequena, temos:

$$\Delta\lambda = F_i''(P_i^0)\ \Delta P_i \Rightarrow \Delta P_i = \Delta\lambda / F_i''(P_i^0) \qquad (\bigstar)$$

- Desprezando as perdas de transmissão:

$$\Delta P_L = \sum_{j=1}^{N} \Delta P_j = \Delta\lambda\ \sum_{j=1}^{N} \left(1/F_j''(P_j^0)\right)$$

Frame Title

- Partindo da expressão

$$\Delta P_L = \Delta\lambda \sum_{j=1}^{N} \left(1/F_j''(P_j^0)\right)$$

Frame Title

- Partindo da expressão

$$\Delta P_L = \Delta\lambda \sum_{j=1}^{N} \left(1/F_j''(P_j^0)\right)$$

- e usando a expressão ($\bigstar$), temos:

$$\Delta P_L = \left[F_i''(P_i^0) \times \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{F_j''(P_j^0)} \right) \right] \times \Delta P_i$$

Frame Title

- Partindo da expressão

$$\Delta P_L = \Delta\lambda \sum_{j=1}^{N} \left(1/F_j''(P_j^0)\right)$$

- e usando a expressão ($\bigstar$), temos:

$$\Delta P_L = \left[F_i''(P_i^0) \times \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{F_j''(P_j^0)} \right) \right] \times \Delta P_i$$

- Define-se então o fator de participação para a unidade i como:

$$\boxed{f_{part,i} \triangleq \left(\frac{\Delta P_i}{\Delta P_L}\right) = \frac{\left(1 \ / \ F_i''(P_i^0)\right)}{\sum_{j=1}^{N} \left(1 \ / \ F_j''(P_j^0)\right)}}$$

Fatores de Participação - Exemplo

Reconsidere o despacho econômico determinado no Exemplo **A** para a carga de 850 MW. As características das unidades são:

Unidade 1:	$\underline{P}_1 = 150\ MW$	$\overline{P}_1 = 600\ MW$
(carvão)	$F_1(P_1) = 561 + 7,92\,P_1 + 0,001562\,P_1^2$	
Unidade 2:	$\underline{P}_2 = 100\ MW$	$\overline{P}_2 = 400\ MW$
(óleo)	$F_2(P_2) = 310 + 7,85\,P_2 + 0,00194\,P_2^2$	
Unidade 3:	$\underline{P}_3 = 50\ MW$	$\overline{P}_3 = 200\ MW$
(óleo)	$F_3(P_3) = 78 + 7,97\,P_3 + 0,00482\ P_3^2$	

- Suponha agora que a carga do sistema evolui para $P_L = 900\ MW$. Use os fatores de participação para atualizar o despacho ótimo das três unidades.

Solução

- Cálculo dos fatores de participação:

$$f_{part_1} = \frac{(1/0{,}003124)}{(1/0{,}003124)+(1/0{,}00388)+(1/0{,}00964)} = 0,47$$
$$f_{part_2} = \frac{(1/0{,}00388)}{(1/0{,}003124)+(1/0{,}00388)+(1/0{,}00964)} = 0,38$$
$$f_{part_3} = \frac{(1/0{,}00964)}{(1/0{,}003124)+(1/0{,}00388)+(1/0{,}00964)} = 0,15$$

Solução

- Cálculo dos fatores de participação:

$$f_{part_1} = \frac{(1/0{,}003124)}{(1/0{,}003124)+(1/0{,}00388)+(1/0{,}00964)} = 0,47$$
$$f_{part_2} = \frac{(1/0{,}00388)}{(1/0{,}003124)+(1/0{,}00388)+(1/0{,}00964)} = 0,38$$
$$f_{part_3} = \frac{(1/0{,}00964)}{(1/0{,}003124)+(1/0{,}00388)+(1/0{,}00964)} = 0,15$$

- As novas potências geradas serão dadas por:

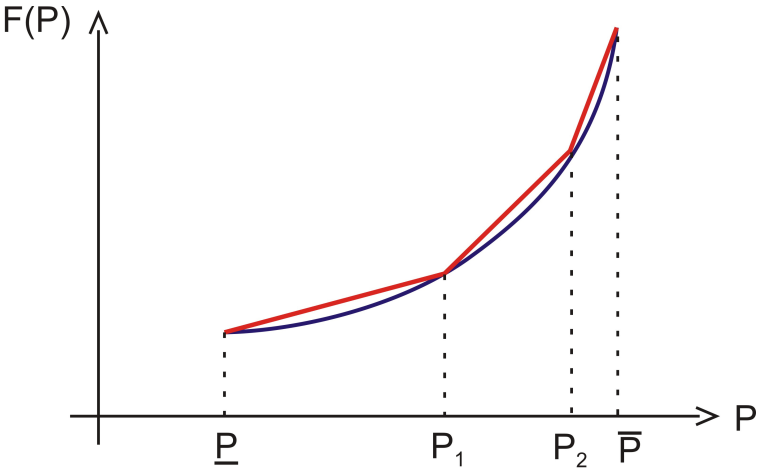
$$P_i = P_i^0 + f_{part_i} \times \Delta P_L$$

onde $P_1^0 = 393,2\ MW$; $P_2^0 = 334,6\ MW$ e $P_3^0 = 122,2\ MW$. Logo:

$$P_1 = 393,2 + 0,47 \times 50 = 416,7\ MW$$
$$P_2 = 334,6 + 0,38 \times 50 = 353,6\ MW$$
$$P_3 = 122,2 + 0,15 \times 50 = 129,7\ MW$$

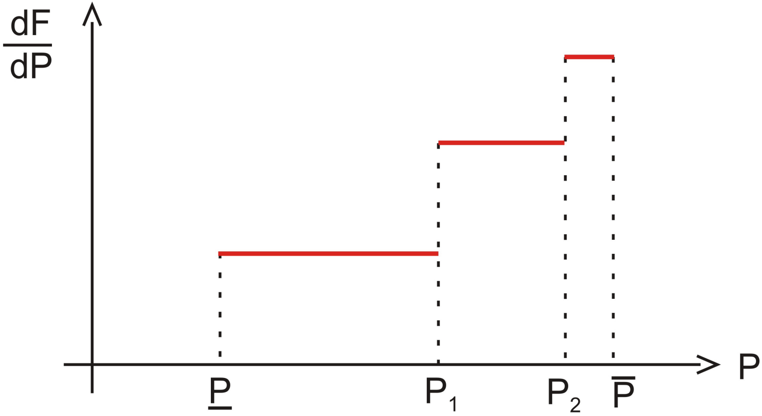
DE com funções-custo lineares por partes (1)

Em algumas situações, as funções-custo são aproximadas por funções *lineares por partes*:



DE com funções-custo lineares por partes (2)

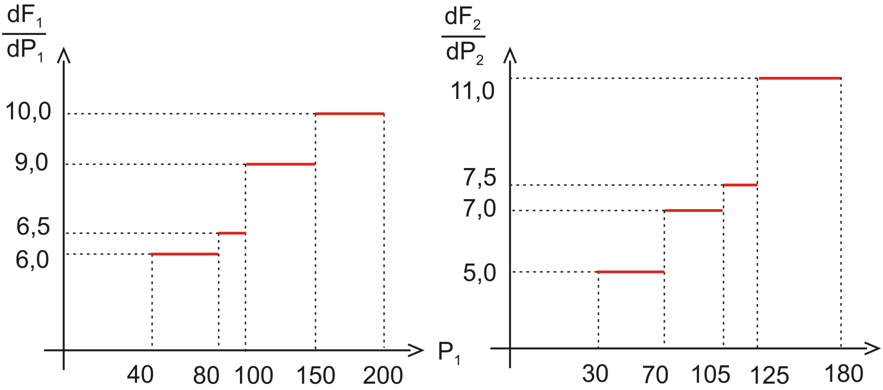
Consequentemente, as funções de custo incremental correspondentes tornam-se *constantes por partes*:



- Nestes casos, o cálculo do despacho econômico é facilitado, pois pode-se usar a técnica do *"empilhamento"*.

DE com funções-custo lineares por partes (3)

- Nestes casos, o cálculo do despacho econômico é facilitado, pois pode-se usar a técnica do *"empilhamento"*.
- Exemplo para duas unidades:



DE com funções-custo lineares por partes (3)

Solução do exemplo para carregamentos entre 70 e 380 MW :

λ ($\$/MWh$)	Geração (MW)	P_1 (MW)	P_2 (MW)
$5,0$	$70 - 110$	40	$30 - 70$
$6,0$	$110 - 150$	$40 - 80$	70
$6,5$	$150 - 170$	$80 - 100$	70
$7,0$	$170 - 205$	100	$70 - 105$
$8,0$	$205 - 225$	100	$105 - 125$
$9,0$	$225 - 275$	$100 - 150$	125
$10,0$	$275 - 325$	$150 - 200$	125
$11,0$	$325 - 380$	200	$125 - 180$

- O método clássico para a solução do DE é o *método da secante;*

Métodos Computacionais para Solução do DE

- O método clássico para a solução do DE é o *método da secante;*
- O método da Secante parte de duas sugestões iniciais para λ, a partir das quais é projetado um novo valor de λ;

Métodos Computacionais para Solução do DE

- O método clássico para a solução do DE é o *método da secante;*
- O método da Secante parte de duas sugestões iniciais para λ, a partir das quais é projetado um novo valor de λ;
- Cada valor de λ gera um despacho distinto, não necessariamente viável;

Métodos Computacionais para Solução do DE

- O método clássico para a solução do DE é o *método da secante;*
- O método da Secante parte de duas sugestões iniciais para λ, a partir das quais é projetado um novo valor de λ;
- Cada valor de λ gera um despacho distinto, não necessariamente viável;
- Os valores projetados de λ são tais que os desvios no atendimento da demanda são progressivamente reduzidos;

- O método clássico para a solução do DE é o *método da secante;*
- O método da Secante parte de duas sugestões iniciais para λ, a partir das quais é projetado um novo valor de λ;
- Cada valor de λ gera um despacho distinto, não necessariamente viável;
- Os valores projetados de λ são tais que os desvios no atendimento da demanda são progressivamente reduzidos;
- O algoritmo não permite que a solução final viole os limites de geração.

Algoritmo do método da Secante

1. Supor um λ inicial, $\lambda^{(1)}$; e fazer $k = 0$;

Algoritmo do método da Secante

1. Supor um λ inicial, $\lambda^{(1)}$; e fazer $k = 0$;
2. $k \leftarrow k + 1$;

Algoritmo do método da Secante

1. Supor um λ inicial, $\lambda^{(1)}$; e fazer $k = 0$;
2. $k \leftarrow k + 1$;
3. Com o valor de $\lambda^{(k)}$, obter $P_i^{(k)}$ das *curvas de custo incremental*, $i = 1, ..., N$. Caso P_i caia fora dos limites, fixá-lo no valor do limite ultrapassado;

Algoritmo do método da Secante

1. Supor um λ inicial, $\lambda^{(1)}$; e fazer $k = 0$;
2. $k \leftarrow k + 1$;
3. Com o valor de $\lambda^{(k)}$, obter $P_i^{(k)}$ das *curvas de custo incremental*, $i = 1, ..., N$. Caso P_i caia fora dos limites, fixá-lo no valor do limite ultrapassado;
4. Somar: $\sum_{i=1}^{N} P_i^{(k)} = P_L^{(k)}$

Algoritmo do método da Secante

1. Supor um λ inicial, $\lambda^{(1)}$; e fazer $k = 0$;
2. $k \leftarrow k + 1$;
3. Com o valor de $\lambda^{(k)}$, obter $P_i^{(k)}$ das *curvas de custo incremental*, $i = 1, ..., N$. Caso P_i caia fora dos limites, fixá-lo no valor do limite ultrapassado;
4. Somar: $\sum\limits_{i=1}^{N} P_i^{(k)} = P_L^{(k)}$
5. Se $k = 1$, sugerir outro valor para λ, $\lambda^{(2)}$, e retornar ao passo 2;

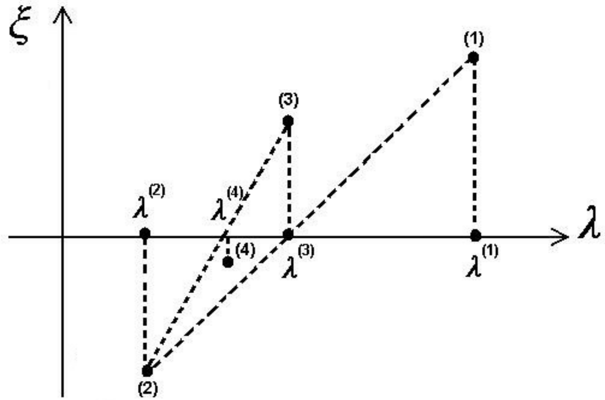
Algoritmo do método da Secante

1. Supor um λ inicial, $\lambda^{(1)}$; e fazer $k = 0$;
2. $k \leftarrow k + 1$;
3. Com o valor de $\lambda^{(k)}$, obter $P_i^{(k)}$ das *curvas de custo incremental*, $i = 1, ..., N$. Caso P_i caia fora dos limites, fixá-lo no valor do limite ultrapassado;
4. Somar: $\sum_{i=1}^{N} P_i^{(k)} = P_L^{(k)}$
5. Se $k = 1$, sugerir outro valor para λ, $\lambda^{(2)}$, e retornar ao passo 2;
6. Seja $\xi = P_L^{(k)} - P_L$. Se $\mid \xi \mid > \delta$, com δ fixado em um valor pequeno, projetar λ usando o método da secante:

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + (P_L - P_L^{(k)})[\frac{\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}}{P_L^{(k)} - P_L^{(k-1)}}]$$

e retornar ao passo 2. Por outro lado, se $\mid \xi \mid \leq \delta$ a convergência foi atingida, **FIM**.

Ilustração do Método da Secante



Exemplo de aplicação

Considere três unidades geradoras cujas funções custo F_1, F_2 e F_3 são dadas na tabela abaixo. A carga do sistema é $P_L = 100\ MW$ e a tolerância para convergência é $\delta = 1,0\ MW$. Determine o despacho econômico através do método da secante.

$$
\begin{array}{rcll}
F_1 & = & 10 + 0,10P_1 + 0,01P_1^2, & 20 \leq P_1 \leq 60 \quad MW \\
F_2 & = & 15 + 0,15P_2 + 0,015P_2^2, & 10 \leq P_2 \leq 50 \quad MW \\
F_3 & = & 20 + 0,20P_3 + 0,01P_3^2, & 10 \leq P_3 \leq 30 \quad MW
\end{array}
$$