Estimação de Estados em Sistemas de Potência

Antonio Simões Costa

LABSPOT

Estimação de Estados em Sistemas de Potência (I)

- **Objetivo**: A partir de telemedidas redundantes e contaminadas por ruído disponibilizadas pelo sistema *SCADA*, obter a *melhor* estimativa (em um sentido a ser definido) para as variáveis de estado do sistema (*módulo e ângulo das tensões nas barras*).

- **Características do problema**:
  - Número de medidas $>$ número de variáveis a estimar *(redundância)*;
  - Admite-se que as medidas são contaminadas por ruído;
  - *Mínimos Quadrados Ponderados*: método mais utilizado para definir a "melhor estimativa".

- Pode processar diversos tipos de medidas;
- Fornece estimativas para quantidades que não são medidas;
- Pode fornecer resultados mesmo quando algumas medidas são perdidas;
- Fornece meios de se avaliar a confiança nos resultados;
- Redundância $\Longrightarrow$ *capacidade de detecção e identificação de erros grosseiros.*

Modelo de Medição (I)

- **Variáveis:**

  $\mathbf{z}$: Vetor $m \times 1$ de medidas;

  $\mathbf{z}_0$: Vetor $m \times 1$ contendo os valores verdadeiros das quantidades medidas;

  η : Vetor $m \times 1$ dos erros de medição.

  $\mathbf{x}$: Vetor $n \times 1$ dos estados:

  n: Número de estados $(n = 2N_{barras} - 1)$.

- Vetor $\mathbf{z}$ é composto por medidas de:
  - magnitude de tensão $(\mathbf{v})$;
  - fluxo de potência ativa e reativa$(\mathbf{t}$ e $\mathbf{u})$;
  - injeção de pot. ativa e reativa $(\mathbf{p}$ e $\mathbf{q})$.

Modelo de Medição (II)

- **Modelo de medição preliminar**:

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + \boldsymbol{\eta}$$

- **Hipótese**: $\boldsymbol{\eta}$ é Gaussiano, tem média zero e seus elementos são não-correlacionados:

$$E(\boldsymbol{\eta}) = 0; \qquad E(\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{T}}) = \mathbf{R} \ (\ \textit{diagonal})$$

- Qualquer grandeza medida é uma função não-linear do vetor de estados $\mathbf{x}$. Logo:

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

- **Modelo de medição** em termos das variáveis de estado:

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\eta}$$

Método dos Mínimos Quadrados Ponderados

- Deseja-se minimizar a seguinte **função-objetivo:**

$$J(\hat{\mathbf{x}}) = [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})]^T \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})]$$

Método dos Mínimos Quadrados Ponderados

- Deseja-se minimizar a seguinte **função-objetivo:**

$$J(\hat{\mathbf{x}}) = [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})]^T \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})]$$

- **Condição de otimalidade:**

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}^T(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})] = \mathbf{0} \qquad (\bigstar)$$

onde

$$\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}) = \partial \mathbf{h}(\mathbf{x}) / \partial \hat{\mathbf{x}}$$

Método dos Mínimos Quadrados Ponderados

- Deseja-se minimizar a seguinte **função-objetivo:**

$$J(\hat{\mathbf{x}}) = [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})]^T \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})]$$

- **Condição de otimalidade:**

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}^T(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})] = \mathbf{0} \qquad (\bigstar)$$

onde

$$\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}) = \partial \mathbf{h}(\mathbf{x}) / \partial \hat{\mathbf{x}}$$

- Sistema de equações ($\bigstar$) é fortemente não linear e de dificil solução;

Método dos Mínimos Quadrados Ponderados

- Deseja-se minimizar a seguinte **função-objetivo:**

$$J(\hat{\mathbf{x}}) = [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})]^T \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})]$$

- **Condição de otimalidade:**

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}^T(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})] = \mathbf{0} \qquad (\bigstar)$$

onde

$$\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}) = \partial \mathbf{h}(\mathbf{x}) / \partial \hat{\mathbf{x}}$$

- Sistema de equações ($\bigstar$) é fortemente não linear e de dificil solução;
- Alternativa: linearização do sistema ($\bigstar$) e emprego de métodos iterativos.

Modelo de Medição Linearizado

- Linearização de $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ em torno de $\mathbf{x}^k$:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{H}(\mathbf{x}_k)\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k)$$

Modelo de Medição Linearizado

- Linearização de $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ em torno de $\mathbf{x}^k$:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{H}(\mathbf{x}_k)\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k)$$

- Substituindo-se $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ no modelo de medição $\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\eta}$:

$$\underbrace{\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)}_{\mathbf{\Delta z}} \quad = \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}_k) \quad \underbrace{(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k)}_{\mathbf{\Delta x}} \quad + \boldsymbol{\eta}$$

Modelo de Medição Linearizado

- Linearização de $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ em torno de $\mathbf{x}^k$:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{H}(\mathbf{x}_k)\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k)$$

- Substituindo-se $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ no modelo de medição $\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \eta$:

$$\underbrace{\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)}_{\mathbf{\Delta z}} \quad = \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}_k) \quad \underbrace{(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k)}_{\mathbf{\Delta x}} \quad + \eta$$

- Logo, o modelo de medição linearizado é:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{\Delta z} = \mathbf{H}(\mathbf{x}_k)\,\mathbf{\Delta x} + \eta \\ \\ E(\eta) = 0; \qquad E(\eta\eta^{\mathbf{T}}) = \mathbf{R} \end{array}}$$

Mín. Quad. Ponderados Aplicados ao Problema Linearizado (I)

- Modelo de medição linearizado:

$$\mathbf{\Delta z} = \mathbf{H}(\mathbf{x}_k)\,\mathbf{\Delta x} + \eta$$

$$E(\eta) = 0; \qquad E(\eta\eta^{\mathbf{T}}) = \mathbf{R}$$

Mín. Quad. Ponderados Aplicados ao Problema Linearizado (I)

- Modelo de medição linearizado:

$$\mathbf{\Delta z} = \mathbf{H}(\mathbf{x}_k)\,\mathbf{\Delta x} + \eta$$

$$E(\eta) = 0; \qquad E(\eta\eta^{\mathbf{T}}) = \mathbf{R}$$

- Função-Objetivo:

$$J(\hat{\mathbf{x}}) = [\mathbf{\Delta z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}_k)\,\mathbf{\Delta}\hat{\mathbf{x}}]^T\,\mathbf{R}^{-1}\,[\mathbf{\Delta z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}_k)\,\mathbf{\Delta}\hat{\mathbf{x}}]$$

Mín. Quad. Ponderados Aplicados ao Problema Linearizado (I)

- Modelo de medição linearizado:

$$\mathbf{\Delta z} = \mathbf{H}(\mathbf{x}_k)\,\mathbf{\Delta x} + \eta$$

$$E(\eta) = 0; \qquad E(\eta\eta^{\mathbf{T}}) = \mathbf{R}$$

- Função-Objetivo:

$$J(\hat{\mathbf{x}}) = \left[\mathbf{\Delta z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}_k)\,\mathbf{\Delta}\hat{\mathbf{x}}\right]^T \mathbf{R}^{-1} \left[\mathbf{\Delta z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}_k)\,\mathbf{\Delta}\hat{\mathbf{x}}\right]$$

- Condição de Otimalidade:

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta \hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{\Delta z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}^k)\,\mathbf{\Delta}\hat{\mathbf{x}}] = \mathbf{0}$$

Mín. Quad. Ponderados Aplicados ao Problema Linearizado (II)

- Condição de Otimalidade:

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta \hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\mathbf{R}^{-1}[\boldsymbol{\Delta}\mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}^k)\, \boldsymbol{\Delta}\hat{\mathbf{x}}] = \mathbf{0} \qquad (\blacklozenge)$$

Mín. Quad. Ponderados Aplicados ao Problema Linearizado (II)

- Condição de Otimalidade:

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta \hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\mathbf{R}^{-1}[\boldsymbol{\Delta}\mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}^k)\,\boldsymbol{\Delta}\hat{\mathbf{x}}] = \mathbf{0} \qquad (\blacklozenge)$$

- Equação ($\blacklozenge$) pode ser escrita na forma da **Equação Normal de Gauss:**

$$\left[\mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\,\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{H}(\mathbf{x}^k)\right]\,\boldsymbol{\Delta}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k) \times \mathbf{R}^{-1} \times \boldsymbol{\Delta}\mathbf{z}$$

Mín. Quad. Ponderados Aplicados ao Problema Linearizado (II)

- Condição de Otimalidade:

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta \hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\mathbf{R}^{-1}[\boldsymbol{\Delta}\mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}^k)\, \boldsymbol{\Delta}\hat{\mathbf{x}}] = \mathbf{0} \qquad (\blacklozenge)$$

- Equação ($\blacklozenge$) pode ser escrita na forma da **Equação Normal de Gauss:**

$$\left[\mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\,\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{H}(\mathbf{x}^k)\right]\,\boldsymbol{\Delta}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k) \times \mathbf{R}^{-1} \times \boldsymbol{\Delta}\mathbf{z}$$

- A solução final para os estados estimados é obtida via procedimento iterativo:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_k + \boldsymbol{\Delta}\hat{\mathbf{x}}$$

Equação Normal de Gauss

$$\left[\mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\,\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{H}(\mathbf{x}^k)\right]\,\boldsymbol{\Delta}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\;\mathbf{R}^{-1}\;\boldsymbol{\Delta}\mathbf{z}$$

- **Matriz Ganho:**

Equação Normal de Gauss

$$\left[\mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\,\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{H}(\mathbf{x}^k)\right]\,\boldsymbol{\Delta}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\;\mathbf{R}^{-1}\;\boldsymbol{\Delta}\mathbf{z}$$

- **Matriz Ganho:**
  - Definida como:

$$\mathbf{G} = \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\,\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{H}(\mathbf{x}^k)$$

Equação Normal de Gauss

$$\left[\mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\,\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{H}(\mathbf{x}^k)\right]\,\boldsymbol{\Delta}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\;\mathbf{R}^{-1}\;\boldsymbol{\Delta}\mathbf{z}$$

- **Matriz Ganho:**
  - Definida como:

$$\mathbf{G} = \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\,\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{H}(\mathbf{x}^k)$$

  - Propriedades:

$$\left[\mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\,\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{H}(\mathbf{x}^k)\right]\ \boldsymbol{\Delta}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\ \mathbf{R}^{-1}\ \boldsymbol{\Delta}\mathbf{z}$$

- **Matriz Ganho:**
  - Definida como:
    $$\mathbf{G} = \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\,\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{H}(\mathbf{x}^k)$$
  - Propriedades:
    - É simétrica ($\mathbf{G}^T = \mathbf{G}$);

Equação Normal de Gauss

$$\left[\mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\,\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{H}(\mathbf{x}^k)\right]\ \boldsymbol{\Delta}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\ \mathbf{R}^{-1}\ \boldsymbol{\Delta}\mathbf{z}$$

- **Matriz Ganho:**
  - Definida como:
  $$\mathbf{G} = \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\,\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{H}(\mathbf{x}^k)$$
  - Propriedades:
    - É simétrica ($\mathbf{G}^T = \mathbf{G}$);
    - Dimensão: $n \times n$;

Equação Normal de Gauss

$$\left[\mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\,\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{H}(\mathbf{x}^k)\right]\ \boldsymbol{\Delta}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\ \mathbf{R}^{-1}\ \boldsymbol{\Delta}\mathbf{z}$$

- **Matriz Ganho:**
  - Definida como:
  $$\mathbf{G} = \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\,\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{H}(\mathbf{x}^k)$$
  - Propriedades:
    - É simétrica ($\mathbf{G}^T = \mathbf{G}$);
    - Dimensão: $n \times n$;
    - É não-singular se sistema for **observável** com respeito ao plano de medição.

Equação Normal de Gauss

$$\left[\mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\,\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{H}(\mathbf{x}^k)\right]\;\boldsymbol{\Delta}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\;\mathbf{R}^{-1}\;\boldsymbol{\Delta}\mathbf{z}$$

- **Matriz Ganho:**
  - Definida como:

    $$\mathbf{G} = \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\,\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{H}(\mathbf{x}^k)$$
  - Propriedades:
    - É simétrica ($\mathbf{G}^T = \mathbf{G}$);
    - Dimensão: $n \times n$;
    - É não-singular se sistema for **observável** com respeito ao plano de medição.
- Lado direito:

  $$\mathbf{b} = \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\;\mathbf{R}^{-1}\;\boldsymbol{\Delta}\mathbf{z}$$

Equação Normal de Gauss

$$\left[\mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\,\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{H}(\mathbf{x}^k)\right]\ \boldsymbol{\Delta}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\ \mathbf{R}^{-1}\ \boldsymbol{\Delta}\mathbf{z}$$

- **Matriz Ganho:**
  - Definida como:

    $$\mathbf{G} = \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\,\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{H}(\mathbf{x}^k)$$

  - Propriedades:
    - É simétrica ($\mathbf{G}^T = \mathbf{G}$);
    - Dimensão: $n \times n$;
    - É não-singular se sistema for **observável** com respeito ao plano de medição.
- Lado direito:

  $$\mathbf{b} = \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\ \mathbf{R}^{-1}\ \boldsymbol{\Delta}\mathbf{z}$$

- Equação normal pode ser re-escrita como:

  $$\mathbf{G}\ \boldsymbol{\Delta}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$$

Algoritmo da Estimação de Estados

Dados: vetor de medidas, $\mathbf{z}$, variâncias dos medidores, σ_i^2, $i = 1, \dots, m$.

1. Fornecer valores iniciais para os estados, $\mathbf{x}^0$ (por ex., $x_j = 1,0\angle 0$, $i = 1, \dots, n$;

Algoritmo da Estimação de Estados

Dados: vetor de medidas, $\mathbf{z}$, variâncias dos medidores, σ_i^2, $i = 1, \ldots, m$.

1. Fornecer valores iniciais para os estados, $\mathbf{x}^0$ (por ex., $x_j = 1,0\angle 0$, $i = 1, \ldots, n$;
2. Formar matriz de covariância dos erros de medição, $\mathbf{R}$;

Algoritmo da Estimação de Estados

Dados: vetor de medidas, $\mathbf{z}$, variâncias dos medidores, σ_i^2, $i = 1, \ldots, m$.

1. Fornecer valores iniciais para os estados, $\mathbf{x}^0$ (por ex., $x_j = 1,0\angle 0$, $i = 1, \ldots, n$;
2. Formar matriz de covariância dos erros de medição, $\mathbf{R}$;
3. $k = 0$;

Algoritmo da Estimação de Estados

Dados: vetor de medidas, $\mathbf{z}$, variâncias dos medidores, σ_i^2, $i = 1, \ldots, m$.

1. Fornecer valores iniciais para os estados, $\mathbf{x}^0$ (por ex., $x_j = 1,0\angle 0$, $i = 1, \ldots, n$;
2. Formar matriz de covariância dos erros de medição, $\mathbf{R}$;
3. $k = 0$;
4. Formar matriz Jacobiana, $\mathbf{H}(\mathbf{x}^k)$;

Algoritmo da Estimação de Estados

Dados: vetor de medidas, $\mathbf{z}$, variâncias dos medidores, σ_i^2, $i = 1, \ldots, m$.

1. Fornecer valores iniciais para os estados, $\mathbf{x}^0$ (por ex., $x_j = 1,0\angle 0$, $i = 1, \ldots, n$;
2. Formar matriz de covariância dos erros de medição, $\mathbf{R}$;
3. $k = 0$;
4. Formar matriz Jacobiana, $\mathbf{H}(\mathbf{x}^k)$;
5. Formar vetor $\mathbf{\Delta z} = \mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)$ e vetor $\mathbf{b} = \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\ \mathbf{R}^{-1}\ \mathbf{\Delta z}$;

Algoritmo da Estimação de Estados

Dados: vetor de medidas, $\mathbf{z}$, variâncias dos medidores, σ_i^2, $i = 1, \ldots, m$.

1. Fornecer valores iniciais para os estados, $\mathbf{x}^0$ (por ex., $x_j = 1,0\angle 0$, $i = 1, \ldots, n$;
2. Formar matriz de covariância dos erros de medição, $\mathbf{R}$;
3. $k = 0$;
4. Formar matriz Jacobiana, $\mathbf{H}(\mathbf{x}^k)$;
5. Formar vetor $\mathbf{\Delta z} = \mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)$ e vetor $\mathbf{b} = \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\ \mathbf{R}^{-1}\ \mathbf{\Delta z}$;
6. Resolver Equação Normal para $\mathbf{\Delta \hat{x}}$;

Algoritmo da Estimação de Estados

Dados: vetor de medidas, $\mathbf{z}$, variâncias dos medidores, σ_i^2, $i = 1, \ldots, m$.

1. Fornecer valores iniciais para os estados, $\mathbf{x}^0$ (por ex., $x_j = 1,0\angle 0$, $i = 1, \ldots, n$;
2. Formar matriz de covariância dos erros de medição, $\mathbf{R}$;
3. $k = 0$;
4. Formar matriz Jacobiana, $\mathbf{H}(\mathbf{x}^k)$;
5. Formar vetor $\mathbf{\Delta z} = \mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)$ e vetor $\mathbf{b} = \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\ \mathbf{R}^{-1}\ \mathbf{\Delta z}$;
6. Resolver Equação Normal para $\mathbf{\Delta \hat{x}}$;
7. Se $\|\mathbf{\Delta \hat{x}}\| \leq \epsilon$, fim das iterações, ir para 9. Se não, ir para 8;

Algoritmo da Estimação de Estados

Dados: vetor de medidas, $\mathbf{z}$, variâncias dos medidores, σ_i^2, $i = 1, \ldots, m$.

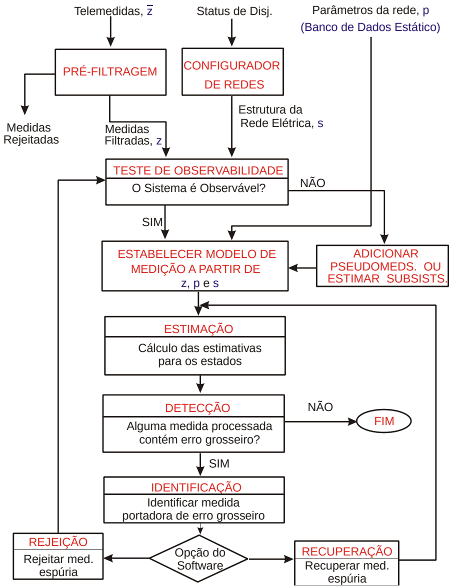
1. Fornecer valores iniciais para os estados, $\mathbf{x}^0$ (por ex., $x_j = 1,0\angle 0$, $i = 1, \ldots, n$;
2. Formar matriz de covariância dos erros de medição, $\mathbf{R}$;
3. $k = 0$;
4. Formar matriz Jacobiana, $\mathbf{H}(\mathbf{x}^k)$;
5. Formar vetor $\mathbf{\Delta z} = \mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)$ e vetor $\mathbf{b} = \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\ \mathbf{R}^{-1}\ \mathbf{\Delta z}$;
6. Resolver Equação Normal para $\mathbf{\Delta\hat{x}}$;
7. Se $\|\mathbf{\Delta\hat{x}}\| \leq \epsilon$, fim das iterações, ir para 9. Se não, ir para 8;
8. Atualizar vetor de estimativas: $\mathbf{\hat{x}}_{k+1} = \mathbf{\hat{x}}_k + \mathbf{\Delta\hat{x}}$, fazer $k \leftarrow k + 1$ e retornar para passo 4;

Algoritmo da Estimação de Estados

Dados: vetor de medidas, $\mathbf{z}$, variâncias dos medidores, σ_i^2, $i = 1, \ldots, m$.

1. Fornecer valores iniciais para os estados, $\mathbf{x}^0$ (por ex., $x_j = 1,0\angle 0$, $i = 1, \ldots, n$;
2. Formar matriz de covariância dos erros de medição, $\mathbf{R}$;
3. $k = 0$;
4. Formar matriz Jacobiana, $\mathbf{H}(\mathbf{x}^k)$;
5. Formar vetor $\mathbf{\Delta z} = \mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)$ e vetor $\mathbf{b} = \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^k)\ \mathbf{R}^{-1}\ \mathbf{\Delta z}$;
6. Resolver Equação Normal para $\mathbf{\Delta\hat{x}}$;
7. Se $\|\mathbf{\Delta\hat{x}}\| \leq \epsilon$, fim das iterações, ir para 9. Se não, ir para 8;
8. Atualizar vetor de estimativas: $\mathbf{\hat{x}}_{k+1} = \mathbf{\hat{x}}_k + \mathbf{\Delta\hat{x}}$, fazer $k \leftarrow k+1$ e retornar para passo 4;
9. Calcular fluxos de potência nos ramos e injeções nodais. **FIM.**

Funções da Estimação de Estados



Estimador de Estados Linearizado ("DC")

- Baseia-se nas mesmas hipóteses do fluxo de potência "DC":

Estimador de Estados Linearizado ("DC")

- Baseia-se nas mesmas hipóteses do fluxo de potência "DC":
  - Magnitudes de tensão nas barras consideradas iguais a $1,0$ *pu*;

Estimador de Estados Linearizado ("DC")

- Baseia-se nas mesmas hipóteses do fluxo de potência "DC":
    - Magnitudes de tensão nas barras consideradas iguais a $1,0$ pu;
    - Resistências e admitâncias transversais desprezadas;

Estimador de Estados Linearizado ("DC")

- Baseia-se nas mesmas hipóteses do fluxo de potência "DC":
  - Magnitudes de tensão nas barras consideradas iguais a $1,0$ *pu*;
  - Resistências e admitâncias transversais desprezadas;
  - Aberturas angulares suficientemente pequenas, tal que:

$$sen(\delta_i - \delta_j) \approx (\delta_i - \delta_j) \quad rads$$

Estimador de Estados Linearizado ("DC")

- Baseia-se nas mesmas hipóteses do fluxo de potência "DC":
  - Magnitudes de tensão nas barras consideradas iguais a $1,0$ *pu*;
  - Resistências e admitâncias transversais desprezadas;
  - Aberturas angulares suficientemente pequenas, tal que:

$$sen(\delta_i - \delta_j) \approx (\delta_i - \delta_j) \quad rads$$

- Considerando-se estas hipóteses, têm-se

$$\boxed{t_{ij} = \gamma_{ij}\ (\delta_i - \delta_j)}$$

e

$$\boxed{p_i = \sum_{k \in \Omega_i} t_{ik}}$$

onde $\gamma_{ij} = 1/x_{ij}$ e Ω_i é o conjunto de barras adjacentes à barra i.

Modelo de Medição Linear

- Vetor de estados a ser estimado reduz-se ao vetor δ. Se a barra 1 é a barra de referência:

$$\boxed{\delta = [\delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_N]^T}$$

Modelo de Medição Linear

- Vetor de estados a ser estimado reduz-se ao vetor δ. Se a barra 1 é a barra de referência:

$$\boxed{\delta = [\delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_N]^T}$$

- Vetor de medidas $\mathbf{z}$ envolve apenas medidas de fluxo e de injeção de potência ativa:

$$\boxed{\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_t \\ \mathbf{z}_P \end{bmatrix}}$$

onde

Modelo de Medição Linear

- Vetor de estados a ser estimado reduz-se ao vetor δ. Se a barra 1 é a barra de referência:

$$\boxed{\delta = [\delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_N]^T}$$

- Vetor de medidas $\mathbf{z}$ envolve apenas medidas de fluxo e de injeção de potência ativa:

$$\boxed{\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_t \\ \mathbf{z}_P \end{bmatrix}}$$

onde

  - $\mathbf{z}_t$: vetor de medidas de fluxo de potência ativa;

Modelo de Medição Linear

- Vetor de estados a ser estimado reduz-se ao vetor δ. Se a barra 1 é a barra de referência:

$$\boxed{\delta = [\delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_N]^T}$$

- Vetor de medidas $\mathbf{z}$ envolve apenas medidas de fluxo e de injeção de potência ativa:

$$\boxed{\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_t \\ \mathbf{z}_P \end{bmatrix}}$$

onde

- $\mathbf{z}_t$: vetor de medidas de fluxo de potência ativa;
- $\mathbf{z}_p$: vetor de medidas de injeção de potência ativa.

Modelo de Medição Linear

- Vetor de estados a ser estimado reduz-se ao vetor δ. Se a barra 1 é a barra de referência:

$$\boxed{\delta = [\delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_N]^T}$$

- Vetor de medidas $\mathbf{z}$ envolve apenas medidas de fluxo e de injeção de potência ativa:

$$\boxed{\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_t \\ \mathbf{z}_P \end{bmatrix}}$$

  onde

  - $\mathbf{z}_t$: vetor de medidas de fluxo de potência ativa;
  - $\mathbf{z}_p$: vetor de medidas de injeção de potência ativa.

- O modelo de medição linear fica:

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\delta + \eta$$
$$E\{\eta\} = \mathbf{0}; \;\; E\{\eta\eta^T\} = \mathbf{R}$$

Solução via Equação Normal

- As relações entre as quantidades medidas e os estados são *lineares*;

Solução via Equação Normal

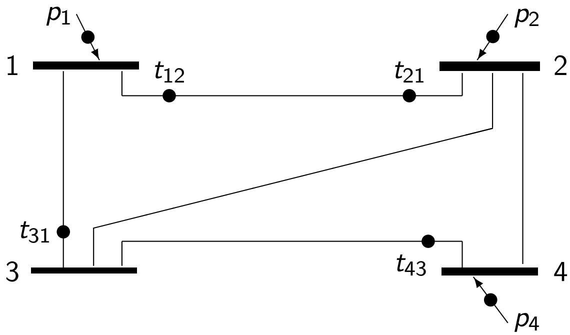
- As relações entre as quantidades medidas e os estados são *lineares*;
- A matriz de observação **H** do modelo de medição é *constante*.

Solução via Equação Normal

- As relações entre as quantidades medidas e os estados são *lineares*;
- A matriz de observação $\mathbf{H}$ do modelo de medição é *constante*.
- As estimativas $\hat{\delta}$ para os estados são obtidas de forma *não-iterativa* através do método da equação normal como:

$$\boxed{(\mathbf{H}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H})\ \hat{\delta} = \mathbf{H}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{z}}$$

Exemplo - Sistema de 4 barras e 7 medidas



$$
\begin{bmatrix} z_{t_{12}} \\ z_{t_{21}} \\ z_{t_{31}} \\ z_{t_{43}} \\ z_{p_1} \\ z_{p_2} \\ z_{p_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_{12} & 0 & 0 \\ \gamma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{31} & 0 \\ 0 & -\gamma_{34} & \gamma_{34} \\ -\gamma_{12} & -\gamma_{13} & 0 \\ \gamma_{12}+\gamma_{23}+\gamma_{24} & -\gamma_{23} & -\gamma_{24} \\ -\gamma_{24} & -\gamma_{34} & \gamma_{34}+\gamma_{24} \end{bmatrix} \delta + \begin{bmatrix} \eta_{\mathbf{t_{12}}} \\ \eta_{\mathbf{t_{21}}} \\ \eta_{\mathbf{t_{31}}} \\ \eta_{\mathbf{t_{43}}} \\ \eta_{\mathbf{p_1}} \\ \eta_{\mathbf{p_2}} \\ \eta_{\mathbf{p_4}} \end{bmatrix}
$$