

Programação Hidrotérmica de Curto Prazo

Antonio Simões Costa

Grupo de Sistemas de Potência - UFSC

- Neste caso, capacidade hidráulica $<$ potência da carga \Rightarrow térmicas devem operar durante todo o horizonte de tempo;

- Neste caso, capacidade hidráulica $<$ potência da carga \Rightarrow térmicas devem operar durante todo o horizonte de tempo;
- Volume d'água disponível para a UHE utilizado para minimizar custo térmico;

- Neste caso, capacidade hidráulica $<$ potência da carga \Rightarrow térmicas devem operar durante todo o horizonte de tempo;
- Volume d'água disponível para a UHE utilizado para minimizar custo térmico;
- Hipóteses:

- Neste caso, capacidade hidráulica $<$ potência da carga \Rightarrow térmicas devem operar durante todo o horizonte de tempo;
- Volume d'água disponível para a UHE utilizado para minimizar custo térmico;
- Hipóteses:
 - ausência de vertimento;

- Neste caso, capacidade hidráulica $<$ potência da carga \Rightarrow térmicas devem operar durante todo o horizonte de tempo;
- Volume d'água disponível para a UHE utilizado para minimizar custo térmico;
- Hipóteses:
 - ausência de vertimento;
 - altura de queda \approx constante \Rightarrow potência gerada pela UHE depende apenas da vazão turbinada ou, equivalentemente, $q = f(P_H)$.

Formulação do Problema:

- *Considerações adicionais:*

Formulação do Problema:

- *Considerações adicionais:*
 - V_{tot} : volume disponível para ser turbinado durante o horizonte de T_{max} horas;

Formulação do Problema:

- *Considerações adicionais:*

- V_{tot} : volume disponível para ser turbinado durante o horizonte de T_{max} horas;
- horizonte discretizado em j_{max} intervalos, e intervalo j com duração de h_j horas,

Formulação do Problema:

- *Considerações adicionais:*

- V_{tot} : volume disponível para ser turbinado durante o horizonte de T_{max} horas;
- horizonte discretizado em j_{max} intervalos, e intervalo j com duração de h_j horas,
- carga constante ao longo de cada intervalo,

Formulação do Problema:

- *Considerações adicionais:*

- V_{tot} : volume disponível para ser turbinado durante o horizonte de T_{max} horas;
- horizonte discretizado em j_{max} intervalos, e intervalo j com duração de h_j horas,
- carga constante ao longo de cada intervalo,

- Formulação da **Programação H-T de Curto Prazo**:

$$\min F_T(\mathbf{P}_T) = \sum_{j=1}^{j_{max}} F(P_{T,j}) h_j$$

s.a

$$\sum_{j=1}^{j_{max}} h_j q(P_{H,j}) = V_{tot}$$

$$P_{L,j} + P_{perdas,j} = P_{H,j} + P_{T,j}, \quad j = 1, \dots, j_{max}$$

Função Lagrangeana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{P}_T, \mathbf{P}_H, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = & \sum_{j=1}^{j_{\max}} F(P_{T,j}) h_j + \\ & \sum_{j=1}^{j_{\max}} [\lambda_j (P_{L,j} + P_{perdas,j} - P_{H,j} - P_{T,j})] + \\ & \gamma \left(\sum_{j=1}^{j_{\max}} h_j q(P_{H,j}) - V_{tot} \right) \end{aligned}$$

onde

- $\lambda_j, j = 1, \dots, j_{\max}$: mult. de Lagrange das restr. de balanço de potência;

Função Lagrangeana:

$$\mathcal{L}(\mathbf{P}_T, \mathbf{P}_H, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = \sum_{j=1}^{j_{\max}} F(P_{T,j}) h_j + \sum_{j=1}^{j_{\max}} [\lambda_j (P_{L,j} + P_{perdas,j} - P_{H,j} - P_{T,j})] + \gamma \left(\sum_{j=1}^{j_{\max}} h_j q(P_{H,j}) - V_{tot} \right)$$

onde

- $\lambda_j, j = 1, \dots, j_{\max}$: mult. de Lagrange das restr. de balanço de potência;
- γ : mult. de Lagrange da restrição de volume;

Função Lagrangeana:

$$\mathcal{L}(\mathbf{P}_T, \mathbf{P}_H, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = \sum_{j=1}^{j_{\max}} F(P_{T,j}) h_j + \sum_{j=1}^{j_{\max}} [\lambda_j (P_{L,j} + P_{perdas,j} - P_{H,j} - P_{T,j})] + \gamma \left(\sum_{j=1}^{j_{\max}} h_j q(P_{H,j}) - V_{tot} \right)$$

onde

- $\lambda_j, j = 1, \dots, j_{\max}$: mult. de Lagrange das restr. de balanço de potência;
- γ : mult. de Lagrange da restrição de volume;
- Restrição de volume é uma só, *mas envolve as potências geradas na UHE em cada intervalo de tempo j (restrição intertemporal)*.

Condições de Otimalidade:

- *Equações de coordenação hidrotérmica* para um dado intervalo k :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{T,k}} = h_k \frac{dF(P_{T,k})}{dP_{T,k}} - \lambda_k \left(1 - \frac{\partial P_{perdas,k}}{\partial P_{T,k}} \right) = 0, \quad k = 1, \dots, j_{\max}$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{H,k}} = h_k \gamma \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} - \lambda_k \left(1 - \frac{\partial P_{perdas,k}}{\partial P_{H,k}} \right) = 0, \quad k = 1, \dots, j_{\max}$$

Condições de Otimalidade:

- *Equações de coordenação hidrotérmica* para um dado intervalo k :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{T,k}} = h_k \frac{dF(P_{T,k})}{dP_{T,k}} - \lambda_k \left(1 - \frac{\partial P_{perdas,k}}{\partial P_{T,k}} \right) = 0, \quad k = 1, \dots, j_{\max}$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{H,k}} = h_k \gamma \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} - \lambda_k \left(1 - \frac{\partial P_{perdas,k}}{\partial P_{H,k}} \right) = 0, \quad k = 1, \dots, j_{\max}$$

- Podem ser re-escritas como:

$$\left(\frac{1}{1 - \frac{\partial P_{perdas,k}}{\partial P_{T,k}}} \right) h_k \frac{dF(P_{T,k})}{dP_{T,k}} = \lambda_k, \quad k = 1, \dots, j_{\max}$$

e

$$\left(\frac{1}{1 - \frac{\partial P_{perdas,k}}{\partial P_{H,k}}} \right) h_k \gamma \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} = \lambda_k, \quad k = 1, \dots, j_{\max}$$

Perdas de Transmissão Desconsideradas - I:

Considere agora que:

- Perdas de transmissão podem ser desprezadas, ou seja

$$P_{perdas,j} = 0, \quad j = 1, \dots, j_{\max}$$

Perdas de Transmissão Desconsideradas - I:

Considere agora que:

- Perdas de transmissão podem ser desprezadas, ou seja

$$P_{perdas,j} = 0, \quad j = 1, \dots, j_{\max}$$

- Intervalos de tempo são de igual duração, isto é

$$h_j = h, \quad j = 1, \dots, j_{\max}$$

Perdas de Transmissão Desconsideradas - I:

Considere agora que:

- Perdas de transmissão podem ser desprezadas, ou seja

$$P_{perdas,j} = 0, \quad j = 1, \dots, j_{\max}$$

- Intervalos de tempo são de igual duração, isto é

$$h_j = h, \quad j = 1, \dots, j_{\max}$$

As equações de coordenação tornam-se:

$$\left. \begin{aligned} h \frac{dF(P_{T,k})}{dP_{T,k}} &= \lambda_k \\ h \gamma \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} &= \lambda_k \end{aligned} \right\}, \quad k = 1, \dots, j_{\max}$$

Perdas de Transmissão Desconsideradas - II:

Se considerarmos $q(P_{H,j}) = \beta_0 + \beta_1 P_{H,j}$ em

$$h \frac{dF(P_{T,k})}{dP_{T,k}} = \lambda_k$$

$$h \gamma \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} = \lambda_k$$

veremos que:

- λ_k será constante sobre todos os intervalos;

Perdas de Transmissão Desconsideradas - II:

Se considerarmos $q(P_{H,j}) = \beta_0 + \beta_1 P_{H,j}$ em

$$h \frac{dF(P_{T,k})}{dP_{T,k}} = \lambda_k$$

$$h \gamma \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} = \lambda_k$$

veremos que:

- λ_k será constante sobre todos os intervalos;
- térmicas devem operar com custos incrementais constantes, e

Perdas de Transmissão Desconsideradas - II:

Se considerarmos $q(P_{H,j}) = \beta_0 + \beta_1 P_{H,j}$ em

$$h \frac{dF(P_{T,k})}{dP_{T,k}} = \lambda_k$$

$$h \gamma \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} = \lambda_k$$

veremos que:

- λ_k será constante sobre todos os intervalos;
- térmicas devem operar com custos incrementais constantes, e
- *potências geradas pelas térmicas também serão constantes durante todo o horizonte de tempo.*

Interpretação do multiplicador de Lagrange γ :

Comparando as eqs. de coordenação no caso sem perdas:

$$h f \frac{dH(P_{T,k})}{dP_{T,k}} = \lambda_k$$

$$h \gamma \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} = \lambda_k$$

- H e q traduzem as taxas de entrada de energia para a UTE e para a UHE, respectivamente $\Rightarrow \gamma$ ($\$/dam^3$) tem papel análogo a f ($\$/MBtu$).

Interpretação do multiplicador de Lagrange γ :

Comparando as eqs. de coordenação no caso sem perdas:

$$h f \frac{dH(P_{T,k})}{dP_{T,k}} = \lambda_k$$

$$h \gamma \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} = \lambda_k$$

- H e q traduzem as taxas de entrada de energia para a UTE e para a UHE, respectivamente $\Rightarrow \gamma$ ($\$/dam^3$) tem papel análogo a f ($\$/MBtu$).
- A variável γ é o *valor marginal da água*;

Interpretação do multiplicador de Lagrange γ :

Comparando as eqs. de coordenação no caso sem perdas:

$$h f \frac{dH(P_{T,k})}{dP_{T,k}} = \lambda_k$$

$$h \gamma \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} = \lambda_k$$

- H e q traduzem as taxas de entrada de energia para a UTE e para a UHE, respectivamente $\Rightarrow \gamma$ ($\$/dam^3$) tem papel análogo a f ($\$/MBtu$).
- A variável γ é o *valor marginal da água*;
- Para dois valores de volume a ser turbinado por uma UHE sob as mesmas condições, V_{tot1} e V_{tot2} , $V_{tot1} > V_{tot2}$, podemos esperar que, $\gamma_1 < \gamma_2$.

Exemplo 3:

Uma carga deve ser alimentada durante 24 horas por uma UHE e uma UTE cujas características são:

UHE:	$q(P_H) = 330 + 4,97 P_H \text{ dam}^3/h,$
	$0 \leq P_H \leq 1000 \text{ MW}$
UTE:	$F(P_T) = 575 + 9,2 P_T + 0,00184 P_T^2 \text{ \$/h},$
	$150 \leq P_T \leq 1500 \text{ MW}$

Os efeitos das perdas de transmissão são considerados desprezíveis, o máximo volume d'água a ser turbinado é de 100000 dam^3 e a carga varia conforme abaixo:

00 : 00 – 12 : 00	1200 MW
12 : 00 – 24 : 00	1500 MW

Determine os despachos da UHE e da UTE ao longo do período, bem como os custos marginais de energia do sistema e custos marginais da água.

Solução:

- Com $h_1 = h_2$ e perdas desprezadas, temos que $P_{T,1} = P_{T,2} = P_T$.

Solução:

- Com $h_1 = h_2$ e perdas desprezadas, temos que $P_{T,1} = P_{T,2} = P_T$.
- Das equações de balanço de potência:

$$P_{H,1} + P_T = 1200 \Rightarrow P_{H,1} = 1200 - P_T$$

$$P_{H,2} + P_T = 1500 \Rightarrow P_{H,2} = 1500 - P_T$$

Solução:

- Com $h_1 = h_2$ e perdas desprezadas, temos que $P_{T,1} = P_{T,2} = P_T$.
- Das equações de balanço de potência:

$$P_{H,1} + P_T = 1200 \Rightarrow P_{H,1} = 1200 - P_T$$

$$P_{H,2} + P_T = 1500 \Rightarrow P_{H,2} = 1500 - P_T$$

- Já a equação de restrição de volume fornece

$$h_1 q(P_{H,1}) + h_2 q(P_{H,2}) = V_{tot}$$

Solução:

- Com $h_1 = h_2$ e perdas desprezadas, temos que $P_{T,1} = P_{T,2} = P_T$.
- Das equações de balanço de potência:

$$P_{H,1} + P_T = 1200 \Rightarrow P_{H,1} = 1200 - P_T$$

$$P_{H,2} + P_T = 1500 \Rightarrow P_{H,2} = 1500 - P_T$$

- Já a equação de restrição de volume fornece

$$h_1 q(P_{H,1}) + h_2 q(P_{H,2}) = V_{tot}$$

- ou, como $h_1 = h_2 = 12$,

$$12 [330 + 4,97 (1200 - P_T)] + 330 + 4,97 (1500 - P_T) = 100000$$

Solução:

- Com $h_1 = h_2$ e perdas desprezadas, temos que $P_{T,1} = P_{T,2} = P_T$.
- Das equações de balanço de potência:

$$P_{H,1} + P_T = 1200 \Rightarrow P_{H,1} = 1200 - P_T$$

$$P_{H,2} + P_T = 1500 \Rightarrow P_{H,2} = 1500 - P_T$$

- Já a equação de restrição de volume fornece

$$h_1 q(P_{H,1}) + h_2 q(P_{H,2}) = V_{tot}$$

- ou, como $h_1 = h_2 = 12$,

$$12 [330 + 4,97 (1200 - P_T)] + 330 + 4,97 (1500 - P_T) = 100000$$

- cuja solução fornece

$$P_{T,1} = P_{T,2} = P_T = 577,9 \text{ MW}$$

Solução:

- Com $h_1 = h_2$ e perdas desprezadas, temos que $P_{T,1} = P_{T,2} = P_T$.
- Das equações de balanço de potência:

$$P_{H,1} + P_T = 1200 \Rightarrow P_{H,1} = 1200 - P_T$$

$$P_{H,2} + P_T = 1500 \Rightarrow P_{H,2} = 1500 - P_T$$

- Já a equação de restrição de volume fornece

$$h_1 q(P_{H,1}) + h_2 q(P_{H,2}) = V_{tot}$$

- ou, como $h_1 = h_2 = 12$,

$$12 [330 + 4,97 (1200 - P_T)] + 330 + 4,97 (1500 - P_T) = 100000$$

- cuja solução fornece

$$P_{T,1} = P_{T,2} = P_T = 577,9 \text{ MW}$$

- e conseqüentemente

$$P_{H,1} = 1200 - P_T = 622,1 \text{ MW}$$

$$P_{H,2} = 1500 - P_T = 922,1 \text{ MW}$$

Solução Ex. 3 (cont.):

- Os multiplicadores de Lagrange das equações de balanço de energia podem ser calculados como

$$\lambda_1 = \lambda_2 = h \frac{dF(P_{T,k})}{dP_{T,k}} = 12 \times (9,2 + 0,00368 \times 577,9)$$

ou

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 135,92 \text{ \$/MW}$$

Solução Ex. 3 (cont.):

- Os multiplicadores de Lagrange das equações de balanço de energia podem ser calculados como

$$\lambda_1 = \lambda_2 = h \frac{dF(P_{T,k})}{dP_{T,k}} = 12 \times (9,2 + 0,00368 \times 577,9)$$

ou

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 135,92 \text{ \$/MW}$$

- Finalmente, o custo marginal da água é dado por

$$\gamma h \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} = \lambda \Rightarrow 12 \times 4,97 \times \gamma = 135,92$$

Solução Ex. 3 (cont.):

- Os multiplicadores de Lagrange das equações de balanço de energia podem ser calculados como

$$\lambda_1 = \lambda_2 = h \frac{dF(P_{T,k})}{dP_{T,k}} = 12 \times (9,2 + 0,00368 \times 577,9)$$

ou

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 135,92 \text{ \$/MW}$$

- Finalmente, o custo marginal da água é dado por

$$\gamma h \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} = \lambda \Rightarrow 12 \times 4,97 \times \gamma = 135,92$$

- Portanto, $\gamma = 2,28 \text{ \$/dam}^3$.

- Perdas não-desprezadas \Rightarrow problema de coord. H-T forma um conjunto de $(3 j_{\max} + 1)$ equações não-lineares;

- Perdas não-desprezadas \Rightarrow problema de coord. H-T forma um conjunto de $(3 j_{\max} + 1)$ equações não-lineares;
- Principal dificuldade: restrição de volume é *intertemporal*, dificultando desacoplamento do problema por intervalo de tempo;

- Perdas não-desprezadas \Rightarrow problema de coord. H-T forma um conjunto de $(3 j_{\max} + 1)$ equações não-lineares;
- Principal dificuldade: restrição de volume é *intertemporal*, dificultando desacoplamento do problema por intervalo de tempo;
- Algoritmos de solução: *Iteração $\lambda - \gamma$* (clássico), Pontos Interiores, Programação Quadrática, Relaxação Lagrangeana, etc.

Descrição geral do algoritmo:

Consiste de três laços iterativos:

- Laço interno: ajusta os multiplicadores de Lagrange λ_j para resolver equações de coordenação hidrotérmica e de balanço de potência;

Descrição geral do algoritmo:

Consiste de três laços iterativos:

- Laço interno: ajusta os multiplicadores de Lagrange λ_j para reesolver equações de coordenação hidrotérmica e de balanço de potência;
- Laço intermediário: incrementa os intervalos de tempo até esgotar o horizonte de tempo de estudo;

Descrição geral do algoritmo:

Consiste de três laços iterativos:

- Laço interno: ajusta os multiplicadores de Lagrange λ_j para resolver equações de coordenação hidrotérmica e de balanço de potência;
- Laço intermediário: incrementa os intervalos de tempo até esgotar o horizonte de tempo de estudo;
- Laço externo: ajusta iterativamente o multiplicador de Lagrange da restrição de volume, γ , até que esta restrição seja cumprida.

Exemplo 4:

Reconsidere o Exemplo 3, agora supondo que a UHE está localizada a uma certa distância da carga, de modo que as perdas de transmissão são significativas e dependem apenas de P_H , sendo dadas por

$$P_{perdas,j} = 8 \times 10^{-5} P_{H,j}^2, \quad j = 1, \dots, j_{\max}.$$

Encontre os novos despachos da UHE e da UTE, bem como os multiplicadores de Lagrange e as perdas de transmissão.

- A aplicação do Algoritmo da Iteração $\lambda - \gamma$ fornece:

Período	$P_{T,j}$	$P_{H,j}$	λ_j	$P_{perdas,j}$	q_j
00-12	567,4	668,3	135,46	35,73	3651,5
12-24	685,7	875,6	140,68	61,33	4681,7

$$\gamma = 2,028 \text{ \$/dam}^3$$

- A aplicação do Algoritmo da Iteração $\lambda - \gamma$ fornece:

Período	$P_{T,j}$	$P_{H,j}$	λ_j	$P_{perdas,j}$	q_j
00-12	567,4	668,3	135,46	35,73	3651,5
12-24	685,7	875,6	140,68	61,33	4681,7

$$\gamma = 2,028 \text{ \$/dam}^3$$

- As seguintes observações aplicam-se a este exemplo:

- A aplicação do Algoritmo da Iteração $\lambda - \gamma$ fornece:

Período	$P_{T,j}$	$P_{H,j}$	λ_j	$P_{perdas,j}$	q_j
00-12	567,4	668,3	135,46	35,73	3651,5
12-24	685,7	875,6	140,68	61,33	4681,7

$$\gamma = 2,028 \text{ \$/dam}^3$$

- As seguintes observações aplicam-se a este exemplo:
 - Na presença de perdas, os λ_j e $P_{T,j}$ não são mais constantes ao longo dos intervalos de tempo;

- A aplicação do Algoritmo da Iteração $\lambda - \gamma$ fornece:

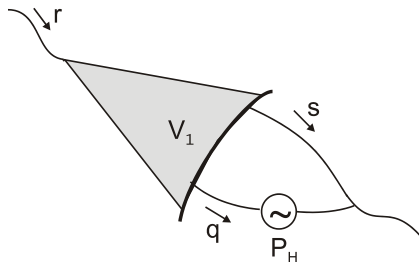
Período	$P_{T,j}$	$P_{H,j}$	λ_j	$P_{perdas,j}$	q_j
00-12	567, 4	668, 3	135, 46	35, 73	3651, 5
12-24	685, 7	875, 6	140, 68	61, 33	4681, 7

$$\gamma = 2, 028 \text{ \$/dam}^3$$

- As seguintes observações aplicam-se a este exemplo:
 - Na presença de perdas, os λ_j e $P_{T,j}$ não são mais constantes ao longo dos intervalos de tempo;
 - O fato das perdas serem produzidas apenas por $P_{H,j}$ tem o efeito de “desvalorizar” a água: o valor de γ neste exemplo é menor do que no Exemplo 3 ($\gamma = 2, 28 \text{ \$/dam}^3$).

Inclusão de Restrições Hidráulicas:

- Representação explícita de variáveis hidráulicas da Coord. H-T;
- Restr. de volume especificadas por intervalo;
- Consideram-se limites sobre variáveis hidráulicas.



- r_j : vazão afluyente para reserv. durante o interv. j ;
 q_j : vazão turbinada (*engolimento*) no interv. j ;
 u_j : taxa de vertimento no interv. j ;
 V_j : volume armazenado no reserv. no interv. j .

Balanço Hídrico:

- Ainda supondo $H \approx \text{cte.} \Rightarrow q_j = q(P_{H,j})$, temos:

$$V_j = V_{j-1} + (r_j - q_j - u_j) h_j$$

Balanço Hídrico:

- Ainda supondo $H \approx cte. \Rightarrow q_j = q(P_{H,j})$, temos:

$$V_j = V_{j-1} + (r_j - q_j - u_j) h_j$$

- Formulação do Problema considerando balanço hídrico:

$$\min F_T = \sum_{j=1}^{j_{\max}} h_j F(P_{T,j})$$

sujeito a:

$$\left. \begin{array}{l} P_{L,j} + P_{perdas,j} - P_{T,j} - P_{H,j} = 0 \\ V_j - V_{j-1} - (r_j - q_j - u_j) h_j = 0 \\ \underline{V} \leq V_j \leq \overline{V} \\ \underline{P}_T \leq P_{T,j} \leq \overline{P}_T \\ \underline{P}_H \leq P_{H,j} \leq \overline{P}_H \\ 0 \leq u_j \end{array} \right\}, \quad j = 1, \dots, j_{\max}$$

- 1 Restrição de balanço hídrico (*RBH*) é versão mais detalhada da restrição de volume única (*RVU*) da abordagem anterior;

- 1 Restrição de balanço hídrico (*RBH*) é versão mais detalhada da restrição de volume única (*RVU*) da abordagem anterior;
- 2 Volume inicial V_0 deve ser especificado;

- 1 Restrição de balanço hídrico (*RBH*) é versão mais detalhada da restrição de volume única (*RVU*) da abordagem anterior;
- 2 Volume inicial V_0 deve ser especificado;
- 3 Se volume final $V_{j_{\max}}$ também for especificado, *RBH* e *RVU* são essencialmente equivalentes, com a diferença que *RBH* permite levar em conta limites sobre cada V_j ;

- 1 Restrição de balanço hídrico (*RBH*) é versão mais detalhada da restrição de volume única (*RVU*) da abordagem anterior;
- 2 Volume inicial V_0 deve ser especificado;
- 3 Se volume final $V_{j_{\max}}$ também for especificado, *RBH* e *RVU* são essencialmente equivalentes, com a diferença que *RBH* permite levar em conta limites sobre cada V_j ;
- 4 Não-negatividade sobre os vertimentos é necessária.

Função Lagrangeana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_{j=1}^{j_{\max}} F(P_{T,j}) h_j + \sum_{j=1}^{j_{\max}} \lambda_j (P_{L,j} + P_{perdas,j} - P_{H,j} - P_{T,j}) + \\ & \sum_{j=1}^{j_{\max}} \gamma_j [V_j - V_{j-1} - (r_j - q_j - u_j) h_j] + \\ & \sum_{j=1}^{j_{\max}} [\underline{\alpha}_j (\underline{V} - V_j) + \bar{\alpha}_j (V_j - \bar{V})] + \\ & \sum_{j=1}^{j_{\max}} [\underline{\pi}_{T,j} (\underline{P}_T - P_{T,j}) + \bar{\pi}_{T,j} (P_{T,j} - \bar{P}_T)] + \\ & \sum_{j=1}^{j_{\max}} [\underline{\pi}_{H,j} (\underline{P}_H - P_{H,j}) + \bar{\pi}_{H,j} (P_{H,j} - \bar{P}_H)] + \sum_{j=1}^{j_{\max}} \pi_{u,j} u_j \end{aligned}$$

Por simplicidade, será desconsiderado o vertimento:

$$u_j = 0, \quad j = 1, \dots, j_{\max}$$

Condições de Otimalidade:

- As condições de factibilidade dual são:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{T,k}} = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{H,k}} = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_k} = 0$$

Condições de Otimalidade:

- As condições de factibilidade dual são:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{T,k}} = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{H,k}} = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_k} = 0$$

- cuja aplicação fornece:

$$\left. \begin{aligned} h_k \frac{dF(P_{T,k})}{dP_{T,k}} - \lambda_k \left(1 - \frac{\partial P_{perdas,k}}{\partial P_{T,k}} \right) - \underline{\pi}_{T,k} + \bar{\pi}_{T,k} &= 0 \\ \gamma_k h_k \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} - \lambda_k \left(1 - \frac{\partial P_{perdas,k}}{\partial P_{H,k}} \right) - \underline{\pi}_{H,k} + \bar{\pi}_{H,k} &= 0 \\ \gamma_j - \gamma_{j+1} - \underline{\alpha}_j + \bar{\alpha}_j &= 0 \end{aligned} \right\} j = 1, \dots, j_{\max}$$

Análise das condições de otimalidade ($\partial\mathcal{L}/\partial V_k = 0$) - I:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial V_k} = \gamma_j - \gamma_{j+1} - \underline{\alpha}_j + \bar{\alpha}_j = 0 \quad (*)$$

- Limite de volume não atingido em nenhum intervalo:

Análise das condições de otimalidade ($\partial\mathcal{L}/\partial V_k = 0$) - I:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial V_k} = \gamma_j - \gamma_{j+1} - \underline{\alpha}_j + \bar{\alpha}_j = 0 \quad (*)$$

- Limite de volume não atingido em nenhum intervalo:
 - Pelas condições de folga complementar:

$$\underline{\alpha}_j = \bar{\alpha}_j = 0$$

Análise das condições de otimalidade ($\partial\mathcal{L}/\partial V_k = 0$) - I:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial V_k} = \gamma_j - \gamma_{j+1} - \underline{\alpha}_j + \bar{\alpha}_j = 0 \quad (\star)$$

- Limite de volume não atingido em nenhum intervalo:
 - Pelas condições de folga complementar:

$$\underline{\alpha}_j = \bar{\alpha}_j = 0$$

- portanto, de (\star):

$$\gamma_j = \gamma_{j+1}, \quad j = 1, \dots, j_{\max} - 1$$

Análise das condições de otimalidade ($\partial\mathcal{L}/\partial V_k = 0$) - I:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial V_k} = \gamma_j - \gamma_{j+1} - \underline{\alpha}_j + \bar{\alpha}_j = 0 \quad (\star)$$

- Limite de volume não atingido em nenhum intervalo:
 - Pelas condições de folga complementar:

$$\underline{\alpha}_j = \bar{\alpha}_j = 0$$

- portanto, de (\star):

$$\gamma_j = \gamma_{j+1}, \quad j = 1, \dots, j_{\max} - 1$$

- *Conclusão*: valor da água γ constante ao longo de todo o horizonte de tempo.

Análise das condições de otimalidade ($\partial\mathcal{L}/\partial V_k = 0$) - II:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial V_k} = \gamma_j - \gamma_{j+1} - \underline{\alpha}_j + \bar{\alpha}_j = 0 \quad (*)$$

- Lim. superior de volume atingido no interv. k apenas:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial V_k} = \gamma_j - \gamma_{j+1} - \underline{\alpha}_j + \bar{\alpha}_j = 0 \quad (\star)$$

- Lim. superior de volume atingido no interv. k apenas:
 - Usando Eq (\star):

$$\gamma_k = \gamma_{k+1} - \bar{\alpha}_k$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial V_k} = \gamma_j - \gamma_{j+1} - \underline{\alpha}_j + \bar{\alpha}_j = 0 \quad (\star)$$

- Lim. superior de volume atingido no interv. k apenas:

- Usando Eq (\star):

$$\gamma_k = \gamma_{k+1} - \bar{\alpha}_k$$

- Como $\bar{\alpha}_k > 0$, então $\gamma_k < \gamma_{k+1}$.

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial V_k} = \gamma_j - \gamma_{j+1} - \underline{\alpha}_j + \bar{\alpha}_j = 0 \quad (\star)$$

- Lim. superior de volume atingido no interv. k apenas:

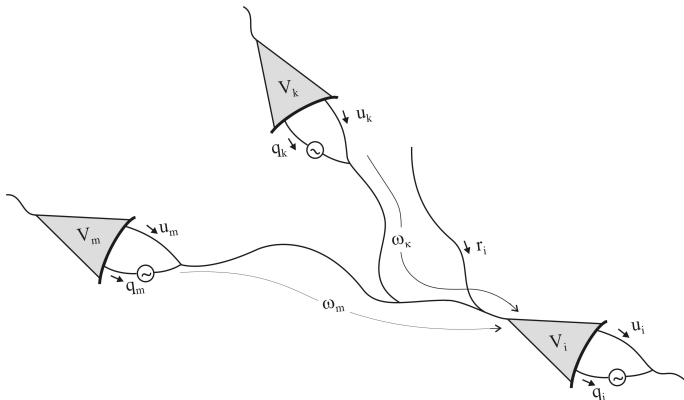
- Usando Eq (\star):

$$\gamma_k = \gamma_{k+1} - \bar{\alpha}_k$$

- Como $\bar{\alpha}_k > 0$, então $\gamma_k < \gamma_{k+1}$.
- **Conclusão:** maior oferta de água intervalo $k \Rightarrow$ (valor da água no interv. k) $<$ (valor da água no interv. $k + 1$).

Programação de Curto Prazo em Sistemas Reais:

Reservatórios em cascata:



- Balanço hídrico para reserv. i :

$$V_{i,j+1} = V_{i,j} + h_j r_{i,j} - h_j (q_{i,j} + u_{i,j}) + \sum_{\ell \in \Omega_i} h_j (q_{\ell,j-\omega_\ell} + u_{\ell,j-\omega_\ell})$$

Potência Ativa em função de q e H - I:

- Potência ativa produzida por uma usina hidráulica:

$$P_{H_{i,j}} = K_i \eta_i H_{l_i} q_{i,j}$$

onde

- $P_{H_{i,j}}$: potência ativa gerada pela usina i no intervalo j (MW);
- H_{l_i} : altura líquida de queda da usina i (m);
- $q_{i,j}$: vazão turbinada pela usina i no intervalo j (m^3/s);
- η_i : rendimento do conjunto turbina-gerador da usina i .
- K_i : constante que depende do sist. de unidades, ρ e g , onde:
 - ρ : densidade da água (kg/m^3);
 - g : aceleração da gravidade (m/s^2);

Potência Ativa em função de q e H - I:

- Potência ativa produzida por uma usina hidráulica:

$$P_{H_{i,j}} = K_i \eta_i H_{l_i} q_{i,j}$$

onde

- $P_{H_{i,j}}$: potência ativa gerada pela usina i no intervalo j (MW);
- H_{l_i} : altura líquida de queda da usina i (m);
- $q_{i,j}$: vazão turbinada pela usina i no intervalo j (m^3/s);
- η_i : rendimento do conjunto turbina-gerador da usina i .
- K_i : constante que depende do sist. de unidades, ρ e g , onde:
 - ρ : densidade da água (kg/m^3);
 - g : aceleração da gravidade (m/s^2);

- Altura de queda líquida é dada pela diferença entre a altura de queda bruta e as perdas devidas ao atrito da água:

$$H_{l_i} = H_v(V_{i,j}) - H_w(q_{i,j} + u_{i,j}) - p c_i$$

Potência Ativa em função de q e H - II:

- Define-se a *vazão defluente* como:

$$w_{i,j} \triangleq q_{i,j} + u_{i,j}$$

Potência Ativa em função de q e H - II:

- Define-se a *vazão defluente* como:

$$w_{i,j} \stackrel{\Delta}{=} q_{i,j} + u_{i,j}$$

- Relações entre a *altura a montante e volume*, e *altura a juzante e vazão defluente*:

$$\begin{aligned} H_v(V) &= a_0 + a_1 V + a_2 V^2 + a_3 V^3 + a_4 V^4 \\ H_w(w) &= c_0 + c_1 w + c_2 w^2 + c_3 w^3 + c_4 w^4 \end{aligned}$$

Potência Ativa em função de q e H - II:

- Define-se a *vazão defluente* como:

$$w_{i,j} \stackrel{\Delta}{=} q_{i,j} + u_{i,j}$$

- Relações entre a *altura a montante e volume*, e *altura a juzante e vazão defluente*:

$$\begin{aligned} H_v(V) &= a_0 + a_1 V + a_2 V^2 + a_3 V^3 + a_4 V^4 \\ H_w(w) &= c_0 + c_1 w + c_2 w^2 + c_3 w^3 + c_4 w^4 \end{aligned}$$

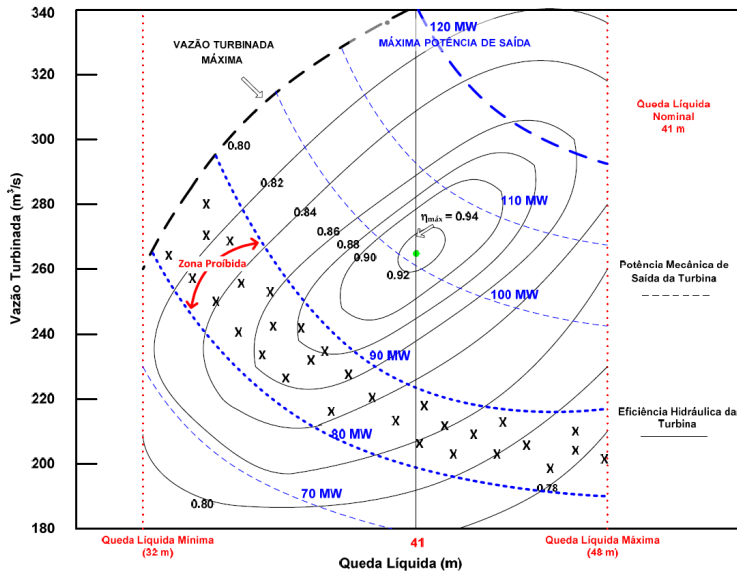
- Finalmente, devem ser considerados os limites das variáveis hidráulicas:

$$\begin{aligned} \underline{V}_i &\leq V_{i,j} \leq \overline{V}_i \\ \underline{q}_j &\leq q_{i,j} \leq \overline{q}_j \\ 0 &\leq u_{i,j} \end{aligned}$$

Variação do Rendimento: curvas-colina

- Em estudos mais detalhados, é importante levar em conta também as variações do rendimento da turbina hidráulica em função
 - da vazão turbinada e
 - da altura de queda líquida.
- Verifica-se que podem ocorrer variações significativas de rendimento quando q e h variam;
- Estes efeitos podem ser considerados a partir das chamadas *curvas-colina*;
- Há ainda a possibilidade da ocorrência de *zonas proibidas* (regiões onde a unidade não deve operar por conta de
 - cavitação,
 - vibrações mecânicas,
 - oscilações de pressão no tubo de sucção, etc.

Exemplo de Curva-Colina



Formulação da Programação H-T com detalhamento das variáveis hidráulicas

$$\min F_T = \sum_{j=1}^{j_{\max}} h_j F(P_{T,j})$$

s. a:

$$\left. \begin{aligned} P_{L,j} + P_{perdas,j} - P_{T,j} - P_{H,j} &= 0 \\ V_{i,j+1} &= V_{i,j} + h_j(r_{i,j} - w_{i,j}) + \sum_{\ell \in \Omega_i} h_j w_{\ell,j} - \omega_{\ell}, \\ &\quad i = 1, n_H \\ \underline{V} &\leq V_j \leq \bar{V} \\ \underline{P}_T &\leq P_{T,j} \leq \bar{P}_T \\ \underline{q}_H &\leq q_{H,j} \leq \bar{q}_H \\ &0 \leq u_j \end{aligned} \right\}, j = 1, \dots, j_{\max}$$

com:

$$P_{H_{i,j}} = K_i H_v(V_{i,j}) - H_w(q_{i,j} + u_{i,j}) - p_{c_i} q_{i,j}$$

V_0 e $V_{j_{\max}}$ especificados.