Fluxo de Potência Ótimo

Antonio Simões Costa

GSP - Labspot

Fluxo de Potência Ótimo

- Formulação generalística para diversos problemas de otimização da operação de Sistemas de Energia Elétrica;
- Características:
  - Formulado como um *problema de otimização*, cuja função-objetivo pode assumir diferentes formas;
  - *Rede elétrica é sempre explicitamente representada.*

Duas Formas Equivalentes para se Interpretar o FPO:

1. Como uma generalização do Despacho Econômico Clássico para permitir a representação explícita da rede elétrica;
2. Como uma generalização de Fluxo de Potência convencional visando promover a otimização de variáveis de controle, tais como as potências geradas.

Despacho Econômico x FPO

- *Despacho Econômico*:
  - Balanço geração-carga expresso como uma única *restrição de igualdade:*

$$P_L + P_{perdas} - \sum P_{g,i} = 0$$

  - Restrições de desigualdade são os limites físicos de geração: $\underline{P}_{g,i} \leq P_{g,i} \leq \overline{P}_{g,i}$
- *Fluxo de Potência Ótimo*:
  - *Restrições de igualdade:* Eqs. de balanço de potência expressas no nível de barra (*1a. Lei de Kirchhoff*);
  - *Rede representada como em estudos de fluxo de potência;*
  - *Restr. de desigualdade:* limites físicos de geração *e transmissão, limites associados à manutenção da segurança do sistema.*

FPO como Generalização do Fluxo de Potência

- *Fluxo de Potência:*
  - Potências ativas das barras de geração (P_g*'s*) *especificadas*, assim como cargas nas barras PQ;
  - Equações da rede resolvidas para satisfazer potências especificadas.
- *FPO:*
  - Ao invés de serem especificadas, P_g*'s* são calculadas para *otimizar uma função-objetivo;*
  - *Equações da rede* especificadas como *restrições de igualdade* a serem satisfeitas na solução;
  - *Limites operativos de equipamentos* especificados como *restrições de desigualdade,* também a serem respeitados na solução.

Generalizações Proporcionadas pelo FPO

- *Múltiplas possibilidades de funções-custo:*
    - Custos de geração;
    - Minimização de perdas;
    - Desvio de geração relativo a um ponto de operação;
    - Despacho de potência reativa;
    - Transferência de potência entre áreas;
    - Ajuste de carga para mínimo alívio de carga, etc.
- Restrições de desigualdade podem modelar outros limites operacionais:
    - Limites físicos de fluxo nos ramos;
    - Limites físicos em dispositivos de controle (taps, defasadores);
    - Limites em variáveis do sistema para garantir segurança da operação.

Vantagens do FPO (I)

- Eqs. de fluxo de pot. resolvidas simultaneamente com minimização dos custos de geração $\Rightarrow$perdas incrementais exatas;
- Todos os limites podem ser incluidos, não apenas os de geração:
  - $\underline{Q} \leq Q \leq \overline{Q}$;
  - $\underline{V} \leq V \leq \overline{V}$;
  - $\underline{t}_{ij} \leq t_{ij} \leq \overline{t}_{ij}$, etc.
- Restrições de segurança podem ser consideradas:

$$\underline{V}_k \leq V_k com\ linha\ i - j fora\ de\ serviço \leq \overline{V}_k$$
$$\underline{t}_{ik} \leq t_{ik} com\ linha\ i - j fora\ de\ serviço \leq \overline{t}_{ik}$$

Vantagens do FPO (II)

- Mais variáveis de controle do que apenas as pots. geradas:
  - Tensões de saída de geradores;
  - Taps de transformadores;
  - Taps de transformadores defasadores;
  - Ajustes de bancos de capac. chaveados;
  - Injeções de potência reativa de CERs;
  - Alívio de carga;
  - Fluxos de pot. em linhas CC.
- Possibilidade de se utilizar diferentes funções-custo.

Aplicações do Fluxo de Potência Ótimo

- Cálculo do despacho ótimo de geração para obter mínimo custo de geração, observadas as limitações da transmissão;
- Despacho de segurança, usando estado corrente da rede ou previsão de carga a curto prazo + restrições de segurança;
- Despacho corretivo: em caso de sobrecarga, pode informar quais ajustes poderão aliviar a emergência;
- A intervalos periódicos, pode achar ajustes ótimos de taps de transformadores, capacitores chaveáveis e CERs para melhorar perfil de tensões;
- Em planejamento da expansão, pode fornecer o máximo carregamento que uma configuração de transmissão prevista pode suportar (Ex.: máxima transferência entre áreas);
- Fornece os custos incrementais *por barra* $\Rightarrow$ permite o cálculo dos custos marginais de potência em qualquer barra do sistema.

$$
\begin{array}{ll}
\min & c(x,u) \\
s.\ a &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rclcl}
g_P(x,u) & = & 0 & \leftarrow & \lambda_P \\
g_Q(x,u) & = & 0 & \leftarrow & \lambda_Q
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcccl}
\underline{p}_g & \leq & p_g & \leq & \overline{p}_g \\
\underline{q}_g & \leq & q_g & \leq & \overline{q}_g \\
\underline{v} & \leq & v & \leq & \overline{v} \\
\underline{t} & \leq & t & \leq & \overline{t}
\end{array}
$$

onde:

x : Variáveis de estado (v, θ)

u : Variáveis de controle

p_g : Potências ativas geradas

q_g : Potências reativas geradas

v : Magnitudes de tensão

t : Fluxos de potência ativa nos ramos

Interpretação dos Multiplicadores de Lagrange para o FPO Não-Linear

- Na formulação não-linear do FPO, surgem $2N$ multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade, sendo:

Interpretação dos Multiplicadores de Lagrange para o FPO Não-Linear

- Na formulação não-linear do FPO, surgem $2N$ multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade, sendo:
  - N multiplicadores de Lagrange associados ao balanço de potência ativa em cada barra, $\boldsymbol{\lambda}_P$ e

Interpretação dos Multiplicadores de Lagrange para o FPO Não-Linear

- Na formulação não-linear do FPO, surgem $2N$ multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade, sendo:
  - N multiplicadores de Lagrange associados ao balanço de potência ativa em cada barra, $\boldsymbol{\lambda}_P$ e
  - N multiplicadores de Lagrange associados às equações nodais de balanço de potência reativa, $\boldsymbol{\lambda}_Q$.

Interpretação dos Multiplicadores de Lagrange para o FPO Não-Linear

- Na formulação não-linear do FPO, surgem $2N$ multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade, sendo:
  - N multiplicadores de Lagrange associados ao balanço de potência ativa em cada barra, $\boldsymbol{\lambda}_P$ e
  - N multiplicadores de Lagrange associados às equações nodais de balanço de potência reativa, $\boldsymbol{\lambda}_Q$.
- O elemento k do vetor $\boldsymbol{\lambda}_P$, $\lambda_{P,k}$, é o custo do próximo megawatt a ser extraído da barra $k \Longrightarrow$ *custo marginal (da potência ativa) para a barra k*;

Interpretação dos Multiplicadores de Lagrange para o FPO Não-Linear

- Na formulação não-linear do FPO, surgem $2N$ multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade, sendo:
    - N multiplicadores de Lagrange associados ao balanço de potência ativa em cada barra, $\boldsymbol{\lambda}_P$ e
    - N multiplicadores de Lagrange associados às equações nodais de balanço de potência reativa, $\boldsymbol{\lambda}_Q$.
- O elemento k do vetor $\boldsymbol{\lambda}_P$, $\lambda_{P,k}$, é o custo do próximo megawatt a ser extraído da barra $k \Longrightarrow$ *custo marginal (da potência ativa) para a barra* k;
- Da mesma forma, $\lambda_{Q,k}$ representa o aumento na função-custo decorrente de um aumento de 1 $MVar$ na carga reativa da barra k;

Interpretação dos Multiplicadores de Lagrange para o FPO Não-Linear

- Na formulação não-linear do FPO, surgem $2N$ multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade, sendo:
  - N multiplicadores de Lagrange associados ao balanço de potência ativa em cada barra, $\boldsymbol{\lambda}_P$ e
  - N multiplicadores de Lagrange associados às equações nodais de balanço de potência reativa, $\boldsymbol{\lambda}_Q$.
- O elemento k do vetor $\boldsymbol{\lambda}_P$, $\lambda_{P,k}$, é o custo do próximo megawatt a ser extraído da barra $k \Longrightarrow$ *custo marginal (da potência ativa) para a barra k*;
- Da mesma forma, $\lambda_{Q,k}$ representa o aumento na função-custo decorrente de um aumento de 1 $MVar$ na carga reativa da barra k;
- O FPO baseado na formulação não-linear é um problema de programação não-linear com restrições não-lineares, cuja solução pode ser obtida através de métodos computacionais específicos.

- Hipóteses básicas:
  - Os módulos das tensões são supostos iguais a $1,0$ *pu* para todas as barras, isto é:

$$|V_i| = 1,0 \; pu, \;\; i = 1, \ldots, N$$

  - As resistências e admitâncias transversais das linhas de transmissão são desprezadas;
  - As aberturas angulares correspondentes aos ramos da rede são supostas pequenas, de modo que

$$\text{sen}\,(\theta_i - \theta_j) \approx (\theta_i - \theta_j) \text{ rads}$$

- Com estas hipóteses, o fluxo de potência ativa t_{ij} na linha $i - j$ é dado por

$$t_{ij} = \gamma_{ij} \left(\theta_i - \theta_j \right)$$

onde a *capacidade do ramo* $i - j$ é definida como

$$\gamma_{ij} \triangleq \frac{1}{x_{ij}}$$

- Com estas hipóteses, o fluxo de potência ativa t_{ij} na linha $i - j$ é dado por

$$t_{ij} = \gamma_{ij} \left(\theta_i - \theta_j \right)$$

onde a *capacidade do ramo* $i - j$ é definida como

$$\gamma_{ij} \triangleq \frac{1}{x_{ij}}$$

- A injeção líquida de potência ativa na barra i é dada por:

$$p_i = \sum_{k \in \Omega_i} t_{ik}$$

onde Ω_i representa o conjunto de barras adjacentes à barra i;

- Com estas hipóteses, o fluxo de potência ativa t_{ij} na linha $i - j$ é dado por

$$t_{ij} = \gamma_{ij}\left(\theta_i - \theta_j\right)$$

onde a *capacidade do ramo* $i - j$ é definida como

$$\gamma_{ij} \triangleq \frac{1}{x_{ij}}$$

- A injeção líquida de potência ativa na barra i é dada por:

$$p_i = \sum_{k \in \Omega_i} t_{ik}$$

onde Ω_i representa o conjunto de barras adjacentes à barra i;

- A injeção p_i pode ser reescrita como:

$$p_i = \sum_{k \in \Omega_i} \gamma_{ik}\left(\theta_i - \theta_k\right) = \sum_{k \in \Omega_i} \gamma_{ik}\,\theta_i - \sum_{k \in \Omega_i} \gamma_{ik}\,\theta_k$$

- A injeção p_i é dada por:

$$p_i = \sum_{k \in \Omega_i} \gamma_{ik} \, (\theta_i - \theta_k) = \sum_{k \in \Omega_i} \gamma_{ik} \, \theta_i - \sum_{k \in \Omega_i} \gamma_{ik} \, \theta_k$$

- A injeção p_i é dada por:

$$p_i = \sum_{k \in \Omega_i} \gamma_{ik} \left(\theta_i - \theta_k\right) = \sum_{k \in \Omega_i} \gamma_{ik}\, \theta_i - \sum_{k \in \Omega_i} \gamma_{ik}\, \theta_k$$

- Definindo a *matriz* **B** *do fluxo de potência linearizado* como:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sum_{k \in \Omega_1} \gamma_{1k} & -\gamma_{12} & -\gamma_{13} & \cdots & -\gamma_{1N} \\ -\gamma_{21} & \sum_{k \in \Omega_2} \gamma_{2k} & -\gamma_{23} & \cdots & -\gamma_{2N} \\ -\gamma_{31} & -\gamma_{32} & \sum_{k \in \Omega_3} \gamma_{3k} & \cdots & -\gamma_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\gamma_{N1} & -\gamma_{N2} & -\gamma_{N3} & \cdots & \sum_{k \in \Omega_N} \gamma_{Nk} \end{bmatrix},$$

- A injeção p_i é dada por:

$$p_i = \sum_{k \in \Omega_i} \gamma_{ik} \left(\theta_i - \theta_k \right) = \sum_{k \in \Omega_i} \gamma_{ik} \, \theta_i - \sum_{k \in \Omega_i} \gamma_{ik} \, \theta_k$$

- Definindo a *matriz* **B** *do fluxo de potência linearizado* como:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sum_{k \in \Omega_1} \gamma_{1k} & -\gamma_{12} & -\gamma_{13} & \cdots & -\gamma_{1N} \\ -\gamma_{21} & \sum_{k \in \Omega_2} \gamma_{2k} & -\gamma_{23} & \cdots & -\gamma_{2N} \\ -\gamma_{31} & -\gamma_{32} & \sum_{k \in \Omega_3} \gamma_{3k} & \cdots & -\gamma_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\gamma_{N1} & -\gamma_{N2} & -\gamma_{N3} & \cdots & \sum_{k \in \Omega_N} \gamma_{Nk} \end{bmatrix},$$

- verifica-se que

$$p_i = B_{ii} \, \theta_i + \sum_{k \in \Omega_i} B_{ik} \, \theta_k$$

- A expressão

$$p_i = B_{ii}\,\theta_i + \sum_{k \in \Omega_i} B_{ik}\,\theta_k$$

- pode ser escrita na forma matricial como:

$$\mathbf{p} = \mathbf{B}\,\boldsymbol{\theta}$$

- A estrutura da matriz **B** é muito similar à da matriz $\mathbf{Y}_{barra}$ (exceto pelo fato de **B** ser real!);

FPO usando Modelo Linearizado para a Rede

Fluxo de Potência "DC" (IV)

- A expressão

$$p_i = B_{ii}\,\theta_i + \sum_{k \in \Omega_i} B_{ik}\,\theta_k$$

- pode ser escrita na forma matricial como:

$$\mathbf{p} = \mathbf{B}\,\boldsymbol{\theta}$$

- A estrutura da matriz **B** é muito similar à da matriz $\mathbf{Y}_{barra}$ (exceto pelo fato de **B** ser real!);
- Além disso:

$$\sum_{j=1}^{N} B_{ij} = 0, \; i = 1, \ldots, N$$
$$\sum_{i=1}^{N} B_{ij} = 0, \; j = 1, \ldots, N$$

- A expressão

$$p_i = B_{ii}\,\theta_i + \sum_{k \in \Omega_i} B_{ik}\,\theta_k$$

- pode ser escrita na forma matricial como:

$$\mathbf{p} = \mathbf{B}\,\boldsymbol{\theta}$$

- A estrutura da matriz **B** é muito similar à da matriz $\mathbf{Y}_{barra}$ (exceto pelo fato de **B** ser real!);
- Além disso:

$$\sum_{j=1}^{N} B_{ij} = 0, \;\; i = 1, \ldots, N$$
$$\sum_{i=1}^{N} B_{ij} = 0, \;\; j = 1, \ldots, N$$

- Portanto, **B** é <u>singular</u>.

Singularidade de B e Barra de Referência (I)

- **B** singular implica em que

Singularidade de B e Barra de Referência (I)

- **B** singular implica em que
  - Equações em $\mathbf{p} = \mathbf{B}\ \boldsymbol{\theta}$ são linearmente dependentes;

Singularidade de B e Barra de Referência (I)

- **B** singular implica em que
  - Equações em $\mathbf{p} = \mathbf{B}\ \boldsymbol{\theta}$ são linearmente dependentes;
  - Portanto, não se qualificam para definir restrições de igualdade do problema de FPO.

Singularidade de B e Barra de Referência (I)

- $\mathbf{B}$ singular implica em que
  - Equações em $\mathbf{p} = \mathbf{B}\ \boldsymbol{\theta}$ são linearmente dependentes;
  - Portanto, não se qualificam para definir restrições de igualdade do problema de FPO.
- Eliminação da redundância obtida definindo-se uma barra r cujo ângulo é considerado referência angular:

$$\theta_r = 0$$

Singularidade de B e Barra de Referência (I)

- **B** singular implica em que
  - Equações em $\mathbf{p} = \mathbf{B}\ \boldsymbol{\theta}$ são linearmente dependentes;
  - Portanto, não se qualificam para definir restrições de igualdade do problema de FPO.
- Eliminação da redundância obtida definindo-se uma barra r cujo ângulo é considerado referência angular:

$$\theta_r = 0$$

- Isto implica em se eliminar a coluna r da matriz **B** (todos os elementos da coluna serão multiplicados por zero).

Singularidade de B e Barra de Referência (II)

- Definimos:

Singularidade de B e Barra de Referência (II)

- Definimos:
  - $\hat{\mathbf{B}}$ como a matriz $N \times (N-1)$ obtida de $\mathbf{B}$ eliminando-se a coluna r, e

Singularidade de B e Barra de Referência (II)

- Definimos:
  - $\hat{\mathbf{B}}$ como a matriz $N \times (N-1)$ obtida de $\mathbf{B}$ eliminando-se a coluna r, e
  - $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ como o vetor $N \times 1$ obtido de $\boldsymbol{\theta}$ pela eliminando-se o elemento r.

Singularidade de B e Barra de Referência (II)

- Definimos:
  - $\hat{\mathbf{B}}$ como a matriz $N \times (N-1)$ obtida de $\mathbf{B}$ eliminando-se a coluna r, e
  - $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ como o vetor $N \times 1$ obtido de $\boldsymbol{\theta}$ pela eliminando-se o elemento r.
- O conjunto de N equações <u>não-redundantes</u> de potências injetadas nas barras é dado por:

$$\hat{\mathbf{B}}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{p}$$

Restrições de Balanço de Potência Ativa (I)

- Para $\hat{\mathbf{B}}\,\hat{\theta} = \mathbf{p}$ se qualificar como restrição de balanço de potência ativa para o FPO, $\mathbf{p}$ tem que ser expresso como função das *potências geradas* e das *potências das cargas* nas barras;

Restrições de Balanço de Potência Ativa (I)

- Para $\hat{\mathbf{B}}\,\hat{\theta} = \mathbf{p}$ se qualificar como restrição de balanço de potência ativa para o FPO, $\mathbf{p}$ tem que ser expresso como função das *potências geradas* e das *potências das cargas* nas barras;
- *Potências geradas:*

Restrições de Balanço de Potência Ativa (I)

- Para $\hat{\mathbf{B}}\,\hat{\theta} = \mathbf{p}$ se qualificar como restrição de balanço de potência ativa para o FPO, $\mathbf{p}$ tem que ser expresso como função das *potências geradas* e das *potências das cargas* nas barras;
- *Potências geradas:*
  - Seja $\mathbf{p}_g \triangleq [p_{g_1}, p_{g_2}, \ldots, p_{g_{n_g}}]^T$ o vetor potências ativas geradas (nas barras de geração);

Restrições de Balanço de Potência Ativa (I)

- Para $\hat{\mathbf{B}}\,\hat{\theta} = \mathbf{p}$ se qualificar como restrição de balanço de potência ativa para o FPO, $\mathbf{p}$ tem que ser expresso como função das *potências geradas* e das *potências das cargas* nas barras;
- *Potências geradas:*
  - Seja $\mathbf{p}_g \triangleq [p_{g_1}, p_{g_2}, \ldots, p_{g_{n_g}}]^T$ o vetor potências ativas geradas (nas barras de geração);
  - Seja a *matriz de incidência barras-geradores*, $\mathbf{A}_g$ $(N \times n_g)$, definida por:

$$\mathbf{A}_g(i,j) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{se o gerador } j \text{ está conectado à barra } i; \\ 0, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

Restrições de Balanço de Potência Ativa (I)

- Para $\hat{\mathbf{B}}\,\hat{\theta} = \mathbf{p}$ se qualificar como restrição de balanço de potência ativa para o FPO, $\mathbf{p}$ tem que ser expresso como função das *potências geradas* e das *potências das cargas* nas barras;
- *Potências geradas:*
  - Seja $\mathbf{p}_g \stackrel{\Delta}{=} [p_{g_1}, p_{g_2}, \ldots, p_{g_{n_g}}]^T$ o vetor potências ativas geradas (nas barras de geração);
  - Seja a *matriz de incidência barras-geradores*, $\mathbf{A}_g$ $(N \times n_g)$, definida por:

$$\mathbf{A}_g(i,j) \stackrel{\Delta}{=} \begin{cases} 1, & \text{se o gerador } j \text{ está conectado à barra } i; \\ 0, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

- O vetor $\mathbf{A}_g\,\mathbf{p}_g$ "aloca" as potências ativas geradas sobre as N barras da rede.

Restrições de Balanço de Potência Ativa (II)

- *Potências das cargas:* seja

$$\mathbf{p}_L = \left[p_{L_1}, p_{L_2}, \ldots, p_{L_N}\right]^T$$

o vetor $N \times 1$ das cargas ativas nas barras do sistema;

Restrições de Balanço de Potência Ativa (II)

- *Potências das cargas:* seja

$$\mathbf{p}_L = [p_{L_1}, p_{L_2}, \ldots, p_{L_N}]^T$$

o vetor $N \times 1$ das cargas ativas nas barras do sistema;

- Com estas definições, vemos que

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}_g \, \mathbf{p}_g - \mathbf{p}_L$$

Restrições de Balanço de Potência Ativa (II)

- *Potências das cargas:* seja

$$\mathbf{p}_L = [p_{L_1}, p_{L_2}, \ldots, p_{L_N}]^T$$

o vetor $N \times 1$ das cargas ativas nas barras do sistema;

- Com estas definições, vemos que

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}_g \, \mathbf{p}_g - \mathbf{p}_L$$

- Portanto, de

$$\hat{\mathbf{B}} \, \hat{\theta} = \mathbf{p}$$

podemos agora escrever a *equação de restrições de balanço de potência ativa* para o problema de FPO linearizado:

$$-\hat{\mathbf{B}} \, \hat{\theta} + \mathbf{A_g} \, \mathbf{p_g} = \mathbf{p}_L$$

Restrições de Limite de Geração

- Os limites máximo e mínimo sobre as potências geradas devem ser considerados como restrições de desigualdade do problema de FPO;

Restrições de Limite de Geração

- Os limites máximo e mínimo sobre as potências geradas devem ser considerados como restrições de desigualdade do problema de FPO;
- Sejam $\overline{\mathbf{p}}_g$ e $\underline{\mathbf{p}}_g$ os vetores que contêm os limites máximos e mínimos de potência gerada para cada gerador do sistema;

Restrições de Limite de Geração

- Os limites máximo e mínimo sobre as potências geradas devem ser considerados como restrições de desigualdade do problema de FPO;
- Sejam $\overline{\mathbf{p}}_g$ e $\underline{\mathbf{p}}_g$ os vetores que contêm os limites máximos e mínimos de potência gerada para cada gerador do sistema;
- As restrições de limite geração são portanto dadas por:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p_g} - \overline{\mathbf{p}}_g &\leq \mathbf{0} \\
-\mathbf{p_g} + \underline{\mathbf{p}}_g &\leq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Restrições de Limite de Fluxo nos Ramos (I)

- Sejam $\bar{t}_{ij}$ e $\underline{t}_{ij}$ os limites máximo e mínimo de fluxo de potência no ramo $i - j$;

Restrições de Limite de Fluxo nos Ramos (I)

- Sejam $\bar{t}_{ij}$ e $\underline{t}_{ij}$ os limites máximo e mínimo de fluxo de potência no ramo $i - j$;
- Na prática, $\underline{t}_{ij} = -\bar{t}_{ij}$, já que o fluxo pode ocorrer em ambos os sentidos sobre o ramo $i - j$;

Restrições de Limite de Fluxo nos Ramos (I)

- Sejam $\bar{t}_{ij}$ e $\underline{t}_{ij}$ os limites máximo e mínimo de fluxo de potência no ramo $i - j$;
- Na prática, $\underline{t}_{ij} = -\bar{t}_{ij}$, já que o fluxo pode ocorrer em ambos os sentidos sobre o ramo $i - j$;
- Restrições de fluxo para o ramo $i - j$:

$$\underline{t}_{ij} \leq t_{ij} \leq \bar{t}_{ij}$$

Restrições de Limite de Fluxo nos Ramos (I)

- Sejam $\bar{t}_{ij}$ e $\underline{t}_{ij}$ os limites máximo e mínimo de fluxo de potência no ramo $i - j$;
- Na prática, $\underline{t}_{ij} = -\bar{t}_{ij}$, já que o fluxo pode ocorrer em ambos os sentidos sobre o ramo $i - j$;
- Restrições de fluxo para o ramo $i - j$:

$$\underline{t}_{ij} \leq t_{ij} \leq \bar{t}_{ij}$$

- ou, em termos das variáveis de estado:

$$\underline{t}_{ij} \leq \gamma_{ij} \left(\theta_i - \theta_j\right) \leq \bar{t}_{ij}$$

Restrições de Limite de Fluxo nos Ramos (I)

- Sejam $\bar{t}_{ij}$ e $\underline{t}_{ij}$ os limites máximo e mínimo de fluxo de potência no ramo $i - j$;
- Na prática, $\underline{t}_{ij} = -\bar{t}_{ij}$, já que o fluxo pode ocorrer em ambos os sentidos sobre o ramo $i - j$;
- Restrições de fluxo para o ramo $i - j$:

$$\underline{t}_{ij} \leq t_{ij} \leq \bar{t}_{ij}$$

- ou, em termos das variáveis de estado:

$$\underline{t}_{ij} \leq \gamma_{ij} \left(\theta_i - \theta_j\right) \leq \bar{t}_{ij}$$

- Forma escalar acima não permite representação sucinta dos limites de fluxo na formulação do FPO.

Restrições de Limite de Fluxo nos Ramos (II)

- *Matriz de incidência ramos-barras* $(n_\ell \times N)$:

$$\mathbf{A}(\ell, i) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{se a barra de origem do elemento } \ell \text{ é a barra } i; \\ -1, & \text{se a barra de chegada do elemento } \ell \text{ é a barra } i; \\ 0, & \text{se o elemento } \ell \text{ não incidir na barra } i. \end{cases}$$

Restrições de Limite de Fluxo nos Ramos (II)

- *Matriz de incidência ramos-barras* $(n_\ell \times N)$:

$$\mathbf{A}(\ell, i) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{se a barra de origem do elemento } \ell \text{ é a barra } i; \\ -1, & \text{se a barra de chegada do elemento } \ell \text{ é a barra } i; \\ 0, & \text{se o elemento } \ell \text{ não incidir na barra } i. \end{cases}$$

- *Matriz de incidência ramos-barras reduzida*, $\hat{\mathbf{A}}$: obtida de $\mathbf{A}$ eliminando-se a coluna correspondente à barra de referência;

Restrições de Limite de Fluxo nos Ramos (II)

- *Matriz de incidência ramos-barras* $(n_\ell \times N)$:

$$\mathbf{A}(\ell, i) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{se a barra de origem do elemento } \ell \text{ é a barra } i; \\ -1, & \text{se a barra de chegada do elemento } \ell \text{ é a barra } i; \\ 0, & \text{se o elemento } \ell \text{ não incidir na barra } i. \end{cases}$$

- *Matriz de incidência ramos-barras reduzida*, $\hat{\mathbf{A}}$: obtida de $\mathbf{A}$ eliminando-se a coluna correspondente à barra de referência;
- *Matriz primitiva das capacidades dos ramos:*

$$\mathbf{T} \triangleq diag\{\gamma_{\ell_1}, \gamma_{\ell_2}, \ldots, \gamma_{\ell_{n_\ell}}\}$$

Restrições de Limite de Fluxo nos Ramos (II)

- *Matriz de incidência ramos-barras* $(n_\ell \times N)$:

$$\mathbf{A}(\ell, i) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{se a barra de origem do elemento } \ell \text{ é a barra } i; \\ -1, & \text{se a barra de chegada do elemento } \ell \text{ é a barra } i; \\ 0, & \text{se o elemento } \ell \text{ não incidir na barra } i. \end{cases}$$

- *Matriz de incidência ramos-barras reduzida*, $\hat{\mathbf{A}}$: obtida de $\mathbf{A}$ eliminando-se a coluna correspondente à barra de referência;
- *Matriz primitiva das capacidades dos ramos:*

$$\mathbf{T} \triangleq diag\{\gamma_{\ell_1}, \gamma_{\ell_2}, \ldots, \gamma_{\ell_{n_\ell}}\}$$

- A partir das definições acima, é fácil verificar que o vetor dos fluxos de potência ativa em todos os ramos da rede é dado por:

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}\,\hat{\mathbf{A}}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Restrições de Limite de Fluxo nos Ramos (III)

- Na forma vetorial, as restrições de limites de fluxo nos ramos são portanto dadas por:

$$\underline{\mathbf{t}} \leq \mathbf{T}\,\hat{\mathbf{A}}\,\hat{\theta} \leq \bar{\mathbf{t}}$$

Restrições de Limite de Fluxo nos Ramos (III)

- Na forma vetorial, as restrições de limites de fluxo nos ramos são portanto dadas por:

$$\underline{\mathbf{t}} \leq \mathbf{T}\,\hat{\mathbf{A}}\,\hat{\theta} \leq \bar{\mathbf{t}}$$

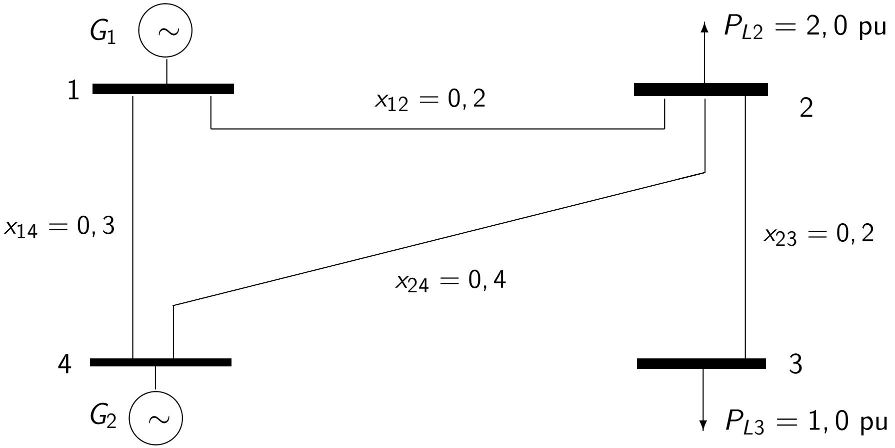
- Ou ainda:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\,\hat{\mathbf{A}}\,\hat{\theta} &\leq \bar{\mathbf{t}} \\ -\mathbf{T}\,\hat{\mathbf{A}}\,\hat{\theta} &\leq -\underline{\mathbf{t}} \end{aligned}$$

Formulação Completa do FPO Linearizado

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Min} & c(\hat{\theta}, \mathbf{p}_g) & & \\
\\
\text{sujeito a:} & -\hat{\mathbf{B}}\,\hat{\theta} + \mathbf{A_g}\,\mathbf{p_g} & = & \mathbf{p}_L \\
\\
& \mathbf{p_g} - \overline{\mathbf{p}}_g & \leq & \mathbf{0} \\
& -\mathbf{p_g} + \underline{\mathbf{p}}_g & \leq & \mathbf{0} \\
\\
& \mathbf{T}\,\hat{\mathbf{A}}\,\hat{\theta} - \overline{\mathbf{t}} & \leq & \mathbf{0} \\
& -\mathbf{T}\,\hat{\mathbf{A}}\,\hat{\theta} + \underline{\mathbf{t}} & \leq & \mathbf{0}
\end{array}
$$

Exemplo 1: Sistema-teste



Dados para Exemplo 1

Dados das funções-custo dos geradores:

Ger.	Curva de Custo, *\$/h (P's em pu)*	$\underline{P}$ (pu)	$\bar{P}$ (pu)
G_1	$c_1(p_{g1}) = 100 + 792\ p_{g1} + 40\ p_{g1}^2$	$0,5$	$2,0$
G_2	$c_2(p_{g2}) = 200 + 785\ p_{g2} + 96\ p_{g2}^2$	$0,3$	$1,5$

As cargas são indicadas na figura e os limites dos ramos são:

Ramo	$1-2$	$1-4$	$2-3$	$2-4$
$\underline{t}\ (pu)$	$-7,0$	$-3,0$	$-7,0$	$-3,0$
$\bar{t}\ (pu)$	$7,0$	$3,0$	$7,0$	$3,0$

Considerando a barra 1 como barra de referência, formule o problema de FPO que minimiza os custos de geração, utilizando modelo linearizado para a rede.

As variáveis de estados e de controle são, respectivamente,

$$\mathbf{x} = \hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{p}_g = \begin{bmatrix} p_{g1} \\ p_{g2} \end{bmatrix}$$

enquanto que as matrizes $\hat{\mathbf{B}}$ e $\mathbf{A}_g$ e o vetor das cargas de barra são:

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -5,0 & 0,0 & -3,33 \\ 12,5 & -5,0 & -2,5 \\ -5,0 & 5,0 & 0,0 \\ -2,5 & 0,0 & 5,83 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ e \ \ \mathbf{p}_L = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,0 \\ 1,0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Solução (II)

Ordenando os ramos como na tabela dos limites de fluxo, temos

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 5,0 & & & \\ & 3,33 & & \\ & & 5,0 & \\ & & & 2,5 \end{bmatrix} \text{ e } \hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e portanto os fluxos de potência ativa nos ramos podem ser obtidos como

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}\,\hat{\mathbf{A}}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} 5,0\ (-\theta_2) \\ 3,33\ (-\theta_4) \\ 5,0\ (\theta_2 - \theta_3) \\ 2,5\ (\theta_2 - \theta_4) \end{bmatrix}$$

Solução (III)

$$\textbf{min} \quad \left(100 + 792\ p_{g1} + 40\ p_{g1}^2\right) + \left(200 + 785\ p_{g2} + 96\ p_{g2}^2\right)$$

s. a

$$-\begin{bmatrix} -5 & 0 & -3,33 \\ 12,5 & -5 & -2,5 \\ -5 & 5 & 0 \\ -2,5 & 0 & 5,83 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{g1} \\ p_{g2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,0 \\ 1,0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_{g1} \\ p_{g2} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2,0 \\ 1,5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -p_{g1} \\ -p_{g2} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -0,5 \\ -0,3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5,0\ (-\theta_2) \\ 3,33\ (-\theta_4) \\ 5,0\ (\theta_2 - \theta_3) \\ 2,5\ (\theta_2 - \theta_4) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 7,0 \\ 3,0 \\ 7,0 \\ 3,0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -5,0\ (-\theta_2) \\ -3,33\ (-\theta_4) \\ -5,0\ (\theta_2 - \theta_3) \\ -2,5\ (\theta_2 - \theta_4) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 7,0 \\ 3,0 \\ 7,0 \\ 3,0 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Min} & c(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{p}_g) & & \\
\\
\text{sujeito a:} & -\hat{\mathbf{B}}\,\hat{\theta} + \mathbf{A_g}\,\mathbf{p_g} & = & \mathbf{p}_L \\
\\
& \mathbf{p_g} - \overline{\mathbf{p}}_g & \leq & \mathbf{0} \\
& -\mathbf{p_g} + \underline{\mathbf{p}}_g & \leq & \mathbf{0} \\
\\
& \mathbf{T}\,\hat{\mathbf{A}}\,\hat{\theta} - \overline{\mathbf{t}} & \leq & \mathbf{0} \\
& -\mathbf{T}\,\hat{\mathbf{A}}\,\hat{\theta} + \underline{\mathbf{t}} & \leq & \mathbf{0}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\widehat{\theta}, \mathbf{p}_g, \lambda, \underline{\pi}_g, \overline{\pi}_g, \underline{\pi}_t, \overline{\pi}_t) \quad = \quad & c(\mathbf{p}_g) + \lambda^T \left(\mathbf{p}_L + \hat{\mathbf{B}}\ \widehat{\theta} - \mathbf{A}_g\ \mathbf{p}_g \right) + \\
& \underline{\pi}_g^T \left(\underline{\mathbf{p}}_g - \mathbf{p}_g \right) + \overline{\pi}_g^T \left(\mathbf{p}_g - \overline{\mathbf{p}}_g \right) + \\
& \underline{\pi}_t^T \left(\underline{\mathbf{t}} - \mathbf{T}\ \hat{\mathbf{A}}\ \widehat{\theta} \right) + \overline{\pi}_t^T \left(\mathbf{T}\ \hat{\mathbf{A}}\ \widehat{\theta} - \overline{\mathbf{t}} \right)
\end{aligned}
$$

Factibilidade dual:

$$\nabla_{\widehat{\theta}}\mathcal{L} = \widehat{\mathbf{B}}^T\lambda - \left[\widehat{\mathbf{A}}\right]^T \mathbf{T}\underline{\pi}_t + \left[\widehat{\mathbf{A}}\right]^T \mathbf{T}\overline{\pi}_t = \mathbf{0}$$

$$\nabla_{\mathbf{p}_g}\mathcal{L} = \nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) - \mathbf{A}_g^T\lambda - \underline{\pi}_g + \overline{\pi}_g = \mathbf{0}$$

Factibilidade Primal:

$$\mathbf{A}_g\mathbf{p}_g - \mathbf{p}_L = \widehat{\mathbf{B}}\widehat{\theta}$$
$$\underline{\mathbf{p}}_g \leq \mathbf{p}_g \leq \overline{\mathbf{p}}_g$$
$$\underline{\mathbf{t}} \leq \mathbf{T}\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\theta} \leq \overline{\mathbf{t}}$$

Folga complementar:

$$diag(\underline{\pi}_g)\left(\underline{\mathbf{p}}_g - \mathbf{p}_g\right) = \mathbf{0}$$
$$diag(\overline{\pi}_g)\left(\mathbf{p}_g - \overline{\mathbf{p}}_g\right) = \mathbf{0}$$
$$diag(\underline{\pi}_t)\left(\underline{\mathbf{t}} - \mathbf{T}\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\theta}\right) = \mathbf{0}$$
$$diag(\overline{\pi}_t)\left(\mathbf{T}\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\theta} - \overline{\mathbf{t}}\right) = \mathbf{0}$$
$$\underline{\pi}_g \geq \mathbf{0}, \quad \overline{\pi}_g \geq \mathbf{0}, \quad \underline{\pi}_t \geq \mathbf{0}, \quad \overline{\pi}_t \geq \mathbf{0}$$

- A condição de factibilidade dual de ângulo fornece:

$$\widehat{\mathbf{B}}^T \lambda - \widehat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} \underline{\pi}_t + \widehat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} \overline{\pi}_t = \mathbf{0}$$

- A condição de factibilidade dual de ângulo fornece:

$$\widehat{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\lambda} - \widehat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} \underline{\boldsymbol{\pi}}_t + \widehat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} \overline{\boldsymbol{\pi}}_t = \mathbf{0}$$

- Como nosso objetivo é analisar o efeito de limites de transmissão sobre $\boldsymbol{\lambda}$, reescrevemos a equação na forma:

$$\widehat{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\lambda} = \widehat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} \left(\underline{\boldsymbol{\pi}}_t - \overline{\boldsymbol{\pi}}_t \right)$$

- A condição de factibilidade dual de ângulo fornece:

$$\widehat{\mathbf{B}}^T\boldsymbol{\lambda} - \widehat{\mathbf{A}}^T\mathbf{T}\underline{\boldsymbol{\pi}}_t + \widehat{\mathbf{A}}^T\mathbf{T}\overline{\boldsymbol{\pi}}_t = \mathbf{0}$$

- Como nosso objetivo é analisar o efeito de limites de transmissão sobre $\boldsymbol{\lambda}$, reescrevemos a equação na forma:

$$\widehat{\mathbf{B}}^T\boldsymbol{\lambda} = \widehat{\mathbf{A}}^T\mathbf{T}\left(\underline{\boldsymbol{\pi}}_t - \overline{\boldsymbol{\pi}}_t\right)$$

- $\widehat{\mathbf{B}}^T$ é retangular $\Longrightarrow$ equação não tem solução imediata;

- A condição de factibilidade dual de ângulo fornece:

$$\widehat{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\lambda} - \widehat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} \underline{\boldsymbol{\pi}}_t + \widehat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} \overline{\boldsymbol{\pi}}_t = \mathbf{0}$$

- Como nosso objetivo é analisar o efeito de limites de transmissão sobre $\boldsymbol{\lambda}$, reescrevemos a equação na forma:

$$\widehat{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\lambda} = \widehat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} \left(\underline{\boldsymbol{\pi}}_t - \overline{\boldsymbol{\pi}}_t \right)$$

- $\widehat{\mathbf{B}}^T$ é retangular $\Longrightarrow$ equação não tem solução imediata;
- Entretanto, se supomos que a barra 1 é a barra de referência, $\widehat{\mathbf{B}}$ pode ser escrito como:

$$\widehat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ - - - \\ \mathbf{B}_{red} \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{b}_1^T$ é a primeira linha de $\widehat{\mathbf{B}}$ e $\mathbf{B}_{red}$ é obtida da matriz $\mathbf{B}$ eliminando-se a *linha e a coluna* da barra de referência.

- O vetor $\boldsymbol{\lambda}$ pode ser particionado correspondentemente:

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ -- \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ -- \\ \boldsymbol{\lambda}_{red} \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad \boldsymbol{\lambda}_{red} = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

- O vetor $\boldsymbol{\lambda}$ pode ser particionado correspondentemente:

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ -- \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ -- \\ \boldsymbol{\lambda}_{red} \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad \boldsymbol{\lambda}_{red} = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

- O lado esquerdo da condição de factibilidade dual de ângulo pode então ser reescrito como:

$$\widehat{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \vdots & \mathbf{B}_{red}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ -- \\ \boldsymbol{\lambda}_{red} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{red}^T \boldsymbol{\lambda}_{red} + \mathbf{b}_1 \lambda_1$$

Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (V)

Condição de factibilidade dual de ângulo (III)

- Considerando que

$$\widehat{\mathbf{B}}^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{B}_{red}^T\boldsymbol{\lambda}_{red} + \mathbf{b}_1\lambda_1,$$

- Considerando que

$$\widehat{\mathbf{B}}^T \lambda = \mathbf{B}_{red}^T \boldsymbol{\lambda}_{red} + \mathbf{b}_1 \lambda_1,$$

- a condição de ângulo previamente deduzida:

$$\widehat{\mathbf{B}}^T \lambda = \widehat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} \left(\underline{\boldsymbol{\pi}}_t - \overline{\boldsymbol{\pi}}_t \right)$$

- Considerando que

$$\widehat{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{B}_{red}^T \boldsymbol{\lambda}_{red} + \mathbf{b}_1 \lambda_1,$$

- a condição de ângulo previamente deduzida:

$$\widehat{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\lambda} = \widehat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} \left(\underline{\boldsymbol{\pi}}_t - \overline{\boldsymbol{\pi}}_t \right)$$

- pode ser reescrita como

$$\mathbf{B}_{red}^T \ \boldsymbol{\lambda}_{red} = -\mathbf{b}_1 \lambda_1 + \widehat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} \left(\underline{\boldsymbol{\pi}}_t - \overline{\boldsymbol{\pi}}_t \right)$$

Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (V)

Condição de factibilidade dual de ângulo (III)

- Considerando que

$$\widehat{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{B}_{red}^T \boldsymbol{\lambda}_{red} + \mathbf{b}_1 \lambda_1,$$

- a condição de ângulo previamente deduzida:

$$\widehat{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\lambda} = \widehat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} \left(\underline{\boldsymbol{\pi}}_t - \overline{\boldsymbol{\pi}}_t \right)$$

- pode ser reescrita como

$$\mathbf{B}_{red}^T \; \boldsymbol{\lambda}_{red} = -\mathbf{b}_1 \lambda_1 + \widehat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} \left(\underline{\boldsymbol{\pi}}_t - \overline{\boldsymbol{\pi}}_t \right)$$

- Pelo fato de $\mathbf{B}_{red}^T$ ser *não-singular*, além de *simétrica*, esta equação pode ser resolvida para $\boldsymbol{\lambda}_{red}$:

$$\boldsymbol{\lambda}_{red} = -\mathbf{B}_{red}^{-1} \; \mathbf{b}_1 \lambda_1 + \mathbf{B}_{red}^{-1} \; \widehat{\mathbf{A}}^T \; \mathbf{T} \left(\underline{\boldsymbol{\pi}}_t - \overline{\boldsymbol{\pi}}_t \right)$$

- O primeiro termo do lado direito da equação anterior

$$-\mathbf{B}_{red}^{-1}\ \mathbf{b}_1\lambda_1,$$

- O primeiro termo do lado direito da equação anterior

$$-\mathbf{B}_{red}^{-1}\ \mathbf{b}_1 \lambda_1,$$

- pode ser simplificado, lembrando que a soma das linhas de $\widehat{\mathbf{B}}$ é igual a zero, isto é,

$$\mathbf{e}_n^T\, \widehat{\mathbf{B}} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & \cdots & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{b}_1^T \\ -\,-\,- \\ \mathbf{B}_{red} \end{array} \right] = 0$$

- O primeiro termo do lado direito da equação anterior

$$-\mathbf{B}_{red}^{-1}\ \mathbf{b}_1 \lambda_1,$$

- pode ser simplificado, lembrando que a soma das linhas de $\widehat{\mathbf{B}}$ é igual a zero, isto é,

$$\mathbf{e}_n^T\,\widehat{\mathbf{B}} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & \cdots & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{b}_1^T \\ ---\\ \mathbf{B}_{red} \end{array}\right] = 0$$

- ou

$$\mathbf{b}_1^T + \mathbf{e}_{n-1}^T \mathbf{B}_{red} = 0,$$

- O primeiro termo do lado direito da equação anterior

$$-\mathbf{B}_{red}^{-1}\,\mathbf{b}_1\lambda_1,$$

- pode ser simplificado, lembrando que a soma das linhas de $\widehat{\mathbf{B}}$ é igual a zero, isto é,

$$\mathbf{e}_n^T\,\widehat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ --- \\ \mathbf{B}_{red} \end{bmatrix} = 0$$

- ou

$$\mathbf{b}_1^T + \mathbf{e}_{n-1}^T\mathbf{B}_{red} = 0,$$

- que fornece

$$-\mathbf{B}_{red}^{-1}\,\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_{n-1}$$

- O primeiro termo do lado direito da equação anterior

$$-\mathbf{B}_{red}^{-1}\ \mathbf{b}_1\lambda_1,$$

- pode ser simplificado, lembrando que a soma das linhas de $\widehat{\mathbf{B}}$ é igual a zero, isto é,

$$\mathbf{e}_n^T\,\widehat{\mathbf{B}} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & \cdots & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \mathbf{b}_1^T \\ ---\\ \mathbf{B}_{red} \end{array}\right] = 0$$

- ou

$$\mathbf{b}_1^T + \mathbf{e}_{n-1}^T\mathbf{B}_{red} = 0,$$

- que fornece

$$-\mathbf{B}_{red}^{-1}\ \mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_{n-1}$$

- Consequentemente,

$$\left(-\mathbf{B}_{red}^{-1}\ \mathbf{b}_1\right)\ \lambda_1 = \lambda_1\mathbf{e}_{n-1}$$

- Usando o resultado anterior, e definindo-se

$$\widetilde{\mathbf{X}} \triangleq \mathbf{B}_{red}^{-1} \;,$$

- Usando o resultado anterior, e definindo-se

$$\widetilde{\mathbf{X}} \triangleq \mathbf{B}_{red}^{-1} \; ,$$

- temos como resultado final:

$$\boldsymbol{\lambda}_{red} = \lambda_1 \mathbf{e}_{n-1} - \widetilde{\mathbf{X}} \; \widehat{\mathbf{A}}^T \; \mathbf{T} \; \left(\overline{\boldsymbol{\pi}}_t - \underline{\boldsymbol{\pi}}_t \right)$$

- Usando o resultado anterior, e definindo-se

$$\widetilde{\mathbf{X}} \triangleq \mathbf{B}_{red}^{-1} \ ,$$

- temos como resultado final:

$$\boldsymbol{\lambda}_{red} = \lambda_1 \mathbf{e}_{n-1} - \widetilde{\mathbf{X}} \ \widehat{\mathbf{A}}^T \ \mathbf{T} \ \left(\overline{\boldsymbol{\pi}}_t - \underline{\boldsymbol{\pi}}_t \right)$$

- Esta equação nos permite analisar o efeito de limites de fluxo atingidos sobre os custos marginais de barra:

Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (VII)

Condição de factibilidade dual de ângulo (V)

- Usando o resultado anterior, e definindo-se

$$\widetilde{\mathbf{X}} \triangleq \mathbf{B}_{red}^{-1} \ ,$$

- temos como resultado final:

$$\boldsymbol{\lambda}_{red} = \lambda_1 \mathbf{e}_{n-1} - \widetilde{\mathbf{X}} \ \widehat{\mathbf{A}}^T \ \mathbf{T} \ (\overline{\boldsymbol{\pi}}_t - \underline{\boldsymbol{\pi}}_t)$$

- Esta equação nos permite analisar o efeito de limites de fluxo atingidos sobre os custos marginais de barra:
  - Se *nenhum limite de fluxo é atingido*, então:

$$\underline{\boldsymbol{\pi}}_t = \overline{\boldsymbol{\pi}}_t = \mathbf{0}.$$

  e *os λ's de todas as barras serão iguais entre si* (e iguais a λ_1);

- Usando o resultado anterior, e definindo-se

$$\widetilde{\mathbf{X}} \triangleq \mathbf{B}_{red}^{-1} \; ,$$

- temos como resultado final:

$$\boldsymbol{\lambda}_{red} = \lambda_1 \mathbf{e}_{n-1} - \widetilde{\mathbf{X}} \; \widehat{\mathbf{A}}^T \; \mathbf{T} \; (\overline{\boldsymbol{\pi}}_t - \underline{\boldsymbol{\pi}}_t)$$

- Esta equação nos permite analisar o efeito de limites de fluxo atingidos sobre os custos marginais de barra:
  - Se *nenhum limite de fluxo é atingido*, então:

    $$\underline{\boldsymbol{\pi}}_t = \overline{\boldsymbol{\pi}}_t = \mathbf{0}.$$

    e *os λ's de todas as barras serão iguais entre si* (e iguais a λ_1);

  - Se *algum* l*imite de fluxo é atingido*, o 2^o termo do lado esquerdo será $\neq 0$, e em geral *os λ's de todas as barras serão distintos.*

- A condição de factibilidade dual de potência é dada por

$$\nabla_{\mathbf{p}_g}\mathcal{L} = \nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) - \mathbf{A}_g^T\ \boldsymbol{\lambda} - \underline{\boldsymbol{\pi}}_g + \overline{\boldsymbol{\pi}}_g = \mathbf{0},$$

Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (VIII)

Condição de factibilidade dual de potência (I)

- A condição de factibilidade dual de potência é dada por

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} \mathcal{L} = \nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) - \mathbf{A}_g^T \, \boldsymbol{\lambda} - \underline{\boldsymbol{\pi}}_g + \overline{\boldsymbol{\pi}}_g = \mathbf{0},$$

- ou

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \mathbf{A}_g^T \, \boldsymbol{\lambda} + \underline{\boldsymbol{\pi}}_g - \overline{\boldsymbol{\pi}}_g$$

- A condição de factibilidade dual de potência é dada por

$$\nabla_{\mathbf{p}_g}\mathcal{L} = \nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) - \mathbf{A}_g^T\ \lambda - \underline{\pi}_g + \overline{\pi}_g = \mathbf{0},$$

- ou

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \mathbf{A}_g^T\ \lambda + \underline{\pi}_g - \overline{\pi}_g$$

- O lado esquerdo da equação representa *os custos incrementais dos geradores do sistema;*

- A condição de factibilidade dual de potência é dada por

$$\nabla_{\mathbf{p}_g}\mathcal{L} = \nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) - \mathbf{A}_g^T\ \boldsymbol{\lambda} - \underline{\boldsymbol{\pi}}_g + \overline{\boldsymbol{\pi}}_g = \mathbf{0},$$

- ou

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \mathbf{A}_g^T\ \boldsymbol{\lambda} + \underline{\boldsymbol{\pi}}_g - \overline{\boldsymbol{\pi}}_g$$

- O lado esquerdo da equação representa *os custos incrementais dos geradores do sistema;*
- Pode-se também verificar que o termo $\mathbf{A}_g^T\ \boldsymbol{\lambda}$ fornece os *custos marginais das barras de geração*, que denotaremos por

$$\boldsymbol{\lambda}_g = \mathbf{A}_g^T\ \boldsymbol{\lambda}$$

- A condição de factibilidade dual de potência é dada por

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} \mathcal{L} = \nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) - \mathbf{A}_g^T \, \boldsymbol{\lambda} - \underline{\boldsymbol{\pi}}_g + \overline{\boldsymbol{\pi}}_g = \mathbf{0},$$

- ou

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \mathbf{A}_g^T \, \boldsymbol{\lambda} + \underline{\boldsymbol{\pi}}_g - \overline{\boldsymbol{\pi}}_g$$

- O lado esquerdo da equação representa *os custos incrementais dos geradores do sistema;*
- Pode-se também verificar que o termo $\mathbf{A}_g^T \, \boldsymbol{\lambda}$ fornece os *custos marginais das barras de geração*, que denotaremos por

$$\boldsymbol{\lambda}_g = \mathbf{A}_g^T \, \boldsymbol{\lambda}$$

- Portanto

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \boldsymbol{\lambda}_g + \underline{\boldsymbol{\pi}}_g - \overline{\boldsymbol{\pi}}_g$$

- A condição de factibilidade dual de potência é reescrita como

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \boldsymbol{\lambda}_g + \underline{\boldsymbol{\pi}}_g - \overline{\boldsymbol{\pi}}_g$$

- A condição de factibilidade dual de potência é reescrita como

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \boldsymbol{\lambda}_g + \underline{\boldsymbol{\pi}}_g - \overline{\boldsymbol{\pi}}_g$$

- Portanto, os *os custos incrementais de geração são iguais aos $\lambda' s$ das barras de geração para aquelas unidades que não atingem seus limites de geração;*

- A condição de factibilidade dual de potência é reescrita como

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \boldsymbol{\lambda}_g + \underline{\boldsymbol{\pi}}_g - \overline{\boldsymbol{\pi}}_g$$

- Portanto, os *os custos incrementais de geração são iguais aos λ's das barras de geração para aquelas unidades que não atingem seus limites de geração;*
- $\boldsymbol{\lambda}_g$ é um subconjunto de $\boldsymbol{\lambda}$, portanto:

- A condição de factibilidade dual de potência é reescrita como

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \boldsymbol{\lambda}_g + \underline{\boldsymbol{\pi}}_g - \overline{\boldsymbol{\pi}}_g$$

- Portanto, os *os custos incrementais de geração são iguais aos $\lambda' s$ das barras de geração para aquelas unidades que não atingem seus limites de geração;*
- $\boldsymbol{\lambda}_g$ é um subconjunto de $\boldsymbol{\lambda}$, portanto:
  - Caso não existam limites ativos de transmissão, aplica-se o resultado anterior e os elementos de $\boldsymbol{\lambda}_g$ serão todos iguais entre si;

Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (IX)

Condição de factibilidade dual de potência (II)

- A condição de factibilidade dual de potência é reescrita como

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \boldsymbol{\lambda}_g + \underline{\boldsymbol{\pi}}_g - \overline{\boldsymbol{\pi}}_g$$

- Portanto, os *os custos incrementais de geração são iguais aos λ's das barras de geração para aquelas unidades que não atingem seus limites de geração;*
- $\boldsymbol{\lambda}_g$ é um subconjunto de $\boldsymbol{\lambda}$, portanto:
    - Caso não existam limites ativos de transmissão, aplica-se o resultado anterior e os elementos de $\boldsymbol{\lambda}_g$ serão todos iguais entre si;
- Logo, *na ausência de congestionamentos de transmissão,* aplicam-se os resultados do Despacho Econômico clássico:

Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (IX)

Condição de factibilidade dual de potência (II)

- A condição de factibilidade dual de potência é reescrita como

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \boldsymbol{\lambda}_g + \underline{\boldsymbol{\pi}}_g - \overline{\boldsymbol{\pi}}_g$$

- Portanto, os *os custos incrementais de geração são iguais aos $\lambda's$ das barras de geração para aquelas unidades que não atingem seus limites de geração;*
- $\boldsymbol{\lambda}_g$ é um subconjunto de $\boldsymbol{\lambda}$, portanto:
  - Caso não existam limites ativos de transmissão, aplica-se o resultado anterior e os elementos de $\boldsymbol{\lambda}_g$ serão todos iguais entre si;
- Logo, *na ausência de congestionamentos de transmissão,* aplicam-se os resultados do Despacho Econômico clássico:
  - geradores *livres* operam com custos incrementais de geração iguais, etc.

Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (X)

Conclusões (I)

- Caso, no resultado do FPO desconsiderando perdas de transmissão *não existam limites ativos de transmissão ou de geração*:

Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (X)

Conclusões (I)

- Caso, no resultado do FPO desconsiderando perdas de transmissão *não existam limites ativos de transmissão ou de geração*:
  - os $\lambda' s$ de todas as barras são iguais entre si e,

Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (X)

Conclusões (I)

- Caso, no resultado do FPO desconsiderando perdas de transmissão *não existam limites ativos de transmissão ou de geração*:
  - os $\lambda' s$ de todas as barras são iguais entre si e,
  - todos geradores estão operando com os mesmos custos incrementais de geração.

- Caso, no resultado do FPO desconsiderando perdas de transmissão *não existam limites ativos de transmissão ou de geração*:
  - os $\lambda' s$ de todas as barras são iguais entre si e,
  - todos geradores estão operando com os mesmos custos incrementais de geração.
  - Em suma, *a condição ótima de operação é a mesma obtida para o caso do despacho econômico clássico* (sem a representação da rede de transmissão).

Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (X)

Conclusões (I)

- Caso, no resultado do FPO desconsiderando perdas de transmissão *não existam limites ativos de transmissão ou de geração*:
  - os $\lambda' s$ de todas as barras são iguais entre si e,
  - todos geradores estão operando com os mesmos custos incrementais de geração.
  - Em suma, *a condição ótima de operação é a mesma obtida para o caso do despacho econômico clássico* (sem a representação da rede de transmissão).
- Caso no despacho ótimo sem perdas, não ocorram limites de fluxo ativos *mas alguns geradores tenham atingido limites máximos ou mínimos:*

Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (X)

Conclusões (I)

- Caso, no resultado do FPO desconsiderando perdas de transmissão *não existam limites ativos de transmissão ou de geração*:
  - os $\lambda' s$ de todas as barras são iguais entre si e,
  - todos geradores estão operando com os mesmos custos incrementais de geração.
  - Em suma, *a condição ótima de operação é a mesma obtida para o caso do despacho econômico clássico* (sem a representação da rede de transmissão).
- Caso no despacho ótimo sem perdas, não ocorram limites de fluxo ativos *mas alguns geradores tenham atingido limites máximos ou mínimos:*
  - os geradores *livres* operam com custos incrementais de geração iguais aos $\lambda' s$ das barras a que estão conectados (que são todos iguais entre si);

Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (XI)

Conclusões (II)

- Ausência de congestionamentos de transmissão mas ocorrência de limites ativos de geração *(cont.)*:

- Ausência de congestionamentos de transmissão mas ocorrência de limites ativos de geração *(cont.)*:
  - Para um gerador k que esteja operando no *limite inferior* temos:

$$\frac{dc_k(p_{g_k})}{dp_{g_k}} = \lambda + \underline{\pi}_k \quad \Longrightarrow \quad \frac{dc_k(p_{g_k})}{dp_{g_k}} > \lambda$$

- Ausência de congestionamentos de transmissão mas ocorrência de limites ativos de geração *(cont.):*
  - Para um gerador k que esteja operando no *limite inferior* temos:

$$\frac{dc_k(p_{g_k})}{dp_{g_k}} = \lambda + \underline{\pi}_k \quad \Longrightarrow \quad \frac{dc_k(p_{g_k})}{dp_{g_k}} > \lambda$$

  - Para um gerador l operando do *limite superior* temos:

$$\frac{dc_l(p_{g_l})}{dp_{g_l}} = \lambda_1 - \overline{\pi}_l \quad \Longrightarrow \quad \frac{dc_k(p_{g_k})}{dp_{g_k}} < \lambda$$

Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (XI)

Conclusões (II)

- Ausência de congestionamentos de transmissão mas ocorrência de limites ativos de geração *(cont.):*
  - Para um gerador k que esteja operando no *limite inferior* temos:

$$\frac{dc_k(p_{g_k})}{dp_{g_k}} = \lambda + \underline{\pi}_k \quad \Longrightarrow \quad \frac{dc_k(p_{g_k})}{dp_{g_k}} > \lambda$$

  - Para um gerador l operando do *limite superior* temos:

$$\frac{dc_l(p_{g_l})}{dp_{g_l}} = \lambda_1 - \overline{\pi}_l \quad \Longrightarrow \quad \frac{dc_k(p_{g_k})}{dp_{g_k}} < \lambda$$

- Quando um *limite de transmissão* for atingido, os custos marginais das barras tornam-se em geral diferentes entre si.

No caso em que *limites de transmissão* são atingidos, aplicam-se as *condições de factibilidade dual*:

- Relação entre custos incrementais de geração e custos marginais de barra:

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \boldsymbol{\lambda}_g + \underline{\boldsymbol{\pi}}_g - \overline{\boldsymbol{\pi}}_g$$

No caso em que *limites de transmissão* são atingidos, aplicam-se as *condições de factibilidade dual*:

- Relação entre custos incrementais de geração e custos marginais de barra:

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \boldsymbol{\lambda}_g + \underline{\boldsymbol{\pi}}_g - \overline{\boldsymbol{\pi}}_g$$

- Relação entre custos marginais de barra e multiplicadores de Lagrange associados aos limites:

$$\boldsymbol{\lambda}_{red} = \lambda_1 \mathbf{e}_{n-1} - \widetilde{\mathbf{X}}\ \widehat{\mathbf{A}}^T\ \mathbf{T}\ (\overline{\boldsymbol{\pi}}_t - \underline{\boldsymbol{\pi}}_t)$$

No caso em que *limites de transmissão* são atingidos, aplicam-se as *condições de factibilidade dual*:

- Relação entre custos incrementais de geração e custos marginais de barra:

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \boldsymbol{\lambda}_g + \underline{\boldsymbol{\pi}}_g - \overline{\boldsymbol{\pi}}_g$$

- Relação entre custos marginais de barra e multiplicadores de Lagrange associados aos limites:

$$\boldsymbol{\lambda}_{red} = \lambda_1 \mathbf{e}_{n-1} - \widetilde{\mathbf{X}}\ \widehat{\mathbf{A}}^T\ \mathbf{T}\ (\overline{\boldsymbol{\pi}}_t - \underline{\boldsymbol{\pi}}_t)$$

- Esta última equação pode ser bastante simplificada, como descrito a seguir.

Custos Marginais de Barra na Presença de Congestionamentos na Rede (I)

- Se o fluxo de potência no ramo $\ell = (k, m)$ atinge o limite superior, então:

$$\underline{\boldsymbol{\pi}}_t = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \overline{\boldsymbol{\pi}}_t = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \overline{\pi}_{t_\ell} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} (\longleftarrow \text{posição } \ell) = \overline{\pi}_{t_\ell} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Custos Marginais de Barra na Presença de Congestionamentos na Rede (I)

- Se o fluxo de potência no ramo $\ell = (k, m)$ atinge o limite superior, então:

$$\underline{\boldsymbol{\pi}}_t = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \overline{\boldsymbol{\pi}}_t = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \overline{\pi}_{t_\ell} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} (\longleftarrow \text{posição } \ell) = \overline{\pi}_{t_\ell} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Definindo

$$\mathbf{w}_\ell = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T,$$

o segundo termo do lado direito da equação de $\boldsymbol{\lambda}_{red}$ torna-se portanto:

$$\widetilde{\mathbf{X}}\ \widehat{\mathbf{A}}^T\ \mathbf{T}\ (\overline{\boldsymbol{\pi}}_t - \underline{\boldsymbol{\pi}}_t) = \overline{\pi}_{t_\ell}\ \widetilde{\mathbf{X}}\ \widehat{\mathbf{A}}^T\ \mathbf{T}\ \mathbf{w}_\ell = \gamma_\ell \overline{\pi}_{t_\ell}\ \widetilde{\mathbf{X}}\ \widehat{\mathbf{A}}^T\ \mathbf{w}_\ell$$

Custos Marginais de Barra na Presença de Congestionamentos na Rede (II)

- O produto $\widehat{\mathbf{A}}^T\ \mathbf{w}_\ell$ fornece a ℓ-*ésima* coluna de $\widehat{\mathbf{A}}^T$ (ou a ℓ-ésima *linha* de $\widehat{\mathbf{A}}$), que possui apenas dois elementos não nulos: $+1$, na posição k e -1 na posição m :

$$\widehat{\mathbf{A}}^T\ \mathbf{w}_\ell \;=\; \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & \cdots & +1 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \end{array}\right]^T \\ \begin{array}{ccccccc} & & (k) & & & (m) & & \end{array} \end{array} \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{w}_{km}$$

Custos Marginais de Barra na Presença de Congestionamentos na Rede (II)

- O produto $\widehat{\mathbf{A}}^T\ \mathbf{w}_\ell$ fornece a ℓ-*ésima* coluna de $\widehat{\mathbf{A}}^T$ (ou a ℓ-ésima *linha* de $\widehat{\mathbf{A}}$), que possui apenas dois elementos não nulos: $+1$, na posição k e -1 na posição m :

$$\widehat{\mathbf{A}}^T\ \mathbf{w}_\ell \;=\; \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & \cdots & \underset{(k)}{+1} & \cdots & 0 & \underset{(m)}{-1} & \cdots & 0 \end{array}\right]^T \;\triangleq\; \mathbf{w}_{km}$$

- Logo, o produto $\widetilde{\mathbf{X}}\ \widehat{\mathbf{A}}^T\ \mathbf{w}_\ell$ será igual a

$$\widetilde{\mathbf{X}}\ \widehat{\mathbf{A}}^T\ \mathbf{w}_\ell = \widetilde{\mathbf{X}}\ \mathbf{w}_{km} = \tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_m$$

onde $\tilde{\mathbf{x}}_k$ e $\tilde{\mathbf{x}}_m$ são as colunas da matriz $\widetilde{\mathbf{X}} = \mathbf{B}_{red}^{-1}$ correspondentes às barras k e m.

Custos Marginais de Barra na Presença de Congestionamentos na Rede (III)

- Portanto, no caso de apenas o ramo $\ell = (k, m)$ atingir o limite superior, então

$$\widetilde{\mathbf{X}}\ \widehat{\mathbf{A}}^T\ \mathbf{T}\ \left(\overline{\boldsymbol{\pi}}_t - \underline{\boldsymbol{\pi}}_t\right) = \gamma_\ell \overline{\pi}_{t_\ell}\ \left(\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_m\right)$$

Custos Marginais de Barra na Presença de Congestionamentos na Rede (III)

- Portanto, no caso de apenas o ramo $\ell = (k, m)$ atingir o limite superior, então

$$\widetilde{\mathbf{X}}\ \widehat{\mathbf{A}}^T\ \mathbf{T}\ \left(\overline{\boldsymbol{\pi}}_t - \underline{\boldsymbol{\pi}}_t\right) = \gamma_\ell \overline{\pi}_{t_\ell}\ \left(\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_m\right)$$

- Finalmente, a equação original para $\boldsymbol{\lambda}_{red}$

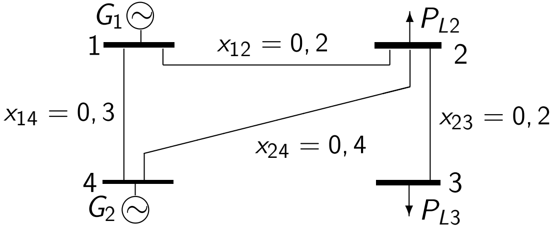
$$\boldsymbol{\lambda}_{red} = \lambda_1 \mathbf{e}_{n-1} - \widetilde{\mathbf{X}}\ \widehat{\mathbf{A}}^T\ \mathbf{T}\ \left(\overline{\boldsymbol{\pi}}_t - \underline{\boldsymbol{\pi}}_t\right),$$

pode ser simplificada para:

$$\boldsymbol{\lambda}_{red} = \lambda_1 \mathbf{e}_{n-1} - \gamma_\ell \overline{\pi}_{t_\ell}\ \left(\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_m\right)$$

Exemplo 2

Reconsidere o sistema de potência de 4 barras e 4 linhas do Exemplo 1:



Os dados das funções-custo dos geradores e as cargas neste caso são:

Ger.	Curva de Custo, *\$/h (P's em MW)*	$\underline{P}$ (MW)	$\bar{P}$ (MW)
G_1	$c_1(P_1) = 7,92\ P_1 + 0,00241\ P_1^2$	10	700
G_2	$c_2(P_2) = 7,00\ P_2 + 0,00075\ P_2^2$	10	700

,

$$P_{L2} = 150\ MW \quad \text{e} \quad P_{L3} = 100\ MW$$

Os limites de transmissão são os mesmos do Exemplo 1.

Resultados do FPO para Exemplo 2: Fluxos nos Ramos

ramo	de	para	t	π_t	$\overline{t}$	$\underline{t}$
1	1	2	114,44	**0,0**	700,00	-700,00
2	1	4	-104,43	**0,0**	300,00	-300,00
1	2	1	-114,44	**0,0**	700,00	-700,00
3	2	3	100,00	**0,0**	700,00	-700,00
4	2	4	-135,56	**0,0**	300,00	-300,00
3	3	2	-100,00	**0,0**	700,00	-700,00
2	4	1	104,43	**0,0**	300,00	-300,00
4	4	2	135,56	**0,0**	300,00	-300,00

Resultados do FPO para Exemplo 2: Variáveis de Barra

Barra	$\|V\|$	θ	λ	p_g	$\overline{p}_g$	$\underline{p}_g$	π_g	p_L
1	1,0	0,00	**7,360**	**10,00**	700,00	10,00	**0,61**	0,0
2	1,0	-13,11	**7,360**				**0,00**	150,0
3	1,0	-24,57	**7,360**				**0,00**	100,0
4	1,0	17,95	**7,360**	**240,00**	700,00	10,00	**0,00**	0,0

Custo ótimo de produção $= 1802,64\ \$/h$

Conclusões sobre Exemplo 2

- Da tabela de fluxos nos ramos, constata-se que não ocorrem congestionamentos de transmissão, pois todos os multiplicadores π_t são nulos;

Conclusões sobre Exemplo 2

- Da tabela de fluxos nos ramos, constata-se que não ocorrem congestionamentos de transmissão, pois todos os multiplicadores π_t são nulos;
- Da tabela de variáveis de barra, vê-se que os custos marginais de barra são todos iguais (a $7,36$ $\$/MWh$),conforme seria de se esperar quando não há congestionamentos;

Conclusões sobre Exemplo 2

- Da tabela de fluxos nos ramos, constata-se que não ocorrem congestionamentos de transmissão, pois todos os multiplicadores π_t são nulos;
- Da tabela de variáveis de barra, vê-se que os custos marginais de barra são todos iguais (a $7,36\ \$/MWh$),conforme seria de se esperar quando não há congestionamentos;
- Os despachos ótimos dos geradores também são esperados, já que o gerador 1 é claramente mais caro que o gerador 2. Estes despachos, assim como o valor de λ, podem ser obtidos (neste caso sem congestionamento) via DE clássico em barra única;

Conclusões sobre Exemplo 2

- Da tabela de fluxos nos ramos, constata-se que não ocorrem congestionamentos de transmissão, pois todos os multiplicadores π_t são nulos;
- Da tabela de variáveis de barra, vê-se que os custos marginais de barra são todos iguais (a $7,36\ \$/MWh$),conforme seria de se esperar quando não há congestionamentos;
- Os despachos ótimos dos geradores também são esperados, já que o gerador 1 é claramente mais caro que o gerador 2. Estes despachos, assim como o valor de λ, podem ser obtidos (neste caso sem congestionamento) via DE clássico em barra única;
- É possivel também verificar a validade da equação que relaciona λ, os custos marginais de barra e os multiplicadores de Lagrange π_g.

Exemplo 3

Para o mesmo sistema de potência do Exemplo 2, suponha agora que o limite de transmissão do ramo $2-4$, anteriormente estabelecido em $300\ MW$, é reduzido para $130\ MW$. Interprete os resultados de um estudo de FPO executado para o sistema nestas novas condições.

Resultados do FPO para Exemplo 3: Fluxos nos Ramos

ramo	de	para	t	π_t	$\overline{t}$	$\underline{t}$
1	1	2	120,00	**0,00**	700,00	-700,00
2	1	4	-93,32	**0,00**	300,00	-300,00
1	2	1	-120,00	**0,00**	700,00	-700,00
3	2	3	100,00	**0,00**	700,00	-700,00
4	2	4	-130,00	**2,14**	130,00	-130,00
3	3	2	-100,00	**0,00**	700,00	-700,00
2	4	1	93,32	**0,00**	300,00	-300,00
4	4	2	130,00	**0,00**	130,00	-130,00

Resultados do FPO para Exemplo 3: Variáveis de Barra

Barra	$\|V\|$	θ	λ	p_g	$\overline{p}_g$	$\underline{p}_g$	π_g	p_L
1	1,0	0,00	**8,049**	**26,67**	700,00	10,00	**0,0**	0,0
2	1,0	-13,75	**8,524**				**0,0**	150,0
3	1,0	-25,21	**8,523**				**0,0**	100,0
4	1,0	16,04	**7,335**	**223,33**	700,00	10,00	**0,0**	0,0
Custo ótimo de produção $= 1813,65\ \$/h$								

Conclusões sobre Exemplo 3 (I)

- Da tabela dos fluxos nos ramos, verificamos que o multiplicador de Lagrange para o ramo $2-4$ é diferente de zero, indicando a ocorrência de congestionamento. De fato, valor do fluxo de potência no sentido da barra 4 para a barra 2 atinge o limite de 130 MW;

Conclusões sobre Exemplo 3 (I)

- Da tabela dos fluxos nos ramos, verificamos que o multiplicador de Lagrange para o ramo $2-4$ é diferente de zero, indicando a ocorrência de congestionamento. De fato, valor do fluxo de potência no sentido da barra 4 para a barra 2 atinge o limite de 130 MW;
- Da Tabela de variáveis de barra, vê-se que, em conseqüência do congestionamento, os custos marginais de barra são agora distintos entre si;

Conclusões sobre Exemplo 3 (I)

- Da tabela dos fluxos nos ramos, verificamos que o multiplicador de Lagrange para o ramo $2-4$ é diferente de zero, indicando a ocorrência de congestionamento. De fato, valor do fluxo de potência no sentido da barra 4 para a barra 2 atinge o limite de 130 MW;
- Da Tabela de variáveis de barra, vê-se que, em conseqüência do congestionamento, os custos marginais de barra são agora distintos entre si;
- Outro resultado do congestionamento é que o despacho ótimo sofre um desvio significativo em relação ao do Exemplo 2, que se traduz pelo descolamento da potência gerada pelo gerador 1 de seu limite inferior;

Conclusões sobre Exemplo 3 (I)

- Da tabela dos fluxos nos ramos, verificamos que o multiplicador de Lagrange para o ramo $2-4$ é diferente de zero, indicando a ocorrência de congestionamento. De fato, valor do fluxo de potência no sentido da barra 4 para a barra 2 atinge o limite de 130 MW;
- Da Tabela de variáveis de barra, vê-se que, em conseqüência do congestionamento, os custos marginais de barra são agora distintos entre si;
- Outro resultado do congestionamento é que o despacho ótimo sofre um desvio significativo em relação ao do Exemplo 2, que se traduz pelo descolamento da potência gerada pelo gerador 1 de seu limite inferior;
- O desvio das potências geradas em relação às do Exemplo 2 produz um aumento no custo de geração, de $1802,64\ \$/h$ para $1813,65\ \$/h$;

Conclusões sobre Exemplo 3 (I)

- Da tabela dos fluxos nos ramos, verificamos que o multiplicador de Lagrange para o ramo $2-4$ é diferente de zero, indicando a ocorrência de congestionamento. De fato, valor do fluxo de potência no sentido da barra 4 para a barra 2 atinge o limite de 130 MW;
- Da Tabela de variáveis de barra, vê-se que, em conseqüência do congestionamento, os custos marginais de barra são agora distintos entre si;
- Outro resultado do congestionamento é que o despacho ótimo sofre um desvio significativo em relação ao do Exemplo 2, que se traduz pelo descolamento da potência gerada pelo gerador 1 de seu limite inferior;
- O desvio das potências geradas em relação às do Exemplo 2 produz um aumento no custo de geração, de $1802,64\ \$/h$ para $1813,65\ \$/h$;
- Os resultados obtidos podem ser confirmados pela aplicação das condições de factibilidade dual.

Verificação dos Resultados (I)

- Para aplicar a condição de ângulo, considere que:

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -5,0 & 0,0 & -3,33 \\ 12,5 & -5,0 & -2,5 \\ -5,0 & 5,0 & 0,0 \\ -2,5 & 0,0 & 5,83 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}_{red} = \begin{bmatrix} 12,5 & -5,0 & -2,5 \\ -5,0 & 5,0 & 0,0 \\ -2,5 & 0,0 & 5,83 \end{bmatrix}$$

e portanto

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{B}_{red}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,1556 & 0,1556 & 0,0667 \\ 0,1556 & 0,3556 & 0,0667 \\ 0,0667 & 0,0667 & 0,2000 \end{bmatrix}$$

Verificação dos Resultados (I)

- Para aplicar a condição de ângulo, considere que:

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -5,0 & 0,0 & -3,33 \\ 12,5 & -5,0 & -2,5 \\ -5,0 & 5,0 & 0,0 \\ -2,5 & 0,0 & 5,83 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}_{red} = \begin{bmatrix} 12,5 & -5,0 & -2,5 \\ -5,0 & 5,0 & 0,0 \\ -2,5 & 0,0 & 5,83 \end{bmatrix}$$

e portanto

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{B}_{red}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,1556 & 0,1556 & 0,0667 \\ 0,1556 & 0,3556 & 0,0667 \\ 0,0667 & 0,0667 & 0,2000 \end{bmatrix}$$

- Além disso:

$$\gamma_{2-4} = 2,5 \ pu$$

Verificação dos Resultados (I)

- Para aplicar a condição de ângulo, considere que:

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -5,0 & 0,0 & -3,33 \\ 12,5 & -5,0 & -2,5 \\ -5,0 & 5,0 & 0,0 \\ -2,5 & 0,0 & 5,83 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}_{red} = \begin{bmatrix} 12,5 & -5,0 & -2,5 \\ -5,0 & 5,0 & 0,0 \\ -2,5 & 0,0 & 5,83 \end{bmatrix}$$

  e portanto

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{B}_{red}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,1556 & 0,1556 & 0,0667 \\ 0,1556 & 0,3556 & 0,0667 \\ 0,0667 & 0,0667 & 0,2000 \end{bmatrix}$$

- Além disso:

$$\gamma_{2-4} = 2,5 \; pu$$

- e, dos resultados do FPO:

$$\lambda_1 = 8,049 \; \$/MWh \qquad \underline{\pi}_{2-4} = 2,14 \; \$/MWh$$

Verificação dos Resultados (II)

- A *condição de factibilidade de ângulo* neste caso é (observe que o limite de transmissão atingido é o inferior!):

$$\boldsymbol{\lambda}_{red} = \lambda_1 \mathbf{e}_3 + \gamma_{2-4} \; \underline{\pi}_{t_{2-4}} \; (\tilde{\mathbf{x}}_2 - \tilde{\mathbf{x}}_4)$$

Verificação dos Resultados (II)

- A *condição de factibilidade de ângulo* neste caso é (observe que o limite de transmissão atingido é o inferior!):

$$\boldsymbol{\lambda}_{red} = \lambda_1 \mathbf{e}_3 + \gamma_{2-4} \; \underline{\pi}_{t_{2-4}} \; (\tilde{\mathbf{x}}_2 - \tilde{\mathbf{x}}_4)$$

- Lembrando a associação das colunas de $\tilde{\mathbf{X}}$ com os índices de barra:

$$\begin{array}{ccc} (2) & (3) & (4) \\ \multicolumn{3}{c}{\left[\begin{array}{ccc} 0,1556 & 0,1556 & 0,0667 \\ 0,1556 & 0,3556 & 0,0667 \\ 0,0667 & 0,0667 & 0,2000 \end{array}\right]} \end{array}$$

Verificação dos Resultados (II)

- A *condição de factibilidade de ângulo* neste caso é (observe que o limite de transmissão atingido é o inferior!):

$$\boldsymbol{\lambda}_{red} = \lambda_1 \mathbf{e}_3 + \gamma_{2-4}\ \underline{\pi}_{t_{2-4}}\ (\tilde{\mathbf{x}}_2 - \tilde{\mathbf{x}}_4)$$

- Lembrando a associação das colunas de $\tilde{\mathbf{X}}$ com os índices de barra:

$$\begin{array}{ccc} (2) & (3) & (4) \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc} 0,1556 & 0,1556 & 0,0667 \\ 0,1556 & 0,3556 & 0,0667 \\ 0,0667 & 0,0667 & 0,2000 \end{array}\right]$$

- temos finalmente que

$$\boldsymbol{\lambda}_{red} = 8,049 \times \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right] + 2,5 \times 2,14 \times \left(\left[\begin{array}{c} 0,1556 \\ 0,1556 \\ 0,0667 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c} 0,0667 \\ 0,0667 \\ 0,2000 \end{array}\right] \right)$$

ou

$$\boldsymbol{\lambda}_{red} = \left[\begin{array}{ccc} 8,524 & 8,524 & 7,335 \end{array}\right]^T$$

Verificação dos Resultados (III)

- Quanto à condição de factibilidade dual de potência:

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \boldsymbol{\lambda}_g + \underline{\boldsymbol{\pi}}_g - \overline{\boldsymbol{\pi}}_g$$

verificamos que:

Verificação dos Resultados (III)

- Quanto à condição de factibilidade dual de potência:

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \boldsymbol{\lambda}_g + \underline{\boldsymbol{\pi}}_g - \overline{\boldsymbol{\pi}}_g$$

verificamos que:

- O gerador 1 opera livremente na solução, portanto

$$\frac{dc(p_{g1})}{dp_{g1}} = \boldsymbol{\lambda}_{g1} = \lambda_1 = 8,049$$

Verificação dos Resultados (III)

- Quanto à condição de factibilidade dual de potência:

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \boldsymbol{\lambda}_g + \underline{\boldsymbol{\pi}}_g - \overline{\boldsymbol{\pi}}_g$$

verificamos que:

- O gerador 1 opera livremente na solução, portanto

$$\frac{dc(p_{g1})}{dp_{g1}} = \boldsymbol{\lambda}_{g1} = \lambda_1 = 8,049$$

- De fato

$$\frac{dc(p_{g1})}{dp_{g1}} = 7,92 + 2 \times 0,00241 \times 26,67 = 8,049$$

Verificação dos Resultados (III)

- Quanto à condição de factibilidade dual de potência:

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \boldsymbol{\lambda}_g + \underline{\boldsymbol{\pi}}_g - \overline{\boldsymbol{\pi}}_g$$

verificamos que:

- O gerador 1 opera livremente na solução, portanto

$$\frac{dc(p_{g1})}{dp_{g1}} = \boldsymbol{\lambda}_{g1} = \lambda_1 = 8,049$$

- De fato

$$\frac{dc(p_{g1})}{dp_{g1}} = 7,92 + 2 \times 0,00241 \times 26,67 = 8,049$$

- Conclusão similar se aplica ao gerador 2 (verifique!).

- O CMS é definido como

$$CMS = \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_L^{Total}}$$

Custo Marginal do Sistema - CMS (I)

- O *CMS* é definido como

$$CMS = \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_L^{Total}}$$

- Usando a regra da cadeia para derivação, podemos escrever

$$CMS = \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_{L_1}} \times \frac{dP_{L_1}}{dP_L^{Total}} + \cdots + \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_{L_N}} \times \frac{dP_{L_N}}{dP_L^{Total}}$$

- O *CMS* é definido como

$$CMS = \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_L^{Total}}$$

- Usando a regra da cadeia para derivação, podemos escrever

$$CMS = \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_{L_1}} \times \frac{dP_{L_1}}{dP_L^{Total}} + \cdots + \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_{L_N}} \times \frac{dP_{L_N}}{dP_L^{Total}}$$

- Supondo que

$$\begin{aligned} P_{L_1} &= k_1 P_L^{Total} \\ P_{L_2} &= k_2 P_L^{Total} \\ &\vdots \\ P_{L_n} &= k_n P_L^{Total} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \frac{dP_{L_i}}{dP_L^{Total}} = k_i, \quad \text{onde} \sum_{i=1}^{n} k_i = 1$$

- Logo

$$CMS = k_1 \times \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_{L_1}} + k_2 \times \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_{L_2}} + \cdots + k_N \times \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_{L_N}}$$

Custo Marginal do Sistema - CMS (II)

- Logo

$$CMS = k_1 \times \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_{L_1}} + k_2 \times \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_{L_2}} + \cdots + k_N \times \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_{L_N}}$$

- ou

$$CMS = k_1 \ \lambda_1 + k_2 \ \lambda_2 + \cdots + k_N \ \lambda_N$$

Custo Marginal do Sistema - CMS (II)

- Logo

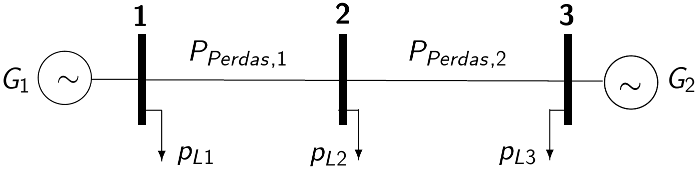
$$CMS = k_1 \times \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_{L_1}} + k_2 \times \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_{L_2}} + \cdots + k_N \times \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_{L_N}}$$

- ou

$$CMS = k_1 \ \lambda_1 + k_2 \ \lambda_2 + \cdots + k_N \ \lambda_N$$

- Caso nenhum limite de fluxo nos ramos tenha sido atingido, então $\lambda_i = \lambda_1, i = 1, \cdots, n-1$ e portanto

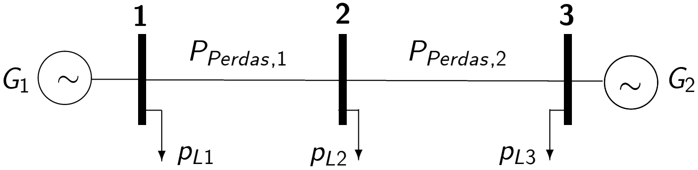
$$CMS = \lambda_1 \left(k_1 + k_2 + \cdots + k_n\right) = \lambda_1$$



$$c_2(p_{g2}) \gg c_1(p_{g1})$$

a) Perdas ≈ 0 e ausência de congestionamento:

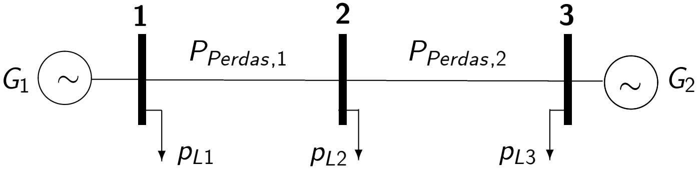
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$$



$$c_2(p_{g2}) \gg c_1(p_{g1})$$

b) Perdas $\neq 0$ e ausência de congestionamento

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$$



$$c_2(p_{g2}) \gg c_1(p_{g1})$$

c) Perdas $\neq 0$ e congestionamento no ramo $1-2$

$$\lambda_2 > \lambda_3 \gg \lambda_1$$