Formulação do FPO usando Modelo Linearizado para as Equações da Rede Elétrica

1. Formulação Não-Linear Genérica

A formulação não-linear genérica do problema de FPO para um sistema de potência de N barras é:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & c(x,u) \\ \text{sujeito a:} & g_P(x,u) = 0 \\ & g_Q(x,u) = 0 \\ & f(x,u) \leq 0 \end{array}$$

onde:

x	:	Vetor $2N \times 1$ de variáveis de estado;
u	:	Vetor $n_u \times 1$ de variáveis de controle;
$c(x,u)$	:	Função-objetivo;
$g_P(x,u)$	:	Função vetorial não-linear $N \times 1$ de restrições de balanço de potência ativa;
$g_Q(x,u)$	:	Função vetorial não-linear $N \times 1$ de restrições de balanço de potência reativa;
$f(x,u)$	:	Função vetorial não-linear $n_d \times 1$ de restrições de desigualdade.

2. Formulação usando Modelo Linearizado

Estamos interessados em particularizar a formulação da seção anterior para o caso em que um modelo linear para a rede elétrica é utilizado. Para tal, reveremos inicialmente o problema de fluxo de potência linearizado ("DC").

2.1. Fluxo de Potência DC

As hipóteses básicas do fluxo de potência DC são:

1. Os módulos das tensões são supostos iguais a $1,0\ pu$ para todas as barras, isto é:
$$|V_i| = 1,0\,pu,\ i = 1,\ldots,N \tag{2.1}$$
2. As resistências e admitâncias transversais das linhas de transmissão são desprezadas;

3. As aberturas angulares correspondentes aos ramos da rede são supostas pequenas, de modo que

$$\operatorname{sen}(\theta_i - \theta_j) \approx (\theta_i - \theta_j) \text{ rads} \tag{2.2}$$

Com estas hipóteses, o fluxo de potência ativa t_{ij}na linha $i - j$ é dado por

$$t_{ij} = \gamma_{ij}(\theta_i - \theta_j) \tag{2.3}$$

onde definimos a *capacidade do ramo* $i - j$ como

$$\gamma_{ij} \triangleq \frac{1}{x_{ij}} \tag{2.4}$$

com Se Ω_i representa o conjunto de barras adjacentes à barra i, a injeção líquida de potência ativa nesta barra é dada pela soma dos fluxos que emanam da barra i, isto é:

$$p_i = \sum_{k \in \Omega_i} t_{ik}$$

ou seja,

$$p_i = \sum_{k \in \Omega_i} \gamma_{ik}(\theta_i - \theta_k) = \sum_{k \in \Omega_i} \gamma_{ik}\,\theta_i - \sum_{k \in \Omega_i} \gamma_{ik}\,\theta_k$$

Definindo a *matriz* **B** *do fluxo de potência linearizado* como:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sum_{k \in \Omega_1} \gamma_{1k} & -\gamma_{12} & -\gamma_{13} & \cdots & -\gamma_{1N} \\ -\gamma_{21} & \sum_{k \in \Omega_2} \gamma_{2k} & -\gamma_{23} & \cdots & -\gamma_{2N} \\ -\gamma_{31} & -\gamma_{32} & \sum_{k \in \Omega_3} \gamma_{3k} & \cdots & -\gamma_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\gamma_{N1} & -\gamma_{N2} & -\gamma_{N3} & \cdots & \sum_{k \in \Omega_N} \gamma_{Nk} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

pode-se facilmente verificar que

$$p_i = B_{ii}\,\theta_i + \sum_{k \in \Omega_i} B_{ik}\,\theta_k$$

ou, na forma matricial:

$$\mathbf{p} = \mathbf{B}\,\boldsymbol{\theta} \tag{2.6}$$

Observe da Eq. (2.5) que a estrutura da matriz **B** émuito similar à da matriz $\mathbf{Y}_{barra}$. De fato, as mesmas rotinas usadas para formar $\mathbf{Y}_{barra}$ podem ser facilmente adaptadas para montar **B**.

2.2. Singularidade da matriz B e Barra de Referência

É fácil de verificar que a soma das linhas ou colunas da matriz $\mathbf{B}$ é zero, isto é:

$$\sum_{j=1}^{N} B_{ij} = 0,\; i = 1, \ldots, N$$
$$\sum_{i=1}^{N} B_{ij} = 0,\; j = 1, \ldots, N$$

e portanto $\mathbf{B}$ é singular. Isto significa que as N equações implícitas na Eq. (2.6) são linearmente dependentes, e portanto não se qualificam para definir as restrições de igualdade do problema de FPO. Uma maneira de eliminar a redundância destas equações é definir uma barra r cujo ângulo será considerado como referência angular, isto é:

$$\theta_r = 0$$

Esta definição implica em se eliminar a coluna r da matriz $\mathbf{B}$, uma vez que todos os elementos desta coluna serão agora multiplicados por zero. Consequentemente, definimos $\hat{\mathbf{B}}$ como a matriz $N \times (N-1)$ obtida de $\mathbf{B}$ pela eliminação da coluna r, e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ como o vetor $N \times 1$ obtido de $\boldsymbol{\theta}$ pela eliminação do elemento r. O conjunto de N equações não-redundantes de potências injetadas nas barras será dado por:

$$\hat{\mathbf{B}}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{p} \tag{2.7}$$

2.3. Restrições de Balanço de Potência Ativa

A equação (2.7) não se qualifica como restrição de balanço de potência ativa para o problema de FPO linearizado porque o vetor $\mathbf{p}$ de injeções de potência ativa nas barras ainda tem que ser expresso como função das potências geradas e das potências das cargas nas barras.

Para considerar as potências geradas, seja n_g o número de geradores do sistema de potência. Definimos inicialmente a *matriz de incidência barras-geradores*, $\mathbf{A}_g$, como a matriz $N \times n_g$ cujos elementos são dados por:

$$\mathbf{A}_g(i,j) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{se o gerador } j \text{ está conectado à barra } i; \\ 0, & \text{em caso contrário.} \end{cases} \tag{2.8}$$

Sejam ainda $\mathbf{p}_g \triangleq [p_{g_1}, p_{g_2}, \ldots, p_{g_{n_g}}]^T$ o vetor $n_g \times 1$ das potências ativas geradas nas barras de geração e $\mathbf{p}_L = [p_{L_1}, p_{L_2}, \ldots, p_{L_N}]^T$ o vetor $N \times 1$ das cargas ativas nas barras do sistema. O vetor de potências ativas injetadas nas barras pode portanto ser escrito como:

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}_g\,\mathbf{p}_g - \mathbf{p}_L \tag{2.9}$$

A partir destas definições e resultados, estamos agora prontos para escrever a versão final da equação de restrições de balanço de potência ativa para o problema de FPO linearizado. Substituindo a Eq. (2.9) na Eq. (2.7), obtemos:

$$-\hat{\mathbf{B}}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{A_g}\,\mathbf{p_g} = \mathbf{p}_L \tag{2.10}$$

2.4. Restrições de Limite de Geração

Como no problema de Despacho Econômico, os limites máximo e mínimo sobre as potências geradas devem ser considerados como restrições de desigualdade ao problema de FPO. Sejam os vetores $n_g \times 1$ $\overline{\mathbf{p}}_g$ e $\underline{\mathbf{p}}_g$, que contêm os limites máximos e mínimos de potência gerada para cada gerador do sistema. As restrições de limite geração são dadas por:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{p_g} & \leq & \overline{\mathbf{p}}_g \\ -\mathbf{p_g} & \leq & -\underline{\mathbf{p}}_g \end{array} \tag{2.11}$$

2.5. Restrições de Limite de Fluxo de Potência nos Ramos

Além das restrições de balanço de potência ativa dadas pela Eq. (2.10), que são *restrições de igualdade,* consideraremos também em nosso FPO os limites impostos sobre os fluxos de potência ativa nos ramos (linhas de transmissão, transformadores), que são *restrições de desigualdade ao problema de FPO.* Tais limites podem ser devidos tanto a limitações térmicas dos condutores quanto a restrições de estabilidade.

Sejam $\bar{t}_{ij}$ e $\underline{t}_{ij}$ os limites máximo e mínimo de fluxo de potência no ramo $i-j$ (na prática, $\underline{t}_{ij} = -\bar{t}_{ij}$,já que o fluxo pode ocorrer em ambos os sentidos sobre o ramo $i-j$). Matematicamente, temos

$$\underline{t}_{ij} \leq t_{ij} \leq \bar{t}_{ij}$$

ou, usando a Eq. (2.3):

$$\underline{t}_{ij} \leq \gamma_{ij}\,(\theta_i - \theta_j) \leq \bar{t}_{ij} \tag{2.12}$$

A equação (2.12) é aplicável a cada um dos n_ℓ ramos do sistema. Esta forma escalar de representar os limites de transmissão não permite uma formulação sucinta do problema de FPO linearizado. Para chegar a uma representação mais compacta, definamos a *matriz de incidência ramos-barras* como a matriz $n_\ell \times N$ dada por:

$$\tilde{\mathbf{A}}(\ell, i) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{se a barra de origem do elemento } \ell \text{ é a barra } i; \\ -1, & \text{se a barra de chegada do elemento } \ell \text{ é a barra } i; \\ 0, & \text{se o elemento } \ell \text{ não incidir na barra } i. \end{cases} \tag{2.13}$$

A partir da matriz $\tilde{\mathbf{A}}$, definimos a *matriz de incidência ramos-barras reduzida*, $\mathbf{A}$, simplesmente eliminando de $\tilde{\mathbf{A}}$ a coluna correspondente à barra de referência. Adicionalmente, seja $\mathbf{\Gamma}$ a *matriz primitiva das capacidades dos ramos*, dada por:

$$\mathbf{\Gamma} \triangleq diag\{\gamma_{\ell_1}, \gamma_{\ell_2}, \ldots, \gamma_{\ell_{n_\ell}}\} \tag{2.14}$$

A partir das definições acima, é fácil verificar que o vetor $n_\ell \times 1$ dos fluxos de potência ativa em todos os ramos do sistema é dado por:

$$\mathbf{t} = \mathbf{\Gamma}\,\mathbf{A}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{2.15}$$

Finalmente, utilizando a Eq. (2.15) podemos escrever as desigualdades (2.12) em forma vetorial como:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{\Gamma}\,\mathbf{A}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} & \leq & \overline{\mathbf{t}} \\ -\mathbf{\Gamma}\,\mathbf{A}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} & \leq & -\underline{\mathbf{t}} \end{array} \tag{2.16}$$

onde $\overline{\mathbf{t}}$ e $\underline{\mathbf{t}}$ são vetores $n_\ell \times 1$ que contêm os limites superiores e inferiores de fluxo ativo nos ramos, respectivamente.

2.6. Formulação do Problema de FPO Linearizado

Usando os resultados (2.10), (2.11) e (2.16), estamos agora em condições de formular o problema de FPO linearizado, como:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Min} & c(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}_g) & & \\ & & & \\ \text{sujeito a:} & -\hat{\mathbf{B}}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{A_g}\,\mathbf{p_g} & = & \mathbf{p}_L \\ & \mathbf{p_g} - \overline{\mathbf{p}}_g & \leq & \mathbf{0} \\ & -\mathbf{p_g} + \underline{\mathbf{p}}_g & \leq & \mathbf{0} \\ & \mathbf{\Gamma}\,\mathbf{A}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - \overline{\mathbf{t}} & \leq & \mathbf{0} \\ & -\mathbf{\Gamma}\,\mathbf{A}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \underline{\mathbf{t}} & \leq & \mathbf{0} \end{array}$$