Efeito dos Limites de Transmissão e Interpretação dos Multiplicadores de Lagrange

Antonio Simões Costa e Katia Almeida

1. Formulação do Problema e Condições de Otimalidade.

Conforme descrito na seção anterior o problema pode ser escrito:

$$\begin{array}{lll} Min & & c(\mathbf{P}_g) \\ & s.a & \\ & & \mathbf{A}_g\mathbf{P}_g - \mathbf{P}_L = \widehat{\mathbf{B}}\ \widehat{\boldsymbol{\theta}} \\ & & \underline{\mathbf{P}}_g \leq \mathbf{P}_g \leq \overline{\mathbf{P}}_g \\ & & \underline{\mathbf{t}} \leq \boldsymbol{\Gamma}\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\boldsymbol{\theta}} \leq \overline{\mathbf{t}} \end{array} \tag{1.1}$$

sendo
$\mathbf{P}_g$: vetor $(ng \times 1)$ de potências geradas;
$\mathbf{P}_L$: vetor $(n \times 1)$ de cargas nas barras;
$\widehat{\mathbf{B}}$: matriz $\mathbf{B}$ sem a coluna da barra de referência;
$\widehat{\boldsymbol{\theta}}$: vetor $(n-1 \times 1)$ de ângulos sem o ângulo de referência ;
$\boldsymbol{\Gamma}$: matriz diagonal $(nl \times nl)$ das condutâncias das linhas;
$\widehat{\mathbf{A}}$: matriz $(nl \times n-1)$ de incidência ramo-nó sem a coluna da barra de referência;
n: número de barras do sistema;
nl: número de ramos do sistema.
O Lagrangeano do problema se escreve:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \;=\; & c(\mathbf{P}_g) + \boldsymbol{\lambda}^T\left(\widehat{\mathbf{B}}\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{A}_g\mathbf{P}_g + \mathbf{P}_d\right) + \underline{\boldsymbol{\pi}}_g^T\left(\underline{\mathbf{P}}_g - \mathbf{P}_g\right) + \overline{\boldsymbol{\pi}}_g^T\left(\mathbf{P}_g - \overline{\mathbf{P}}_g\right) \\ & + \underline{\boldsymbol{\pi}}_t^T\left(\underline{\mathbf{t}} - \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right) + \overline{\boldsymbol{\pi}}_t^T\left(\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \overline{\mathbf{t}}\right) \end{aligned} \tag{1.2}$$

As condições de otimalidade do problema são:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{P}_g} = \frac{dc(\mathbf{P}_g)}{d\mathbf{P}_g} - \mathbf{A}_g^T\boldsymbol{\lambda} - \underline{\boldsymbol{\pi}}_g + \overline{\boldsymbol{\pi}}_g = \mathbf{0} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\theta}}} = \widehat{\mathbf{B}}^T\boldsymbol{\lambda} - \left[\widehat{\mathbf{A}}\right]^T \boldsymbol{\Gamma}\underline{\boldsymbol{\pi}}_t + \left[\widehat{\mathbf{A}}\right]^T \boldsymbol{\Gamma}\overline{\boldsymbol{\pi}}_t = \mathbf{0} \tag{1.4}$$

$$diag(\underline{\boldsymbol{\pi}}_g)\left(\underline{\mathbf{P}}_g - \mathbf{P}_g\right) = \mathbf{0} \tag{1.5}$$

$$diag(\overline{\boldsymbol{\pi}}_g)\left(\mathbf{P}_g - \overline{\mathbf{P}}_g\right) = \mathbf{0} \tag{1.6}$$

$$diag(\underline{\boldsymbol{\pi}}_t)\left(\underline{\mathbf{t}} - \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \mathbf{0} \tag{1.7}$$

$$diag(\overline{\boldsymbol{\pi}}_t)\left(\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \overline{\mathbf{t}}\right) = \mathbf{0} \tag{1.8}$$

$$\mathbf{A}_g\mathbf{P}_g - \mathbf{P}_d = \widehat{\mathbf{B}}\widehat{\boldsymbol{\theta}} \tag{1.9}$$

$$\underline{\mathbf{P}}_g \leq \mathbf{P}_g \leq \overline{\mathbf{P}}_g \tag{1.10}$$

$$\underline{\mathbf{t}} \leq \boldsymbol{\Gamma}\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\boldsymbol{\theta}} \leq \overline{\mathbf{t}} \tag{1.11}$$

$$\underline{\boldsymbol{\pi}}_g \geq \mathbf{0}, \quad \overline{\boldsymbol{\pi}}_g \geq \mathbf{0}, \quad \underline{\boldsymbol{\pi}}_t \geq \mathbf{0}, \quad \overline{\boldsymbol{\pi}}_t \geq \mathbf{0} \tag{1.12}$$

Considere as equações (1.3) e (1.4). Supondo que a barra 1 seja a barra de referência, a matriz $\widehat{\mathbf{B}}$ em (1.4) pode ser rescrita como

$$\widehat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ --- \\ \mathbf{B}_{red} \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -\gamma_{12} \\ \cdots \\ -\gamma_{1n} \end{bmatrix}$$

sendo $\mathbf{B}_{red}$ a matriz $\widehat{\mathbf{B}}$ sem a linha da barra de referência (isto é, $\mathbf{B}_{red}$ é a matriz do fluxo de carga CC sem a linha e a coluna da barra de referência) e $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \cdots, \gamma_{1n}$ são as susceptâncias dos ramos $(1,2), (1,3), \cdots (1,n)$. Da mesma forma, podemos escrever:

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ -- \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ -- \\ \boldsymbol{\lambda}_{red} \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \boldsymbol{\lambda}_{red} = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

Com estas definições a equação (1.4) pode ser escrita

$$\mathbf{B}_{red}^T.\boldsymbol{\lambda}_{red} = -\mathbf{b}_1\lambda_1 + \left[\widehat{\mathbf{A}}\right]^T \boldsymbol{\Gamma}\underline{\boldsymbol{\pi}}_t - \left[\widehat{\mathbf{A}}\right]^T \boldsymbol{\Gamma}\overline{\boldsymbol{\pi}}_t$$

Resolvendo para $\boldsymbol{\lambda}_{red}$ temos

$$\boldsymbol{\lambda}_{red} = -\left[\mathbf{B}_{red}^T\right]^{-1}\mathbf{b}_1\lambda_1 + \left[\mathbf{B}_{red}^T\right]^{-1}\left[\widehat{\mathbf{A}}\right]^T \boldsymbol{\Gamma}\underline{\boldsymbol{\pi}}_t - \left[\mathbf{B}_{red}^T\right]^{-1}\left[\widehat{\mathbf{A}}\right]^T \boldsymbol{\Gamma}\overline{\boldsymbol{\pi}}_t \tag{1.13}$$

Observe que a soma das linhas da matriz $\widehat{\mathbf{B}}$ é igual a zero, ou seja

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ --- \\ \mathbf{B}_{red} \end{bmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{b}_1^T + \mathbf{e}_{n-1}^T \mathbf{B}_{red} = 0$$

ou ainda

$$\mathbf{B}_{red}^T . \mathbf{e}_{n-1} = -\mathbf{b}_1 \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}_{n-1} = -\left[\mathbf{B}_{red}^T\right]^{-1} \mathbf{b}_1 \tag{1.14}$$

O lado direito da equação (1.14) aparece no primeito termo de (1.13). Seja $\left[\mathbf{B}_{red}^T\right]^{-1} \triangleq \widetilde{\mathbf{X}}$. A expressão (1.13) pode ser escrita:

$$\boldsymbol{\lambda}_{red} = \lambda_1 \mathbf{e}_{n-1} + \widetilde{\mathbf{X}} \left[\widehat{\mathbf{A}}\right]^T \boldsymbol{\Gamma} \underline{\boldsymbol{\pi}}_t - \widetilde{\mathbf{X}} \left[\widehat{\mathbf{A}}\right]^T \boldsymbol{\Gamma} \overline{\boldsymbol{\pi}}_t \tag{1.15}$$

Da equação (1.15) temos que, se nenhum limite de fluxo é atingido, os $\lambda' s$ de todas as barras do sistema são iguais entre si (e iguais a λ_1), pois, neste caso,$\underline{\boldsymbol{\pi}}_t = \overline{\boldsymbol{\pi}}_t = \mathbf{0}$.

Da equação (1.3) temos que

$$\frac{dc(\mathbf{P}_g)}{d\mathbf{P}_g} = \mathbf{A}_g^T \boldsymbol{\lambda} - \underline{\boldsymbol{\pi}}_g + \overline{\boldsymbol{\pi}}_g$$

Na expressão anterior,$\mathbf{A}_g^T \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_g$, onde $\boldsymbol{\lambda}_g$ é o vetor composto pelos $\lambda' s$ das barras de geração. Então podemos escrever:

$$\frac{dc(\mathbf{P}_g)}{d\mathbf{P}_g} = \boldsymbol{\lambda}_g - \underline{\boldsymbol{\pi}}_g + \overline{\boldsymbol{\pi}}_g \tag{1.16}$$

Da expressão anterior temos que os $\lambda' s$ das barras de geração são iguais aos custos incrementais de geração $\left(\frac{dc(P_g)}{dP_g}\right)$ daquelas unidades que estão fora dos limites. Portanto, podemos concluir que:

1. Caso, no despacho ótimo, não existam limites de fluxos ativos ou limites de geração ativos,os $\lambda' s$ são todos iguais e os geradores estão operando com os mesmos custos incrementais de geração. Em suma, a condição ótima de operação é igual àquela obtida para o caso do despacho econômico sem a representação da rede de transmissão.

2. Caso, no despacho ótimo, não existam limites de fluxo ativos e, por outro lado, alguns geradores tenham atingido os limites máximos ou mínimos, aqueles geradores *livres* operam com custos incrementais de geração iguais aos $\lambda' s$ das barras a que estão conectados (que, por sua vez são iguais a λ_1).

3. Para um gerador k que esteja operando no limite mínimo temos

$$\frac{dc_k(P_{g_k})}{dP_{g_k}} = \lambda_1 + \underline{\pi}_k$$

ou seja, o gerador k opera com custo incremental de geração maior do que λ_1.Por outro lado, para um gerador l operando do limite máximo temos

$$\frac{dc_l(P_{g_l})}{dP_{g_l}} = \lambda_1 - \overline{\pi}_l$$

ou seja, o gerador l opera com custo incremental de geração menor do que λ_1.

4. Quando um limite de transmissão for atingido, os custos incrementais das barras tornam-se em geral diferentes entre si, conforme detalhado na próxima seção.

2. Alteração nos Custos Incrementais das Barras Causada por Congestionamento na Rede

Suponhamos que o fluxo de potência na linha $\ell = (k, m)$ tenha atingido o limite máximo permitido. Das condições de otimalidade temos que

$$\underline{\boldsymbol{\pi}}_t = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \overline{\boldsymbol{\pi}}_t = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \overline{\pi}_{t_\ell} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \longleftarrow \text{posição } \ell$$

Então a equação (1.15) pode ser rescrita como

$$\boldsymbol{\lambda}_{red} = \lambda_1 e_{n-1} - \widetilde{\mathbf{X}} \left[\widehat{\mathbf{A}}\right]^T \boldsymbol{\Gamma} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \overline{\pi}_{t_\ell} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na expressão acima

$$\boldsymbol{\Gamma} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \overline{\pi}_{t_\ell} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \gamma_\ell . \overline{\pi}_{t_\ell} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

e, além disso,

$$\left[\widehat{\mathbf{A}}\right]^T \mathbf{\Gamma} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \overline{\pi}_{t_\ell} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{r} \\ \\ \text{linha } k \rightarrow \\ \text{linha } m \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \text{Col. } \ell \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} \cdots & 1 & \cdots \\ \cdots & -1 & \cdots \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \gamma_\ell.\overline{\pi}_{t_\ell} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_\ell.\overline{\pi}_{t_\ell} \\ \vdots \\ -\gamma_\ell.\overline{\pi}_{t_\ell} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto temos que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_{red} &= \lambda_1 \mathbf{e}_{n-1} - \widetilde{\mathbf{X}} \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_\ell.\overline{\pi}_{t_\ell} \\ \vdots \\ -\gamma_\ell.\overline{\pi}_{t_\ell} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 \mathbf{e}_{n-1} - \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \cdots & \widetilde{\mathbf{X}}_k & \cdots & \widetilde{\mathbf{X}}_m & \cdots \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_\ell.\overline{\pi}_{t_\ell} \\ \vdots \\ -\gamma_\ell.\overline{\pi}_{t_\ell} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde $\widetilde{\mathbf{X}}_k$ e $\widetilde{\mathbf{X}}_m$ são as colunas k e m da matriz $\widetilde{\mathbf{X}}$.
A expressão acima pode ser escrita de forma compacta como

$$\boldsymbol{\lambda}_{red} = \lambda_1 \mathbf{e}_{n-1} - \gamma_\ell.\overline{\pi}_{t_\ell} \widetilde{\mathbf{X}}_k + \gamma_\ell.\overline{\pi}_{t_\ell} \widetilde{\mathbf{X}}_m$$

Na expressão anterior as colunas $\widetilde{\mathbf{X}}_k$ e $\widetilde{\mathbf{X}}_m$ são densas, já que $\widetilde{\mathbf{X}}$ é uma matriz densa. Sendo assim, a ativação de um único limite de fluxo tende a causar alterações em todos os $\lambda' s$ do sistema, e não apenas nos $\lambda' s$ associados às barras k e m que são as barras terminais da linha que sofre o congestionamento.

3. Interpretação dos Multiplicadores de Lagrange das Equações de Balanço de Potência Ativa (λ)

O Custo Incremental da Barra k (CIB_k) de um sistema de potência é definido como

$$CIB_k = \frac{dc(\mathbf{P}_g)}{dP_{L_k}}$$

ou seja, CIB_k é o incremento no custo total de geração do sistema causado por um incremento na carga da barra k; ou ainda, CBI_k indica quanto custará ao sistema atender a um incremento de carga na barra k.

A equação anterior pode ser escrita:

$$CIB_k = \frac{d}{dP_{L_k}}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i(P_{g_i})\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{dc_i(P_{g_i})}{dP_{g_i}}.\frac{dP_{g_i}}{P_{L_k}}$$

Por outro lado, das condições de otimalidade temos que

$$\begin{aligned} \tfrac{dc(\mathbf{P}_g)}{d\mathbf{P}_g} &= -\tfrac{d}{d\mathbf{P}_g}\left[\boldsymbol{\lambda}^T\left(\mathbf{A}_g\mathbf{P}_g - \mathbf{P}_d - \widehat{\mathbf{B}}\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right] - \tfrac{d}{d\mathbf{P}_g}\left[\underline{\boldsymbol{\pi}}_g^T\left(\underline{\mathbf{P}}_g - \mathbf{P}_g\right)\right] - \\ &\quad -\tfrac{d}{d\mathbf{P}_g}\left[\overline{\boldsymbol{\pi}}_g^T\left(\mathbf{P}_g - \overline{\mathbf{P}}_g\right)\right] \end{aligned}$$

Então, para a barra i, temos

$$\begin{aligned} \tfrac{dc_i(P_{g_i})}{dP_{g_i}} &= -\tfrac{d}{dP_{g_i}}\left[\lambda_i\left(P_{g_i} - P_{L_i} - \textstyle\sum_{j=2}^{n}\widehat{\mathbf{B}}_{ij}\theta_j\right)\right] - \tfrac{d}{dP_{g_i}}\left[\underline{\pi}_{g_i}\left(\underline{P}_{g_i} - P_{g_i}\right)\right] - \\ &\quad -\tfrac{d}{dP_{g_i}}\left[\overline{\pi}_{g_i}\left(P_{g_i} - \overline{P}_{g_i}\right)\right] \end{aligned}$$

Definindo

$$\begin{aligned} g_i &= P_{g_i} - P_{L_i} - \sum_{j=2}^{n}\widehat{\mathbf{B}}_{ij}\theta_j \\ \underline{h}_i &= \underline{P}_{g_i} - P_{g_i} \\ \overline{h}_i &= P_{g_i} - \overline{P}_{g_i} \end{aligned}$$

temos

$$\frac{dc_i(P_{g_i})}{dP_{g_i}} = -\frac{d}{dP_{g_i}}\left[\lambda_i g_i\right] - \frac{d}{dP_{g_i}}\left[\underline{\pi}_{g_i}\underline{h}_i\right] - \frac{d}{dP_{g_i}}\left[\overline{\pi}_{g_i}\overline{h}_i\right]$$

Então o custo incremental da barra k pode ser expresso

$$CIB_k = \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{d}{dP_{g_i}}\left[\lambda_i g_i\right] - \frac{d}{dP_{g_i}}\left[\underline{\pi}_{g_i}\underline{h}_i\right] - \frac{d}{dP_{g_i}}\left[\overline{\pi}_{g_i}\overline{h}_i\right]\right].\frac{dP_{g_i}}{P_{L_k}}$$

ou ainda

$$CIB_k = \frac{d}{dP_{L_k}}\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_i g_i\right] - \frac{d}{dP_{L_k}}\sum_{i=1}^{n}\left[\underline{\pi}_{g_i}\underline{h}_i\right] - \frac{d}{dP_{L_k}}\sum_{i=1}^{n}\left[\overline{\pi}_{g_i}\overline{h}_i\right]$$

Como as duas últimas parcelas do lado direito da equação acima não dependem de P_L e somente g_k é função de P_{L_k},a expressão acima pode ser rescrita como

$$CIB_k = -\lambda_k\frac{dg_k}{dP_{L_k}}$$

Tendo em vista a definição de g_k temos que

$$CIB_k = \lambda_k$$

Ou seja, o multiplicador de Lagrange λ_k é igual ao custo incremental da barra k.

A informação contida nos custos incrementais das barras é extremamente importante para a operação econômica dos sistemas elétricos. Qualquer consumidor que esteja conectado a uma dada barra k tem um custo de λ_k $\$/MWh$ para ser atendido. Sendo assim, λ_k pode ser considerado um limite mínimo para o preço a ser cobrado para atendimento de uma carga na barra k. Como este custo incremental varia com a demanda e as condições de operação (por exemplo, geradores e/ou linhas conectadas, congestionamento na transmissão, etc.) ele é um bom indicativo do preço da potência no *Mercado de Energia*.

4. Custo Incremental do Sistema

O custo incremental do sistema (CIS) é definido como

$$CIS = \frac{dc(\mathbf{P}_g)}{dP_L^{Total}}$$

A equação anterior pode ser rescrita da seguinte forma

$$CIS = \begin{bmatrix} \frac{dc(\mathbf{P}_g)}{dP_{L_1}} & \frac{dc(\mathbf{P}_g)}{dP_{L_2}} & \cdots & \frac{dc(\mathbf{P}_g)}{dP_{L_n}} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{dP_{L_1}}{dP_L^{Total}} \\ \frac{dP_{L_2}}{dP_L^{Total}} \\ \vdots \\ \frac{dP_{L_n}}{dP_L^{Total}} \end{bmatrix}$$

Supondo que

$$\begin{array}{c} P_{L_i} = k_1 P_L^{Total} \\ P_{L_2} = k_2 P_L^{Total} \\ \vdots \\ P_{L_n} = k_n P_L^{Total} \end{array} \quad \rightarrow \quad \frac{dP_{L_i}}{dP_L^{Total}} = k_i, \quad \text{onde} \sum_{i=1}^{n} k_i = 1$$

temos então que

$$CIS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \cdots + \lambda_n k_n$$

Caso não existam limites de fluxo ativos $\lambda_i = \lambda_1, i = 1, \cdots, n-1$. Portanto

$$CIS = \lambda_1 (k_1 + k_2 + \cdots + k_n) = \lambda_1$$

Portanto, caso não existam fluxos nos limites máximos ou mínimos permitidos, tem-se que o λ da barra de referência é igual ao custo incremental do sistema. Por outro lado, caso algum fluxo esteja no limite máximo ou mínimo, CIS depende da distribuição das cargas no sistema e do custo incremental de cada barra do mesmo.

Pode-se notar que CIS pode ser interpretado como uma média ponderada dos custos incrementais das barras do sistema fornecendo portanto uma média do custo para atendimento da demanda no sistema.