

# Sumário

<b>7</b>	<b>Coordenação Hidrotérmica</b>	<b>1</b>
7.1	Introdução . . . . .	1
7.2	Programação da Operação a Médio Prazo . . . . .	2
7.2.1	Estratégia Baseada na Curva-Limite . . . . .	2
7.2.2	Estratégia baseada no valor marginal da água . . . . .	2
7.3	Planejamento da Operação de Curto Prazo . . . . .	3
7.4	Programação Hidrotérmica com Restrições de Energia Hidráulica . . . . .	4
7.5	Programação Hidrotérmica de Curto Prazo . . . . .	9
7.5.1	Formulação Incluindo Perdas de Transmissão . . . . .	9
7.5.2	Caso Particular: Perdas de Transmissão Desconsideradas . . . . .	10
7.6	Solução Computacional da Coordenação Hidrotérmica de Curto Prazo . . . . .	12
7.6.1	Algoritmo da Iteração $\lambda - \gamma$ . . . . .	13
7.6.2	Programação Quadrática Sequencial . . . . .	14
7.6.3	Método Primal-Dual de Pontos Interiores . . . . .	15
7.7	Inclusão de Restrições Hidráulicas . . . . .	20
7.8	Programação de Curto Prazo em Sistemas Reais de Base Hidráulica . . . . .	22
7.8.1	Introdução . . . . .	22
7.8.2	Modelagem Detalhada das Variáveis Hidráulicas . . . . .	23
7.8.3	Programação de Curto Prazo para Atender Metas de Volume . . . . .	25
7.8.4	Programação de Curto Prazo Considerando Custo Futuro . . . . .	26

# Capítulo 7

## Coordenação Hidrotérmica

### 7.1 Introdução

O despacho econômico hidrotérmico visa determinar as participações das gerações de origem hidráulica e de origem térmica no atendimento da demanda. O problema é complexo porque depende do grau de dificuldade em se prever as afluências naturais aos reservatórios, do maior ou menor grau de armazenamento de água nos mesmos, etc. Em geral, a participação térmica é determinada de modo a propiciar o uso mais racional possível da água dentro do contexto de incertezas quanto às afluências futuras, de modo a, por um lado, minimizar o risco de déficit de geração de energia e, por outro, reduzir o desperdício de energia hidráulica implicado por vertimento de volumes de água turbináveis.

Para melhor tratar as incertezas associadas às afluências aos reservatórios e ao crescimento da carga, o problema de programação da operação de sistemas hidrotérmicos é em geral abordado em horizontes de tempo distintos, em que metas estabelecidas em um dado horizonte de tempo devem ser cumpridas no horizonte de menor prazo seguinte. Quanto maior o horizonte de planejamento, tanto menos detalhada e mais incerta é a programação. Os horizontes usuais de planejamento da operação são os seguintes:

- *Programação de longo prazo:* Considera horizonte de 5 anos com discretização mensal para determinar as participações de geração hidráulica e térmica e intercâmbios de energia. Os reservatórios são agregados em um reservatório equivalente.
- *Programação de Médio Prazo:* Considera horizonte de 1 ano com discretização semanal. Utiliza métodos de previsão de vazões para determinar as participações térmica e hidráulica no atendimento da demanda.
- *Programação de curto prazo:* Neste caso o horizonte é semanal com discretização horária. Em geral a abordagem é determinística, e aspectos energéticos, hidráulicos e elétricos são simultaneamente considerados. Assim, a rede elétrica, os intercâmbios e características das unidades hidráulicas são todos representados.

Neste curso, as atenções serão concentradas na operação a curto prazo. Entretanto, a fim de melhor entender as metas a serem cumpridas neste estágio da programação da

operação, a seção seguinte tece algumas considerações sobre os programas de produção hidrotérmica a médio prazo.

## 7.2 Programação da Operação a Médio Prazo

Os métodos usualmente empregados no horizonte anual podem ser agrupados como:

- *Métodos empíricos* - Baseiam-se na história passada, prevendo situações semelhantes;
- *Métodos baseados em simulação* - São aperfeiçoamentos dos métodos empíricos, usando modelos matemáticos que permitem analisar grande número de casos, dos quais se deduz uma solução (não necessariamente a ótima global);
- *Métodos precisos* - Resolvem o problema formulado por uma técnica de otimização, como programação dinâmica estocástica, necessitando portanto de modelos matemáticos mais ou menos sofisticados.

Dentre os métodos utilizados nos horizontes de médio e longo prazo, destacam-se a estratégia baseada na curva-limite do reservatório equivalente do sistema e a estratégia baseada no valor marginal da água.

### 7.2.1 Estratégia Baseada na Curva-Limite

Trata-se de uma estratégia determinística tradicional. A curva-limite indica o nível de armazenamento do sistema abaixo do qual as usinas térmicas devem ser acionadas para garantir o atendimento da demanda, tendo por base o histórico das vazões registradas no passado. Procura-se portanto chegar ao fim do período de planejamento sem ocorrências de déficits.

A curva-limite ilustrada na Fig. 7.1 é obtida a partir da simulação da operação do sistema para um dado ano hidrológico.

Durante a operação ao longo do ano hidrológico, procura-se acompanhar a curva-limite, ora reduzindo a participação térmica, se o nível do reservatório equivalente está acima da curva-limite, ora aumentando-a, se o nível do reservatório está abaixo da curva-limite. Com isto procura-se evitar vertimento (desperdício) de água e o risco de déficit de suprimento que resultaria da exaustão do volume útil armazenado. Este método é um compromisso entre operação econômica e segurança. Conduz a uma expectativa elevada de atendimento, mas com altos custos de geração térmica fora dos períodos secos.

### 7.2.2 Estratégia baseada no valor marginal da água

Neste caso, busca-se minimizar o custo total de atendimento da demanda, que inclui o custo da geração térmica mais o custo do déficit. Isto é, procura-se operar com a geração térmica mínima nos períodos hidrológicamente favoráveis e elevar a geração térmica nos períodos hidrológicamente adversos.

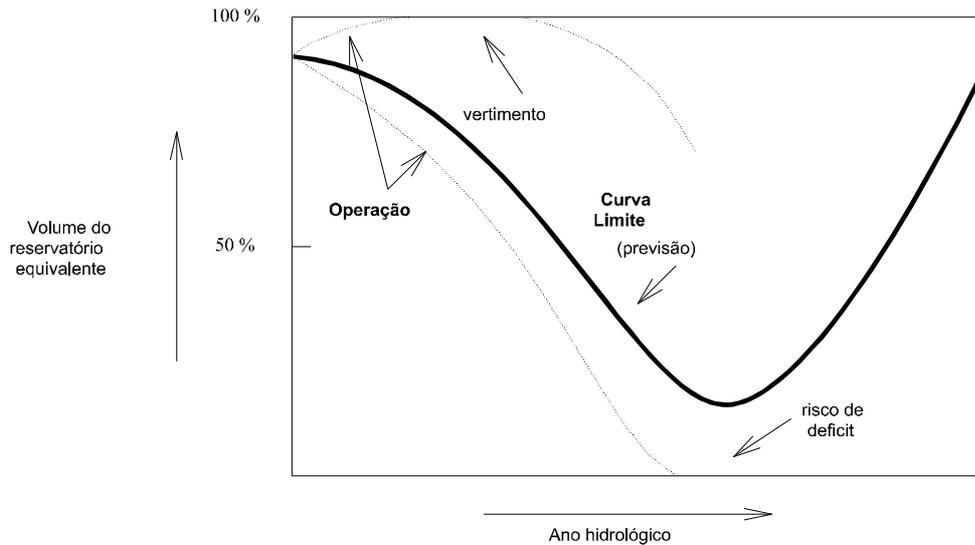


Figura 7.1: Curva-limite para programação hidrotérmica de médio prazo.

Para operacionalizar esta estratégia, é necessário definir o *valor marginal da água*. Este é definido como a derivada do custo esperado atualizado da geração térmica e da energia não suprida em relação à produção da energia hidráulica ao longo de um período. Em outras palavras, o valor marginal da água representa o acréscimo de custo decorrente da utilização de *uma unidade de energia armazenada* ao longo do período. O valor marginal da água está associado a cada estado do sistema, caracterizado por um nível de armazenamento e pela tendência hidrológica. O valor marginal da água tende a crescer com a diminuição da energia armazenada e com a redução do valor da variável que representa a tendência hidrológica (isto é, quando a expectativa de afluências é mais pessimista que o valor corrente). A Fig. 7.2 ilustra esta dependência.

Com a disponibilidade do valor marginal da água para os diferentes estados de operação do sistema, é possível definir um problema de otimização para determinar a estratégia ótima de operação das térmicas. Por exemplo, para um dado estado de operação, as térmicas de custo marginal inferior ao valor marginal da água devem operar no máximo, já que isto é mais econômico que gerar com as usinas hidráulicas; as térmicas de custo marginal superior ao valor marginal da água devem operar no mínimo, etc.

### 7.3 Planejamento da Operação de Curto Prazo

Estudaremos neste capítulo dois problemas típicos de planejamento da operação hidrotérmica no horizonte de curto prazo:

1. Em sistemas hidrotérmicos onde há predominância de geração de origem hidráulica, busca-se em geral minimizar os custos da geração térmica. Frequentemente estes problemas são do tipo de *programação de energia*, em que há restrições de energia

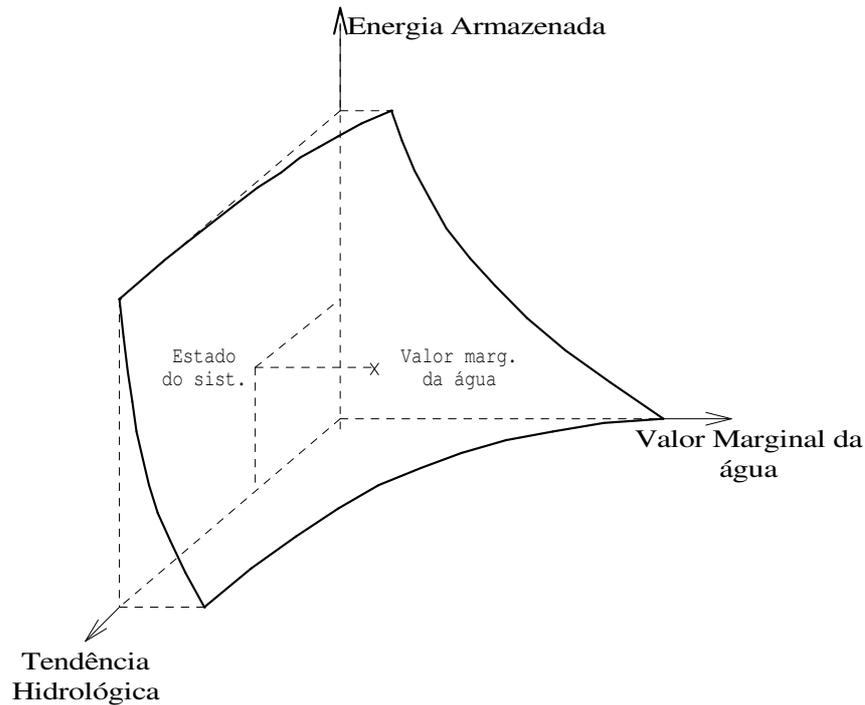


Figura 7.2: Variação do valor marginal da água com a tendência hidrológica e o nível de armazenamento dos reservatórios.

para a geração hidráulica, e portanto há a necessidade de se operar as térmicas em subintervalos do horizonte de tempo de interesse.

2. Em sistemas hidrotérmicos onde há equilíbrio entre as gerações de origem térmica e hidráulica, ou onde a primeira predomina sobre a segunda, o objetivo é minimizar os custos da geração térmica, porém reconhecendo as diversas restrições hidráulicas existentes.

Estes dois tipos de problemas serão tratados nas seções seguintes.

## 7.4 Programação Hidrotérmica com Restrições de Energia Hidráulica

Considere o sistema formado por uma usina térmica ( $UTE$ ) e uma usina hidrelétrica ( $UHE$ ) equivalentes alimentando uma carga, conforme ilustrado na Fig. 7.3.

Considera-se que a expressão da vazão  $q$  em função da potência gerada pelo hidrogerador,  $P_H$ , é conhecida. Da mesma forma, é conhecida a função de custo de produção da térmica,  $F(P_T)$ . Além disso, considera-se que ambas as potências geradas, assim como a carga, variam com o tempo ao longo do horizonte considerado, que é suposto discretizado em  $j_{\max}$  intervalos de tempo durante um dado horizonte de tempo de duração

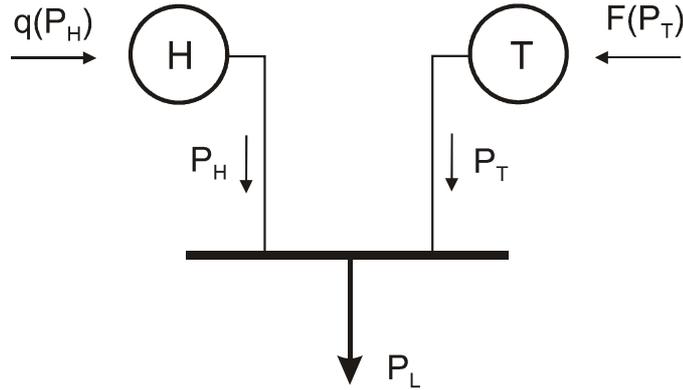


Figura 7.3: Sistema hidrotérmico formado por hidrogerador e turbogerador equivalentes.

$T_{\max}$ . Cada intervalo de tempo  $j$  tem duração de  $h_j$  horas. Portanto:

$$\sum_{j=1}^{j_{\max}} h_j = T_{\max} \quad (7.1)$$

As potências geradas e da carga para cada intervalo de tempo  $j$  serão designadas por  $P_{H,j}$ ,  $P_{T,j}$  e  $P_{L,j}$ .

No problema de programação hidrotérmica com restrição de energia, considera-se que a UHE tem capacidade suficiente para alimentar a carga por um período limitado de tempo, mas a energia de origem hidráulica disponível é insuficiente para alimentar a carga durante todo o horizonte de tempo. Isto é, embora

$$\bar{P}_{H,j} \geq P_{L,j}, \quad j = 1, \dots, j_{\max} \quad (7.2)$$

temos que

$$\sum_{j=1}^{j_{\max}} P_{H,j} h_j \leq \sum_{j=1}^{j_{\max}} P_{L,j} h_j \quad (7.3)$$

O objetivo da programação de energia é usar toda a energia hidráulica disponível durante o horizonte de tempo de modo a minimizar o custo de funcionamento das térmicas. Da restrição de energia (7.3), vemos que a energia  $E$  a ser gerada pela térmica durante o horizonte de tempo é dada por

$$E = \sum_{j=1}^{j_{\max}} P_{L,j} h_j - \sum_{j=1}^{j_{\max}} P_{H,j} h_j \quad (7.4)$$

Além disso, não se exige que a térmica funcione durante todo o horizonte de tempo  $T_{\max}$ . Seja  $N_T$  o número de intervalos de operação da térmica. Então

$$\sum_{j=1}^{N_T} P_{T,j} h_j = E \quad (7.5)$$

e

$$T_T \triangleq \sum_{j=1}^{N_T} h_j \leq T_{\max} \quad (7.6)$$

O problema de coordenação hidrotérmica com restrição de energia pode então ser formulado como:

$$\begin{aligned} \min \quad & F_T(\mathbf{P}_T) = \sum_{j=1}^{N_T} F(P_{T,j}) h_j \\ \text{s.a.} \quad & \\ & E - \sum_{j=1}^{N_T} P_{T,j} h_j = 0 \end{aligned} \quad (7.7)$$

onde

$$\mathbf{P}_T \triangleq [ P_{T,1} \quad P_{T,2} \quad \dots \quad P_{T,N_T} ]^T$$

e  $F_T(\mathbf{P}_T)$  representa o custo total de geração térmica ao longo de todo o horizonte de tempo. A função Lagrangeana correspondente ao problema (7.7) é:

$$\mathcal{L}(\mathbf{P}_T, \alpha) = \sum_{j=1}^{N_T} F(P_{T,j}) h_j + \alpha \left( E - \sum_{j=1}^{N_T} P_{T,j} h_j \right)$$

Uma condição de otimalidade para o problema (7.7) é:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{T,k}} = 0 \Rightarrow \frac{dF(P_{T,k})}{dP_{T,k}} = \alpha, \quad k = 1, 2, \dots, N_T \quad (7.8)$$

Como  $\alpha$  é constante, a condição (7.8) implica que *a UTE deve operar a um custo incremental constante* durante todo o período de tempo em que está em operação. Dada a natureza monotônica da Função  $F(P_{T,k})$ , isto significa que *a potência gerada pela UTE deve ser constante ao longo de todo o seu intervalo de funcionamento*.

Seja então  $P_T^*$  este valor ótimo constante da geração térmica, isto é,

$$P_{T,1} = P_{T,2} = \dots = P_{T,N_T} = P_T^* \quad (7.9)$$

Da condição (7.5), temos que

$$E = \sum_{j=1}^{N_T} P_{T,j} h_j = \sum_{j=1}^{N_T} P_T^* h_j = P_T^* T_T$$

e portanto

$$T_T = \frac{E}{P_T^*} \quad (7.10)$$

Por outro lado, a Eq. (7.9) implica que o custo total da térmica pode ser re-escrito como:

$$F_T(\mathbf{P}_T) = F(P_T^*) \sum_{j=1}^{N_T} h_j = F(P_T^*) T_T \quad (7.11)$$

Se supusermos que a função de custo de produção da térmica pode ser aproximada por uma função quadrática do tipo

$$F(P_T^*) = A + B P_T^* + C (P_T^*)^2$$

vemos que a Eq. (7.11) assume a forma

$$F_T(\mathbf{P}_T) = [A + B P_T^* + C (P_T^*)^2] T_T$$

ou ainda, usando a expressão de  $T_T$  em termos de  $P_T^*$  dada pela Eq. (7.10),

$$F_T(\mathbf{P}_T) = \left[ \frac{A + B P_T^* + C (P_T^*)^2}{P_T^*} \right] E = \frac{A E}{P_T^*} + B E + C E P_T^* \quad (7.12)$$

Observe que, essencialmente, os passos desde a Eq. (7.8) até (7.12) correspondem à interpretação da restrição (7.5) e a avaliação do impacto desta interpretação sobre a função-objetivo do problema (7.7). O problema portanto se reduz à solução do seguinte problema de otimização *irrestrito*:

$$\min_{P_T^*} F_T(\mathbf{P}_T) = \frac{A E}{P_T^*} + B E + C E P_T^*$$

cuja solução é obtida de

$$\frac{dF_T}{dP_T^*} = -\frac{A E}{(P_T^*)^2} + C E = 0$$

ou

$$P_T^* = \sqrt{\frac{A}{C}} \quad (7.13)$$

A Eq. (7.13) indica que o despacho ótimo da térmica independe de  $E$  e corresponde ao ponto mais eficiente de operação da UTE.

Conclui-se portanto que a solução ótima para o problema de despacho de energia requer que a térmica seja despachada a potência constante durante todo o seu período de funcionamento. Em princípio, a UTE pode iniciar sua operação a qualquer instante do horizonte de tempo entre  $t = 0$  e  $t = T_{\max} - T_T$ . Entretanto, convém que a entrada em operação seja logo no início do horizonte de tempo, pois qualquer alteração de previsão, seja de demanda, seja de disponibilidade hidrelétrica, deverá ser atendida via maior ou menor participação térmica. Para isto, basta estender ou reduzir o tempo de utilização da térmica em sua potência de máxima eficiência. A Fig. 7.4 ilustra estas considerações.

**Exemplo 7.1** *Uma UHE e uma UTE devem alimentar uma carga constante de 90 MW por uma semana (168 horas). As características das unidades são dadas abaixo:*

<b>UHE:</b>	$q(P_H) = 300 + 15 P_H \text{ dam}^3/\text{h}, 0 \leq P_H \leq 100 \text{ MW}$
<b>UTE:</b>	$H(P_T) = 53,25 + 11,27 P_T + 0,0213 P_T^2 \text{ MBtu/h}, 12,5 \leq P_H \leq 50 \text{ MW}$

*Supondo que a usina hidráulica é limitada a gerar 10000 MWh, por quanto tempo deve gerar a UTE e qual deve ser o seu despacho?*

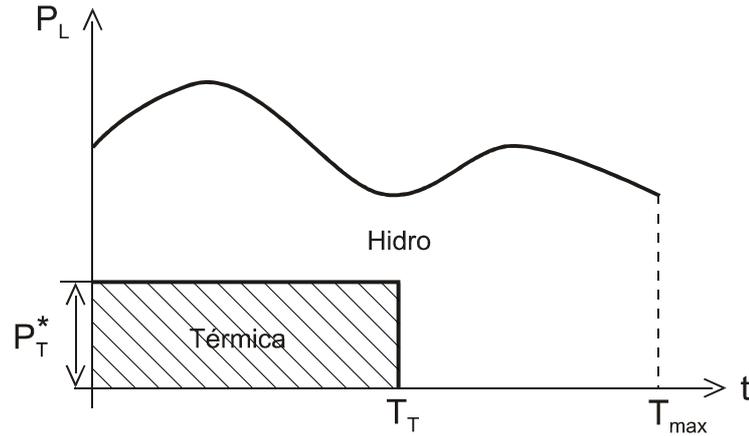


Figura 7.4: Curva de carga e participação térmica e hidráulica em problema de programação com restrição de energia.

**Solução:** A energia solicitada pela carga durante a semana é

$$90 \text{ MW} \times 168 \text{ h} = 15120 \text{ MWh}$$

Portanto,

$$E = 15120 - 10000 = 5120 \text{ MWh}$$

A geração térmica ótima pode ser obtida diretamente de  $H(P_T)$ , já que o que diferencia esta função de  $F(P_T)$  é um fator constante. Resulta que

$$P_T^* = \sqrt{\frac{A}{C}} = \sqrt{\frac{53,25}{0,0213}} = 50 \text{ MW}$$

Podemos então obter o tempo de funcionamento da UTE da Eq. (7.10) como

$$T_T = \frac{E}{P_T^*} = \frac{5120}{50} = 102,4 \text{ h}$$

■

**Exemplo 7.2** *Suponha agora que o limite de energia para a UHE do Exemplo 7.1 é expresso em termos do volume d'água pelo qual o reservatório da usina pode ser deplecionado durante a semana. (Na prática, este volume seria estabelecido pela programação da operação a médio prazo). Supondo que o máximo deplecionamento admissível é de 250000 dam<sup>3</sup> para a semana e que os demais dados do Exemplo 7.1 não sofrem alteração, por quanto tempo a térmica deveria funcionar?*

**Solução:** No Exemplo 7.1, já foi determinado que a UTE deve gerar 50 MW, independentemente do valor de  $E$ . Conseqüentemente, a UHE deverá gerar os restantes 40 MW no período em que a térmica estiver em operação. A vazão neste caso será:

$$q_1 = 300 + 15 \times 40 = 900 \text{ dam}^3/\text{h}$$

e o deplecionamento correspondente será  $V_1 = 900 \times T_T$ . Quando apenas a UHE estiver operando, estas quantidades serão

$$\begin{aligned} q_2 &= 300 + 15 \times 90 &= 1650 \text{ dam}^3/h \\ V_2 &= 1650 \times (168 - T_T) \end{aligned}$$

Como  $(V_1 + V_2)$  está limitado pela meta de médio prazo, temos que

$$V_1 + V_2 = 900 \times T_T + 1650 \times (168 - T_T) = 250000$$

Resolvendo para  $T_T$ , obtemos

$$T_T = 36,27 \text{ h}$$

■

## 7.5 Programação Hidrotérmica de Curto Prazo

### 7.5.1 Formulação Incluindo Perdas de Transmissão

Outro problema de coordenação hidrotérmica de muito interesse prático é aquele em que se requer que um dado volume d'água seja utilizado para minimizar o custo de operação das térmicas, que neste caso *são supostas operar durante todo o horizonte de tempo de estudo*, já que se considera que a geração de origem hidráulica não tem potência suficiente para alimentar a carga. Estes aspectos diferenciam a Programação Hidrotérmica de Curto Prazo do problema de programação com restrição de energia abordado na Seção 7.4.

Para apresentar o problema, será considerado um sistema formado por uma UTE e uma UHE equivalentes. Há um máximo volume d'água que pode ser turbinado ao longo do período de  $T_{\max}$  horas, definido a partir dos estudos de planejamento da operação de médio prazo. Será também suposta a ausência de vertimento e ainda que a altura d'água no reservatório permanece aproximadamente constante ao longo do horizonte de estudo. Esta última hipótese implica que a potência produzida pela UHE depende essencialmente da vazão turbinada (ou *engolimento*), de modo que é possível expressar a vazão  $q$  no intervalo  $j$  como uma função de  $P_{H,j}$ .

Seja  $V_{tot}$  o volume disponível para ser turbinado durante o horizonte de  $T_{\max}$  horas que, como antes, é discretizado em  $j_{\max}$  intervalos, sendo que o intervalo  $j$ ,  $j = 1, \dots, j_{\max}$ , tem duração de  $h_j$  horas. O problema de programação hidrotérmica de curto prazo é então enunciado como:

$$\begin{aligned} \min \quad & F_T(\mathbf{P}_T) = \sum_{j=1}^{j_{\max}} F(P_{T,j}) h_j \\ \text{s.a} \quad & \\ & \sum_{j=1}^{N_T} h_j q(P_{H,j}) = V_{tot} \\ & P_{L,j} + P_{perdas,j} = P_{H,j} + P_{T,j}, \quad j = 1, \dots, j_{\max} \end{aligned} \tag{7.14}$$

onde  $P_{L,j}$  é a carga do sistema no intervalo  $j$  e  $P_{perdas,j}$  representa as perdas de transmissão no intervalo  $j$ . Supõe-se que a carga é constante ao longo de cada intervalo  $j$  e a relação entre  $T_{\max}$  e  $h_j$  continua sendo dada pela Eq. (7.1).

A função Lagrangeana relativa ao problema (7.14) é dada por

$$\mathcal{L}(\mathbf{P}_T, \mathbf{P}_H, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = \sum_{j=1}^{j_{\max}} [F(P_{T,j}) h_j + \lambda_j (P_{L,j} + P_{perdas,j} - P_{H,j} - P_{T,j})] + \gamma \left( \sum_{j=1}^{j_{\max}} h_j q(P_{H,j}) - V_{tot} \right)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_T &\triangleq [ P_{T,1} \ P_{T,2} \ \dots \ P_{T,j_{\max}} ]^T \\ \mathbf{P}_H &\triangleq [ P_{H,1} \ P_{H,2} \ \dots \ P_{H,j_{\max}} ]^T \end{aligned}$$

$\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, j_{\max}$  são os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de balanço de potência em cada intervalo de tempo, e  $\gamma$  é o multiplicador de Lagrange (*escalar*) associado à restrição de volume.

Note que a restrição de volume é uma só, *mas envolve as potências geradas na UHE em cada intervalo de tempo  $j$* . Pelo fato de perpassar todos os intervalos do horizonte de tempo estudado, este tipo de restrição é chamado de *restrição intertemporal*.

As condições necessárias para a solução ótima do problema (7.14) em um dado intervalo  $k$  são:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{T,k}} = h_k \frac{dF(P_{T,k})}{dP_{T,k}} - \lambda_k \left( 1 - \frac{\partial P_{perdas,k}}{\partial P_{T,k}} \right) = 0, \quad k = 1, \dots, j_{\max} \quad (7.15)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{H,k}} = h_k \gamma \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} - \lambda_k \left( 1 - \frac{\partial P_{perdas,k}}{\partial P_{H,k}} \right) = 0, \quad k = 1, \dots, j_{\max} \quad (7.16)$$

As Eqs. (7.15) e (7.16) podem ser re-escritas como:

$$\left( \frac{1}{1 - \frac{\partial P_{perdas,k}}{\partial P_{T,k}}} \right) h_k \frac{dF(P_{T,k})}{dP_{T,k}} = \lambda_k, \quad k = 1, \dots, j_{\max} \quad (7.17)$$

e

$$\left( \frac{1}{1 - \frac{\partial P_{perdas,k}}{\partial P_{H,k}}} \right) h_k \gamma \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} = \lambda_k, \quad k = 1, \dots, j_{\max} \quad (7.18)$$

As Eqs. (7.17) e (7.18) são chamadas *equações de coordenação hidrotérmica*.

## 7.5.2 Caso Particular: Perdas de Transmissão Desconsideradas

Considere agora que as perdas de transmissão podem ser desprezadas, ou seja

$$P_{perdas,j} = 0, \quad j = 1, \dots, j_{\max}$$

Além disso, suponha também que os intervalos de tempo são de igual duração, isto é

$$h_j = h, \quad j = 1, \dots, j_{\max}$$

Neste caso, as equações de coordenação (7.17) e (7.18) tornam-se:

$$h \frac{dF(P_{T,k})}{dP_{T,k}} = \lambda_k, \quad k = 1, \dots, j_{\max} \quad (7.19)$$

e

$$h \gamma \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} = \lambda_k, \quad k = 1, \dots, j_{\max} \quad (7.20)$$

Supondo adicionalmente que a função  $q(P_H)$  pode ser aproximada como

$$q(P_{H,j}) = \beta_0 + \beta_1 P_{H,j}$$

de tal forma que  $(dq/dP_{H,j}) = \beta_1 = \text{constante}$ , vemos da Eq. (7.20) que, sob as hipóteses consideradas,  $\lambda_k$  será constante sobre todos os intervalos de tempo. Levando este resultado à Eq. (7.19), facilmente concluímos que as térmicas deverão operar com custos incrementais constantes, o que por sua vez implica em que as *potências geradas pelas térmicas serão igualmente constantes durante todo o horizonte de tempo*.

Esta versão simplificada da coordenação hidrotérmica também nos permite fazer uma interpretação bastante útil do multiplicador de Lagrange  $\gamma$ . Para tanto, lembremos da relação entre as funções de taxa de calor  $H$  e de custo de produção  $F$ , dada por

$$F(P_T) = f \times H(P_T)$$

onde  $f$  é o custo de combustível. Substituindo esta relação na Eq. (7.19), obtemos:

$$h f \frac{dH(P_{T,k})}{dP_{T,k}} = \lambda_k \quad (7.21)$$

Comparando agora as Eqs. (7.20) e (7.21) e levando em conta que  $H$  e  $q$  desempenham um papel similar como funções que traduzem a taxa de entrada de energia para a UTE e para a UHE, respectivamente, podemos concluir que a variável  $\gamma$ , medida em  $\$/dam^3$ , deve ter um papel análogo a  $f$ , expresso em  $\$/MBtu$ . Em outras palavras, “ $\gamma$  está para a UHE assim como  $f$  está para a UTE”. A variável  $\gamma$  é o *valor marginal da água*. Considerando dois valores de volume d’água disponível para ser turbinado por uma UHE sob as mesmas condições,  $V_{tot1}$  e  $V_{tot2}$ ,  $V_{tot1} > V_{tot2}$ , podemos esperar que, se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são os valores marginais da água correspondentes, então  $\gamma_1 < \gamma_2$ .

É importante salientar que as conclusões acima também pressupõem que nenhum limite de geração foi atingido.

**Exemplo 7.3** *Uma carga deve ser alimentada durante 24 horas por uma UHE e uma UTE cujas características são:*

<b>UHE:</b>	$q(P_H) = 330 + 4,97 P_H \text{ dam}^3/h, \quad 0 \leq P_H \leq 1000 \text{ MW}$
<b>UTE:</b>	$F(P_T) = 575 + 9,2 P_T + 0,0184 P_T^2 \text{ MBtu/h}, \quad 150 \leq P_H \leq 1500 \text{ MW}$

*Os efeitos das perdas de transmissão são considerados desprezíveis, o máximo volume d’água a ser turbinado é de 100000 dam<sup>3</sup> e a carga varia conforme abaixo:*

00 : 00 – 12 : 00	1200 MW
12 : 00 – 24 : 00	1500 MW

*Determine os despachos da UHE e da UTE ao longo do período, bem como os custos marginais de energia do sistema e custos marginais da água.*

**Solução:** Dos dados do problema, vemos que  $h_1 = h_2 = 12 h$ . Como as perdas são desprezadas, podemos aplicar as conclusões da Subseção 7.5.2, e portanto

$$P_{T,1} = P_{T,2} = P_T$$

Das equações de balanço de potência, temos que

$$\begin{aligned} P_{H,1} + P_T &= 1200 \Rightarrow P_{H,1} = 1200 - P_T \\ P_{H,2} + P_T &= 1500 \Rightarrow P_{H,2} = 1500 - P_T \end{aligned}$$

Já a equação de restrição de volume fornece

$$h_1 q(P_{H,1}) + h_2 q(P_{H,2}) = V_{tot}$$

ou, como  $h_1 = h_2 = 12$ ,

$$12 [330 + 4,97 (1200 - P_T) + 330 + 4,97 (1500 - P_T)] = 100000$$

cuja solução fornece

$$P_{T,1} = P_{T,2} = P_T = 577,9 \text{ MW}$$

e conseqüentemente

$$\begin{aligned} P_{H,1} &= 1200 - P_T = 622,1 \text{ MW} \\ P_{H,2} &= 1500 - P_T = 922,1 \text{ MW} \end{aligned}$$

Os multiplicadores de Lagrange das equações de balanço de energia podem ser calculados da Eq. (7.19) como

$$\lambda_1 = \lambda_2 = h \frac{dF(P_{T,k})}{dP_{T,k}} = 12 \times (9,2 + 0,00368 \times 577,9) = 135,92 \text{ \$/MW}$$

Finalmente, o custo marginal da água é obtido da Eq. (7.20):

$$\gamma h \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} = \lambda \Rightarrow 12 \times 4,97 \times \gamma = 135,92$$

e portanto  $\gamma = 2,28 \text{ \$/dam}^3$ . ■

## 7.6 Solução Computacional da Coordenação Hidrotérmica de Curto Prazo

No caso geral em que as perdas de transmissão não podem ser desprezadas, a solução das equações de coordenação hidrotérmica (7.17) e (7.18) juntamente com as restrições de balanço de energia e de volume do problema (7.14) forma um conjunto de  $(6 j_{\max} + 1)$  equações não-lineares para determinar um igual número de incógnitas. Serão discutidos a seguir três algoritmos computacionais para resolver este problema.

### 7.6.1 Algoritmo da Iteração $\lambda - \gamma$

O método clássico para solução do problema de coordenação hidrotérmica é baseado no chamado algoritmo da iteração  $\lambda - \gamma$ . Ele consiste de três laços: o mais interno é um laço iterativo que ajusta os multiplicadores de Lagrange  $\lambda_j$  para obter uma solução das equações de coordenação hidrotérmica e da equação de balanço de potência. O laço intermediário meramente incrementa os intervalos de tempo até esgotar o horizonte de tempo de estudo. Finalmente, o laço mais externo ajusta iterativamente o multiplicador de Lagrange da restrição de volume,  $\gamma$ , até que esta restrição seja cumprida. O algoritmo é descrito abaixo. As tolerâncias  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  são números positivos de valor suficientemente pequeno para verificar o cumprimento das restrições de balanço de carga e de máximo volume a ser turbinado.

**Algoritmo 7.1** *Iteração  $\lambda - \gamma$*

1. Inicializar  $\lambda_k, \gamma$  e  $P_{T,k}$ ;
2. Inicializar contador de intervalos de tempo:  $j = 1$ ;
3. Resolver as equações de coordenação:

$$\begin{aligned} h_j \frac{dF(P_{T,j})}{dP_{T,j}} + \lambda_j \frac{\partial P_{perdas,j}}{\partial P_{T,j}} &= \lambda_j \\ h_j \gamma \frac{dq(P_{H,j})}{dP_{H,j}} + \lambda_j \frac{\partial P_{perdas,j}}{\partial P_{H,j}} &= \lambda_j \end{aligned}$$

para  $P_{T,j}$  e  $P_{H,j}$ ;

4. Verificar se a equação de balanço de carga

$$P_{L,j} + P_{perdas,j} - P_{H,j} - P_{T,j} \leq \varepsilon_1$$

é satisfeita. Em caso positivo, ir para o passo 5. Em caso negativo, projetar novo valor para  $\lambda_j$  e retornar ao passo 3;

5. Calcular  $q_j = q(P_{H,j})$ ;
6. Se  $j = j_{\max}$ , ir para o passo 7. Se não, fazer  $j \leftarrow j + 1$  e retornar ao passo 3;
7. Verificar cumprimento da restrição de máximo volume:

$$\left| \sum_{j=1}^{j_{\max}} h_j q(P_{H,j}) - V_{tot} \right| \leq \varepsilon_2$$

Se a restrição for satisfeita, **FIM**. Se não, projetar novo valor para  $\gamma$  e re-iniciar o processo iterativo no passo 3.

**Exemplo 7.4** *Reconsidere o Exemplo 7.3, agora supondo que a UHE está localizada a uma certa distância da carga, de modo que as perdas de transmissão são significativas e dependem apenas de  $P_H$ , sendo dadas por*

$$P_{perdas,j} = 8 \times 10^{-5} P_{H,j}^2, \quad j = 1, \dots, j_{\max}.$$

*Encontre os novos despachos da UHE e da UTE, bem como os multiplicadores de Lagrange e as perdas de transmissão.*

**Solução:** A aplicação do Algoritmo 7.1 fornece os seguintes resultados:

Período	$P_{T,j}(MW)$	$P_{H,j}(MW)$	$\lambda_j(\$/MW)$	$P_{perdas,j}(MW)$	$q_j(dam^3/h)$
00-12	567,4	668,3	135,46	35,73	3651,5
12-24	685,7	875,6	140,68	61,33	4681,7

O valor marginal da água determinado pelo algoritmo é igual a 2,028  $\$/dam^3$ .

As seguintes observações aplicam-se a este exemplo:

- A presença das perdas de transmissão faz com que não mais seja válida a conclusão da Subseção 7.5.2 a respeito da igualdade dos multiplicadores  $\lambda_j$  e das potências geradas pelas térmicas,  $P_{T,j}$ , ao longo dos intervalos de tempo;
- O fato das perdas serem produzidas apenas pela potência gerada pela UHE tem o efeito de “desvalorizar” a água, como pode ser verificado comparando-se o valor de  $\gamma$  calculado neste exemplo com o obtido no Exemplo 7.3.

■

## 7.6.2 Programação Quadrática Sequencial

A Programação Quadrática (PQ) é um dos problemas canônicos em Pesquisa Operacional. Trata-se de um problema de otimização em que a função-objetivo é quadrática e as restrições, tanto de igualdade quanto de desigualdade, são funções lineares das variáveis de decisão. Existem algoritmos bem definidos para a solução de problemas de PQ. O método primal-dual de pontos interiores, por exemplo, pode ser aplicado eficientemente à solução de problemas de PQ.

Quando a formulação do problema de interesse foge à definição dos problemas de PQ, muitas vezes ainda é possível aproximá-los de modo a aproveitar os algoritmos disponíveis. Este é o caso do problema de coordenação hidrotérmica, em que a função-objetivo é muitas vezes quadrática, como considerado neste capítulo, mas as restrições são não-lineares, pela presença das perdas de transmissão e/ou de funções de vazão não-lineares em  $P_H$ . Apesar disso, a solução deste problema pode ser obtida através de um processo iterativo em que, a cada iteração, as restrições são linearizadas com relação à solução da iteração anterior. Cada um dos problemas elementares, resolvidos a cada iteração, torna-se assim um problema de PQ, e a solução final é obtida através da solução sucessiva de tais problemas. Este método iterativo é conhecido como *Programação Quadrática Sequencial (PQS)*. Uma vantagem desta formulação é que restrições de desigualdade, tais como as de limite de geração, podem ser facilmente consideradas no problema, ao contrário dos algoritmos clássicos como o da Iteração  $\lambda - \gamma$ .

No capítulo seguinte, devotado ao problema de Fluxo de Potência Ótimo, serão dados maiores detalhes sobre o problema PQS e sua aplicação a problemas da operação de Sistemas Elétricos de Potência.

### 7.6.3 Método Primal-Dual de Pontos Interiores

O método primal-dual de pontos interiores, cuja aplicação ao problema de despacho econômico já foi abordada neste curso, pode ser também aplicado com vantagens ao problema de coordenação hidrotérmica. Entre estas vantagens, inclui-se a representação explícita das restrições de limites de geração, o que normalmente é considerado uma dificuldade para os algoritmos clássicos.

As subseções seguintes apresentam a formulação e as principais extensões do método de pontos interiores já apresentado no contexto do despacho econômico de unidades térmicas, visando sua aplicação ao problema de coordenação hidrotérmica.

#### Formulação do Problema

Seja um sistema composto por uma unidade hidráulica e uma unidade térmica equivalentes alimentando uma carga durante um horizonte de tempo composto por  $N$  intervalos de igual duração,  $h$ . A rede elétrica não é explicitamente representada. Supõe-se que a carga varia de intervalo para intervalo, porém é constante ao longo de cada intervalo. Além disso, a unidade hidráulica deve turbinar um volume especificado  $V_{esp}$  de água ao longo dos  $N$  intervalos de tempo. Supõe-se também que a potência gerada pela unidade hidráulica só depende da vazão turbinada. O problema de despacho hidrotérmico visa minimizar o custo total da unidade térmica utilizando para tanto o volume turbinável de água da maneira mais econômica possível. O problema de otimização correspondente é formulado como:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & F_T(\mathbf{P}_T) = \sum_{i=1}^N F(P_{T_i}) h \\
 \text{subject to:} \quad & \mathbf{P}_L + \ell(\mathbf{P}_T, \mathbf{P}_H) - \mathbf{P}_T - \mathbf{P}_H = 0 \\
 & e^T q(\mathbf{P}_H) h - V_{esp} = 0 \\
 & \mathbf{P}_T - \bar{\mathbf{P}}_T + \bar{\mathbf{s}}_t = 0 \\
 & -\mathbf{P}_T + \underline{\mathbf{P}}_T + \underline{\mathbf{s}}_t = 0 \\
 & \mathbf{P}_H - \bar{\mathbf{P}}_H + \bar{\mathbf{s}}_h = 0 \\
 & -\mathbf{P}_H + \underline{\mathbf{P}}_H + \underline{\mathbf{s}}_h = 0
 \end{aligned} \tag{7.22}$$

onde:

- $F(P_{T_i})$ : Custo da unidade térmica no intervalo  $i$ , em  $\$/h$ ;
- $\mathbf{P}_T$ : Vetor  $N \times 1$  das potências térmicas geradas nos  $N$  intervalos;
- $\mathbf{P}_H$ : Vetor  $N \times 1$  das potências hidráulicas geradas nos  $N$  intervalos;
- $q(\mathbf{P}_H)$ : Vetor  $N \times 1$  das vazões turbinadas nos  $N$  intervalos;
- $\mathbf{P}_L$ : Vetor  $N \times 1$  das cargas elétricas nos  $N$  intervalos;
- $\ell(\mathbf{P}_T, \mathbf{P}_H)$ : Vetor  $N \times 1$  das perdas de transmissão nos  $N$  intervalos;
- $\bar{\mathbf{P}}_T, \underline{\mathbf{P}}_T$ : Limites superiores e inferiores para a potência térmica gerada;
- $\bar{\mathbf{s}}_t, \underline{\mathbf{s}}_t$ : Variáveis de folga correspondentes aos limites de  $\mathbf{P}_T$ ;
- $\bar{\mathbf{P}}_H, \underline{\mathbf{P}}_H$ : Limites superiores e inferiores para a potência hidráulica gerada.
- $\bar{\mathbf{s}}_h, \underline{\mathbf{s}}_h$ : Variáveis de folga correspondentes aos limites de  $\mathbf{P}_H$ .

### Equações do Método de Newton para o Problema Primal/Dual Usando Ordenação por Tipo de Variável

**Função Lagrangeana e Condições Necessárias de Primeira Ordem** Adicionando-se barreiras logarítmicas para as variáveis não negativas, a função Lagrangeana para o problema (7.22) é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & F(\mathbf{P}_T) + \lambda^T (\mathbf{P}_L + \ell(\mathbf{P}_T, \mathbf{P}_H) - \mathbf{P}_T - \mathbf{P}_H) + \gamma(e^T q(\mathbf{P}_H) h - V_{esp}) \quad (7.23) \\ & \bar{\pi}_t^T (\mathbf{P}_T - \bar{\mathbf{P}}_T + \bar{\mathbf{s}}_t) + \underline{\pi}_t^T (-\mathbf{P}_T + \underline{\mathbf{P}}_T + \underline{\mathbf{s}}_t) + \\ & \bar{\pi}_h^T (\mathbf{P}_H - \bar{\mathbf{P}}_H + \bar{\mathbf{s}}_h) + \underline{\pi}_h^T (-\mathbf{P}_H + \underline{\mathbf{P}}_H + \underline{\mathbf{s}}_h) - \\ & \mu \sum_{k=1}^N \log \underline{s}_{t_k} - \mu \sum_{k=1}^N \log \bar{s}_{t_k} - \mu \sum_{k=1}^N \log \underline{s}_{h_k} - \mu \sum_{k=1}^N \log \bar{s}_{h_k} \end{aligned}$$

Os termos referentes aos limites de geração podem ser re-escritos como:

$$\begin{bmatrix} \bar{\pi}_t^T & \underline{\pi}_t^T & \bar{\pi}_h^T & \underline{\pi}_h^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & I & & \\ -I & 0 & & I & \\ 0 & I & & & I \\ 0 & -I & & & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_T \\ \mathbf{P}_H \\ \bar{\mathbf{s}}_t \\ \underline{\mathbf{s}}_t \\ \bar{\mathbf{s}}_h \\ \underline{\mathbf{s}}_h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_T \\ -\underline{\mathbf{P}}_T \\ \bar{\mathbf{P}}_H \\ -\underline{\mathbf{P}}_H \end{bmatrix}$$

ou, definindo-se apropriadamente as matrizes  $F_t$  e  $F_h$  e os vetores  $\pi$ ,  $s$  e  $\mathbf{P}_{\text{lim}}$ :

$$\pi^T \begin{bmatrix} F_t & F_h & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_T \\ \mathbf{P}_H \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} - \mathbf{P}_{\text{lim}}$$

Conseqüentemente, a função Lagrangeana torna-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & F(\mathbf{P}_T) + \lambda^T [\mathbf{P}_L + \ell(\mathbf{P}_T, \mathbf{P}_H) - \mathbf{P}_T - \mathbf{P}_H] + \gamma[e^T q(\mathbf{P}_H) h - V_{esp}] + (7.24) \\ & \pi^T (F_t \mathbf{P}_T + F_h \mathbf{P}_H + \mathbf{s} - \mathbf{P}_{\text{lim}}) - \mu \sum_{j=1}^N \log s_j \end{aligned}$$

As condições de otimalidade de primeira ordem são:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{P}_T} \mathcal{L} &= \nabla F(\mathbf{P}_T) + [L_t^T(\mathbf{P}_T, \mathbf{P}_H) - I] \lambda + F_t^T \pi = 0 \\ \nabla_{\mathbf{P}_H} \mathcal{L} &= [L_h^T(\mathbf{P}_T, \mathbf{P}_H) - I] \lambda + \gamma h Q_h^T(\mathbf{P}_H) e + F_h^T \pi = 0 \\ \nabla_{\lambda} \mathcal{L} &= \mathbf{P}_L + \ell(\mathbf{P}_T, \mathbf{P}_H) - \mathbf{P}_T - \mathbf{P}_H = 0 \\ \nabla_{\gamma} \mathcal{L} &= e^T q(\mathbf{P}_H) h - V_{esp} = 0 \\ \nabla_{\pi} \mathcal{L} &= F_t \mathbf{P}_T + F_h \mathbf{P}_H + \mathbf{s} - \mathbf{P}_{\text{lim}} = 0 \\ \nabla_s \mathcal{L} &= \pi - \mu S^{-1} e = 0 \implies S \Pi e - \mu e = 0 \end{aligned} \quad (7.25)$$

onde  $e$  é um vetor coluna de dimensões apropriadas cujos elementos são iguais à unidade

e

$$\begin{aligned}
L_t(\mathbf{P}_T, \mathbf{P}_H) &\triangleq \nabla_{\mathbf{P}_T} \ell(\mathbf{P}_T, \mathbf{P}_H) \\
L_h(\mathbf{P}_T, \mathbf{P}_H) &\triangleq \nabla_{\mathbf{P}_H} \ell(\mathbf{P}_T, \mathbf{P}_H) \\
Q_h(\mathbf{P}_H) &= \nabla_{\mathbf{P}_H} q(\mathbf{P}_H) \\
\Pi &\triangleq \text{diag}\{\pi_i\} \\
S &\triangleq \text{diag}\{s_i\}
\end{aligned} \tag{7.26}$$

Além disso, é conveniente também definir:

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_t(\mathbf{P}_T, \mathbf{P}_H) &\triangleq L_t(\mathbf{P}_T, \mathbf{P}_H) - I \\
\tilde{L}_h(\mathbf{P}_T, \mathbf{P}_H) &\triangleq L_h(\mathbf{P}_T, \mathbf{P}_H) - I \\
\tilde{Q}_h(\mathbf{P}_H) &\triangleq Q_h(\mathbf{P}_H) h
\end{aligned}$$

**Equações do Método de Newton** As equações do método de Newton para gerar uma direção de busca dada por:

$$\Delta \mathbf{u} = \left[ \Delta \mathbf{P}_T \quad \Delta \mathbf{P}_H \quad \Delta \boldsymbol{\lambda} \quad \Delta \boldsymbol{\gamma} \quad \Delta \boldsymbol{\pi} \quad \Delta \mathbf{s} \right]^T$$

são obtidas da equação:

$$\nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{P}_T^k, \mathbf{P}_H^k, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\gamma}^k, \boldsymbol{\pi}^k, \mathbf{s}^k) \times \Delta \mathbf{u} = -\nabla \mathcal{L}(\mathbf{P}_T^k, \mathbf{P}_H^k, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\gamma}^k, \boldsymbol{\pi}^k, \mathbf{s}^k) \tag{7.27}$$

onde  $\nabla^2 \mathcal{L}$  é a matriz Hessiana de  $\mathcal{L}$  e o expoente  $k$  indica valores das variáveis em um dado ponto de operação.

**Matrix Hessiana** Os termos não nulos da Hessiana são dados por:

- Primeira linha:

$$\nabla_{\mathbf{P}_T \mathbf{P}_T}^2 \mathcal{L} = \nabla^2 F(\mathbf{P}_T^k) + \sum_{i=1}^N \lambda_i^k \nabla_{\mathbf{P}_T \mathbf{P}_T}^2 \ell_i(\mathbf{P}_T^k, \mathbf{P}_H^k) \triangleq W_{\mathbf{P}_T \mathbf{P}_T} \tag{7.28}$$

e

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{P}_T \mathbf{P}_H}^2 \mathcal{L} &= \sum_{i=1}^N \lambda_i^k \nabla_{\mathbf{P}_T \mathbf{P}_H}^2 \ell_i(\mathbf{P}_T^k, \mathbf{P}_H^k) \triangleq W_{\mathbf{P}_T \mathbf{P}_H} \\
\nabla_{\mathbf{P}_T \boldsymbol{\lambda}}^2 \mathcal{L} &= L_t^T(\mathbf{P}_T^k, \mathbf{P}_H^k) - I = \tilde{L}_t^T(\mathbf{P}_T^k, \mathbf{P}_H^k) \\
\nabla_{\mathbf{P}_T \boldsymbol{\pi}}^2 \mathcal{L} &= F_t^T
\end{aligned}$$

- Segunda linha:

$$\nabla_{\mathbf{P}_H \mathbf{P}_T}^2 \mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \lambda_i^k \nabla_{\mathbf{P}_H \mathbf{P}_T}^2 \ell_i(\mathbf{P}_T^k, \mathbf{P}_H^k) \triangleq W_{\mathbf{P}_T \mathbf{P}_H}^T \tag{7.29}$$

$$\nabla_{\mathbf{P}_H \mathbf{P}_H}^2 \mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \left[ \lambda_i^k \nabla_{\mathbf{P}_H \mathbf{P}_H}^2 \ell_i(\mathbf{P}_T^k, \mathbf{P}_H^k) + \gamma^k h \nabla_{\mathbf{P}_H \mathbf{P}_H}^2 q_i(\mathbf{P}_H^k) \right] \triangleq W_{\mathbf{P}_H \mathbf{P}_H} \tag{7.30}$$

Os demais elementos desta linha são dados por:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{P}_H \boldsymbol{\lambda}}^2 \mathcal{L} &= L_h^T(\mathbf{P}_T^k, \mathbf{P}_H^k) - I = \tilde{L}_h^T(\mathbf{P}_T^k, \mathbf{P}_H^k) \\
\nabla_{\mathbf{P}_H \boldsymbol{\gamma}}^2 \mathcal{L} &= Q_h^T(\mathbf{P}_H^k) h e = \tilde{Q}_h^T(\mathbf{P}_H^k) e \\
\nabla_{\mathbf{P}_H \boldsymbol{\pi}}^2 \mathcal{L} &= F_h^T
\end{aligned}$$

- Terceira linha:

$$\begin{aligned}\nabla_{\lambda \mathbf{P}_T}^2 \mathcal{L} &= L_t(\mathbf{P}_T^k, \mathbf{P}_H^k) - I = \tilde{L}_t(\mathbf{P}_T^k, \mathbf{P}_H^k) \\ \nabla_{\lambda \mathbf{P}_H}^2 \mathcal{L} &= L_h(\mathbf{P}_T^k, \mathbf{P}_H^k) - I = \tilde{L}_h(\mathbf{P}_T^k, \mathbf{P}_H^k)\end{aligned}$$

- Quarta linha:

$$\nabla_{\gamma \mathbf{P}_H}^2 \mathcal{L} = e^T Q_h(\mathbf{P}_H^k) h = e^T \tilde{Q}_h(\mathbf{P}_H^k)$$

- Quinta linha:

$$\begin{aligned}\nabla_{\pi \mathbf{P}_T}^2 \mathcal{L} &= F_t \\ \nabla_{\pi \mathbf{P}_H}^2 \mathcal{L} &= F_h \\ \nabla_{\pi s}^2 \mathcal{L} &= I\end{aligned}$$

- Sexta linha:

$$\begin{aligned}\nabla_{s\pi}^2 \mathcal{L} &= S^k \\ \nabla_{ss}^2 \mathcal{L} &= \Pi^k\end{aligned}$$

### Componentes do Gradiente

Os componentes do gradiente dados nas Eqs. (7.25) devem ser calculados na solução corrente  $k$  para então compor o lado direito da Eq. (7.27). Denotando por  $b$  o vetor do lado direito, têm-se portanto:

$$\begin{aligned}b_1 &\triangleq -\nabla_{\mathbf{P}_T} \mathcal{L} = -[\nabla F(\mathbf{P}_T^k) + (L_t^T(\mathbf{P}_T^k, \mathbf{P}_H^k) - I) \boldsymbol{\lambda}^k + F_t^T \boldsymbol{\pi}^k] \\ b_2 &\triangleq -\nabla_{\mathbf{P}_H} \mathcal{L} = -[(L_h^T(\mathbf{P}_T^k, \mathbf{P}_H^k) - I) \boldsymbol{\lambda}^k + \gamma^k h Q_h^T(\mathbf{P}_H^k) e + F_h^T \boldsymbol{\pi}^k] \\ b_3 &\triangleq -\nabla_{\lambda} \mathcal{L} = -[\mathbf{P}_L + \ell(\mathbf{P}_T^k, \mathbf{P}_H^k) - \mathbf{P}_T^k - \mathbf{P}_H^k] \\ b_4 &\triangleq -\nabla_{\gamma} \mathcal{L} = -[e^T q(\mathbf{P}_H^k) h - V_{esp}] \\ b_5 &\triangleq -\nabla_{\pi} \mathcal{L} = -[F_t \mathbf{P}_T^k + F_h \mathbf{P}_H^k + s^k - \mathbf{P}_{lim}] \\ b_6 &\triangleq -\nabla_s \mathcal{L} = -[\Pi^k S^k e - \mu e = 0]\end{aligned} \quad (7.31)$$

### Equação do Método de Newton na Forma Explícita Usando Ordenação por tipo de Variável

A equação básica do método de Newton é dada por:

$$\nabla^2 \mathcal{L}^k \Delta \mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (7.33)$$

com  $b$  dado conforme acima e

$$\nabla^2 \mathcal{L}^k = \begin{bmatrix} W_{\mathbf{P}_T \mathbf{P}_T} & W_{\mathbf{P}_T \mathbf{P}_H} & \tilde{L}_t^T(\mathbf{P}_T^k, \mathbf{P}_H^k) & 0 & F_t^T & 0 \\ W_{\mathbf{P}_T \mathbf{P}_H}^T & W_{\mathbf{P}_H \mathbf{P}_H} & \tilde{L}_h^T(\mathbf{P}_T^k, \mathbf{P}_H^k) & \tilde{Q}_h^T(\mathbf{P}_H^k) e & F_h^T & 0 \\ \tilde{L}_t(\mathbf{P}_T^k, \mathbf{P}_H^k) & \tilde{L}_h(\mathbf{P}_T^k, \mathbf{P}_H^k) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^T \tilde{Q}_h(\mathbf{P}_H^k) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_t & F_h & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S^k & \Pi^k \end{bmatrix}, \quad (7.34)$$

$$\Delta u = [ \Delta \mathbf{P}_T \quad \Delta \mathbf{P}_H \quad \Delta \boldsymbol{\lambda} \quad \Delta \boldsymbol{\gamma} \quad \Delta \boldsymbol{\pi} \quad \Delta \mathbf{s} ]^T$$

### Observações:

- Considerando o fato da função-objetivo  $F(\mathbf{P}_T)$  ser separável no tempo e também que  $\ell_i(\mathbf{P}_T, \mathbf{P}_H)$  só depende de  $P_{T_i}$  e  $P_{H_i}$ , é possível se concluir que a matriz  $W_{\mathbf{P}_T \mathbf{P}_T}$  é diagonal. O mesmo se aplica às matrizes  $W_{\mathbf{P}_H \mathbf{P}_H}$ ,  $W_{\mathbf{P}_T \mathbf{P}_H}$ ,  $\tilde{L}_t$ ,  $\tilde{L}_h$  e  $\tilde{Q}_h$ ;
- De (7.34), observa-se que o vetor linha  $e^T \tilde{Q}_h(\mathbf{P}_H^k)$  acopla completamente as potências hidráulicas  $p_{h_i}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , o que confirma o caráter intertemporal da restrição de volume.

### Equações do Método de Newton para o Problema Primal/Dual Usando Ordenação por Intervalo de Tempo

Na seção anterior chegou-se a equações do método de Newton nas quais as incógnitas no vetor  $u$  foram organizadas de acordo com o tipo de variável. Nesta seção, as mesmas equações serão re-escritas ordenando-se as incógnitas por intervalo de tempo.

Considere portanto que as variáveis do problema que variam com o tempo são organizadas em cada intervalo como:

$$x_i \triangleq [ P_{T_i} \quad p_{h_i} \quad \lambda_i \quad \pi_i \quad s_i ]^T$$

Conseqüentemente, o vetor de incógnitas  $u$  da Seção 7.6.3 será re-ordenado como:

$$\mathbf{x} = [ x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_N \quad \gamma ]^T$$

Note que o multiplicador de Lagrange  $\gamma$  ocupa a última posição em  $x$  por ser a única variável que não varia com o tempo. As equações são também re-ordenadas na forma:

$$[ \nabla_{x_1 x_1}^2 \mathcal{L} \quad \nabla_{x_1 x_2}^2 \mathcal{L} \quad \cdots \quad \nabla_{x_1 \gamma}^2 \mathcal{L} \quad \cdots \quad \nabla_{\gamma x_1}^2 \mathcal{L} \quad \nabla_{\gamma x_1}^2 \mathcal{L} \quad \cdots \quad \nabla_{\gamma \gamma}^2 \mathcal{L} ]^T$$

e o vetor do lado direito,  $b$ , deve também ser re-ordenado correspondentemente. Denotaremos por  $b_M$  o resultado desta re-ordenação.

Com a nova ordenação de variáveis e equações, a equação matricial do método de Newton da Eq. (7.33) assume a forma:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} M_1 & & & & r^T \\ & M_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & M_N & \\ \hline & & & & r \end{array} \right] \times \Delta \mathbf{x} = \mathbf{b}_M \quad (7.35)$$

onde as matrizes  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , têm estrutura similar à da matriz de um problema de FPO convencional, e envolve apenas variáveis do intervalo  $i$ , isto é, as variáveis do

subvetor  $x_i$ . O vetor  $r$  na Eq. (7.35), por outro lado, depende da matriz  $Q_h$  definida em (7.26). Observe que, não fosse pela presença de  $r$ , os  $N$  problemas de FPO expressos pelas matrizes  $M_i$ , um para cada intervalo de tempo, seriam totalmente desacoplados. Em outras palavras, a presença da restrição de volume é a única razão pela qual a solução para o problema expresso pela Eq. (7.35) não pode ser obtida resolvendo-se  $N$  FPOs independentes.

## 7.7 Inclusão de Restrições Hidráulicas

Esta seção descreve uma forma mais detalhada de representação das UHEs, na qual são explicitamente representadas diversas variáveis hidráulicas. As restrições de volume são especificadas por intervalo de tempo e a formulação contempla a imposição de limites operacionais sobre as diversas variáveis hidráulicas.

A Fig. 7.5 representa esquematicamente as diversas variáveis hidráulicas envolvidas. São elas:

- $r_j$  : vazão afluyente para o reservatório durante o intervalo  $j$ , em  $hm^3/h$ ;
- $q_j$  : vazão turbinada, ou *engolimento*, no intervalo  $j$ , em  $hm^3/h$ ;
- $u_j$  : taxa de vertimento no intervalo  $j$ , em  $hm^3/h$ ;
- $V_j$  : volume armazenado no reservatório no intervalo  $j$ , em  $hm^3$ .

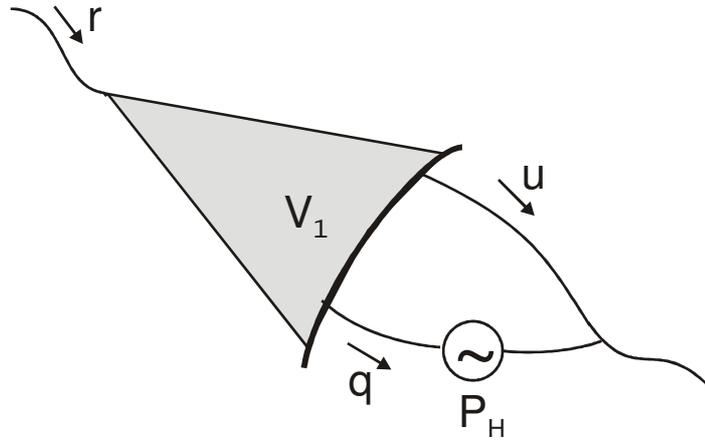


Figura 7.5: Variáveis hidráulicas associadas a uma usina hidrelétrica.

Mantém-se nesta seção a hipótese de que, no horizonte de curto prazo, a altura de água do reservatório não varia, de modo que a potência gerada pela UHE é função apenas da vazão turbinada, ou seja  $q_j = q(P_{H,j})$ .

A equação de balanço hídrico ou de conservação da água preconiza que, em qualquer intervalo de tempo genérico  $j$ , devemos ter

$$V_j = V_{j-1} + (r_j - q_j - u_j) h_j \quad (7.36)$$

Com a inclusão das novas variáveis hidráulicas, o problema de coordenação hidrotér-

mica pode ser enunciado como:

$$\min F_T = \sum_{j=1}^{j_{\max}} h_j F(P_{T,j})$$

sujeito a:

$$\left. \begin{aligned} P_{L,j} + P_{perdas,j} - P_{T,j} - P_{H,j} &= 0 \\ V_j - V_{j-1} - (r_j - q_j - u_j) h_j &= 0 \\ \underline{V} \leq V_j \leq \overline{V} \\ \underline{P}_T \leq P_{T,j} \leq \overline{P}_T \\ \underline{P}_H \leq P_{H,j} \leq \overline{P}_H \\ 0 \leq u_j \end{aligned} \right\}, \quad j = 1, \dots, j_{\max} \quad (7.37)$$

As seguintes observações se aplicam à formulação do problema (7.37):

1. A restrição de balanço hídrico na forma acima apresentada é uma versão mais detalhada da restrição de volume do problema (7.14). No caso acima, o volume inicial  $V_0$  deve ser especificado. Se, além disso, o volume final  $V_{j_{\max}}$  também for estritamente especificado, ambas as restrições são essencialmente equivalentes, com a diferença de que, no problema (7.37), é possível levar em conta limites especificados sobre cada  $V_j$  intermediário;
2. A última restrição apresentada na formulação do problema (7.37) é necessária para modelar corretamente os vertimentos, que não podem obviamente ser negativos.

A função Lagrangeana relativa ao problema (7.37) é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_{j=1}^{j_{\max}} F(P_{T,j}) h_j + \sum_{j=1}^{j_{\max}} \lambda_j (P_{L,j} + P_{perdas,j} - P_{H,j} - P_{T,j}) + \\ & \sum_{j=1}^{j_{\max}} \gamma_j [V_j - V_{j-1} - (r_j - q_j - u_j) h_j] + \\ & \sum_{j=1}^{j_{\max}} [\underline{\alpha}_j (V - V_j) + \overline{\alpha}_j (V_j - \overline{V})] + \\ & \sum_{j=1}^{j_{\max}} [\underline{\pi}_{T,j} (\underline{P}_T - P_{T,j}) + \overline{\pi}_{T,j} (P_{T,j} - \overline{P}_T)] + \\ & \sum_{j=1}^{j_{\max}} [\underline{\pi}_{H,j} (\underline{P}_H - P_{H,j}) + \overline{\pi}_{H,j} (P_{H,j} - \overline{P}_H)] \end{aligned} \quad (7.38)$$

Para simplificar a obtenção das condições de otimalidade, será suposto a seguir que não é permitida a operação com vertimento, isto é,  $u_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, j_{\max}$ . Segundo esta hipótese, as condições de factibilidade dual são:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{T,k}} = 0 & \Rightarrow h_k \frac{dF(P_{T,k})}{dP_{T,k}} - \lambda_k \left( 1 - \frac{\partial P_{perdas,k}}{\partial P_{T,k}} \right) - \underline{\pi}_{T,k} + \overline{\pi}_{T,k} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{H,k}} = 0 & \Rightarrow \gamma_k h_k \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} - \lambda_k \left( 1 - \frac{\partial P_{perdas,k}}{\partial P_{H,k}} \right) - \underline{\pi}_{H,k} + \overline{\pi}_{H,k} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_k} = 0 & \Rightarrow \gamma_j - \gamma_{j+1} - \underline{\alpha}_j + \overline{\alpha}_j = 0 \end{aligned} \right\} j = 1, \dots, j_{\max} \quad (7.39)$$

Além destas, teríamos ainda as condições de factibilidade primal e de folga complementar.

Se nenhum limite de volume é atingido para nenhum dos  $j_{\max}$  intervalos de tempo, então as condições de folga complementar garantem que

$$\underline{\alpha}_j = \bar{\alpha}_j = 0$$

Nestas condições, a terceira das Eqs. (7.39) fornece

$$\gamma_j = \gamma_{j+1}, \quad j = 1, \dots, j_{\max} - 1$$

Conclui-se portanto que o valor da água  $\gamma$  será constante ao longo de todo o horizonte de tempo *exceto se o limite de volume for atingido para algum intervalo de tempo*. Note que esta conclusão se aplica independentemente de os limites de geração serem ou não atingidos.

Suponha agora que o limite *superior* de volume tenha sido atingido no intervalo  $k$  apenas, sem que isto ocorra no intervalo  $k + 1$ . Isto significa que no intervalo  $k$  há abundância de água no reservatório. Neste caso, a terceira das Eqs. (7.39) nos fornece:

$$\gamma_k = \gamma_{k+1} - \bar{\alpha}_k$$

Como o multiplicador de Lagrange  $\bar{\alpha}_k$  é positivo, isto significa que  $\gamma_k < \gamma_{k+1}$ . Esta conclusão pode ser interpretada como segue. Como a oferta de água é maior no intervalo  $k$ , seu valor é menor do que no intervalo seguinte, onde por hipótese o limite de volume não é atingido. Uma conclusão análoga poderia ser extraída para o caso em que o limite mínimo é atingido para um dado intervalo  $k$ .

## 7.8 Programação de Curto Prazo em Sistemas Reais de Base Hidráulica

### 7.8.1 Introdução

No horizonte de curto prazo, estabelece-se a inter-relação entre o problema energético e o problema elétrico, buscando a forma mais *econômica* e *confiável* de balancear as participações hidráulica e térmica no atendimento da demanda. O objetivo econômico consiste em minimizar os custos operativos das térmicas, enquanto que o objetivo de confiabilidade consiste em evitar interrupções de fornecimento, sejam eles devidos a saídas imprevistas de operação de unidades geradoras ou simplesmente ao esgotamento dos estoques de energia armazenada nos reservatórios das UHEs. Há claramente um *tradeoff* entre estes dois objetivos. A estratégia operativa mais econômica não utilizaria geração térmica, porém conduz a altos riscos de racionamento, sendo portanto a menos confiável. Por outro lado, o uso pleno da geração térmica maximiza a segurança operativa, por manter os reservatórios nos seus níveis máximos. Porém esta estratégia é obviamente a menos econômica.

O objetivo da programação de curto prazo é balancear adequadamente estes dois objetivos. Fica claro que uma questão crucial neste contexto diz respeito ao uso dos volumes de água armazenado nos reservatórios das UHEs. Do ponto de vista estratégico,

o planejamento de curto prazo deve atender a requisitos fixados pelo planejamento de médio prazo. Estes podem ser expressos sob a forma de: (a) uma *meta de volume* que deve permanecer armazenado ao final do horizonte de curto prazo, ou (b) uma *função de custo futuro*, que de alguma forma quantifique sob a forma de custo as implicações futuras do uso da água no horizonte de curto prazo. Estas duas abordagens serão discutidas nas Subseções 7.8.3 e 7.8.4.

## 7.8.2 Modelagem Detalhada das Variáveis Hidráulicas

Para cumprir adequadamente os objetivos do planejamento da operação de curto prazo em sistemas com grande participação hidráulica, apresentando UHEs em cascata na mesma bacia e com reservatórios de grande capacidade de acumulação, torna-se necessário um maior detalhamento da modelagem hidráulica. Este consiste em: (a) estender a equação de balanço hídrico para considerar a existência de reservatórios em cascata; (b) levar em conta a dependência da potência gerada com respeito à altura de queda líquida, sendo esta última expressa em função do volume armazenado e vazão defluente.

### Reservatórios em cascata

Considere a Fig. 7.6, que ilustra a situação de três reservatórios em uma mesma bacia, em que o reservatório  $i$  está a jusante dos dois reservatórios  $m$  e  $k$ . Com a finalidade de simplificar o problema, será suposto que cada usina hidráulica é representada por de uma unidade geradora equivalente.

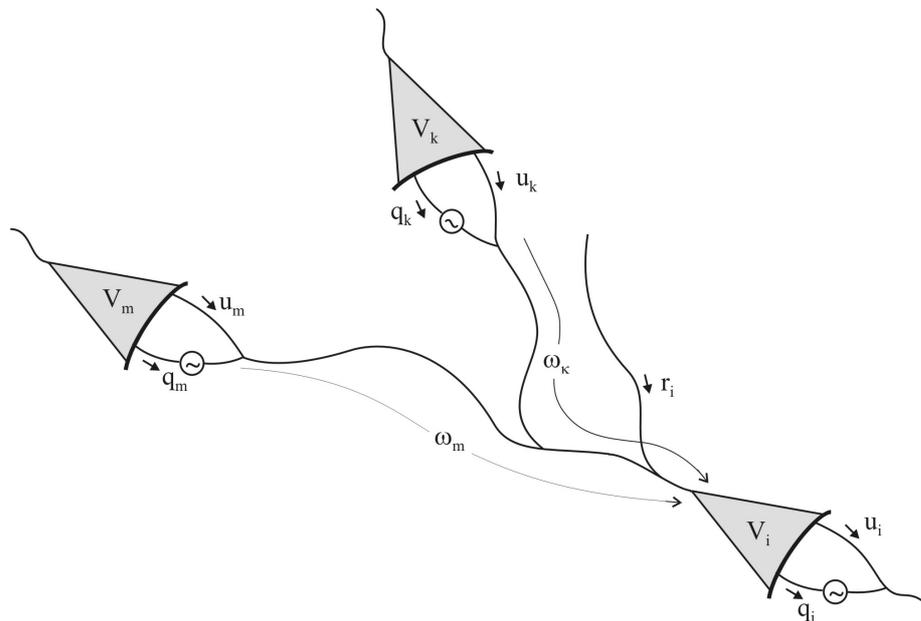


Figura 7.6: Usinas em cascata em uma mesma bacia hidrográfica.

A operação de reservatórios em cascata deve respeitar o balanço hídrico, também chamado princípio de conservação da água, que é dada por:

$$V_{i,j+1} = V_{i,j} + h_j r_{i,j} - h_j (q_{i,j} + u_{i,j}) + \sum_{\ell \in \Omega_i} h_j (q_{\ell,j-\omega_\ell} + u_{\ell,j-\omega_\ell}) \quad (7.40)$$

onde o índice  $i$  está associado a um dado reservatório, o índice  $j$  representa o intervalo de tempo em questão e a notação para as demais variáveis é a mesma das seções anteriores. Além disso:

- $\Omega_i$  : conjunto de usinas imediatamente a montante da usina  $i$ , e
- $\omega_\ell$  : tempo de atraso para a água defluente da usina  $\ell$  alcançar o reservatório da usina  $i$ .

### Potência gerada em função da vazão e da altura líquida de queda

A potência ativa produzida por uma usina hidráulica depende da vazão turbinada e da altura de queda líquida a que está submetida a turbina, como indicado a seguir:

$$P_{H_{i,j}} = K_i H_{l_i} q_{i,j} \quad (7.41)$$

onde

- $P_{H_{i,j}}$  : potência ativa gerada pela usina  $i$  no intervalo  $j$  ( $MW$ );
- $H_{l_i}$  : altura de queda líquida da usina  $i$  ( $m$ );
- $K_i$  : produtividade específica da usina  $i$ .  $K_i = \rho g \eta_i$ , sendo que:
  - $\rho$  : densidade da água ( $kg/m^3$ );
  - $g$  : aceleração da gravidade ( $m/s^2$ );
  - $\eta_i$  : rendimento do conjunto turbina-gerador da usina  $i$ .

A altura de queda líquida é dada pela diferença entre a altura de queda bruta e as perdas devidas ao atrito da água. A altura de queda bruta define-se como a diferença entre a altura a montante e a altura a jusante da usina, sendo estas funções não-lineares respectivamente do armazenamento e da vazão defluente. Assim, a potência gerada é dada pela Eq. (7.42). No entanto, como simplificação, as perdas de carga são desconsideradas no decorrer das seções seguintes.

$$P_{H_{i,j}} = K_j [H_v(V_{i,j}) - H_w(q_{i,j} + u_{i,j}) - pc_i] q_{i,j} \quad (7.42)$$

onde

- $H_v(V_{i,j})$  : polinômio que relaciona a altura a montante com o volume armazenado para o reservatório  $i$  no intervalo  $j$ ;
- $H_w(q_{i,j} + u_{i,j})$  : polinômio que relaciona a altura a jusante com a vazão defluente para o reservatório  $i$  no intervalo  $j$ ;
- $pc_i$  : perda de carga devida ao atrito da água no conduto forçado da usina  $i$ .

Finalmente, devem também ser levadas em consideração as limitações físicas e operativas associadas às variáveis hidráulicas:

$$\begin{aligned} \underline{V}_i &\leq V_{i,j} \leq \bar{V}_i \\ \underline{q}_i &\leq q_{i,j} \leq \bar{q}_i \\ 0 &\leq u_{i,j} \end{aligned}$$

### 7.8.3 Programação de Curto Prazo para Atender Metas de Volume

Segundo a estratégia de metas de volume ao final do horizonte de curto prazo, o armazenamento de cada reservatório  $i$  ao final do período,  $V_{i,j_{\max}}$ , não deve ser menor que um volume meta estabelecido, como indicado a seguir:

$$V_{i,j_{\max}} \geq V_{i_{Meta}}$$

Esta condição é considerada na formulação seguinte do problema de curto prazo através de uma ponderação dos volumes finais dos reservatórios na função-objetivo, penalizando os que estão abaixo da meta prefixada. Desta forma, o fator  $\xi$  na Eq. (7.43) deve penalizar os volumes inferiores à meta.

$$F_{MV}(\mathbf{V}_{j_{\max}}) = \sum_{i=1}^{N_H} \xi (V_{i_{Meta}} - V_{i,j_{\max}})^2 \quad (7.43)$$

O problema de otimização (7.44) a seguir apresenta a formulação da programação hidrotérmica de curto prazo no caso em que a meta hidráulica é expressa na forma de volume mínimo ao final do horizonte de curto prazo. Esta meta é incluída na função objetivo como uma penalidade sobre o volume ao final do horizonte, indicada de forma genérica como  $F_{MV}(\mathbf{V}_{j_{\max}})$ .

As restrições do problema incluem as condições de operação das variáveis hidráulicas, da geração térmica e dos fluxos nas linhas em cada intervalo de despacho, representados por  $\mathbf{f}$  em (7.43). Observa-se que a restrição de conservação da água vincula variáveis hidráulicas relacionadas a intervalos de despacho diferentes, tratando-se portanto de uma *restrição intertemporal*.

$$\begin{aligned} \min \quad & F_T(\mathbf{P}_T) + F_{MV}(\mathbf{V}_{j_{\max}}) \\ \text{s. a:} \quad & \left. \begin{array}{l} - \text{Eq. de balanço de pot. c/. repres. da rede no interv. } j \\ - \text{Restrições de limites:} \\ \quad \underline{\mathbf{f}} \leq \mathbf{f}_j \leq \bar{\mathbf{f}} \\ \quad \underline{\mathbf{P}}_{T,j} \leq \mathbf{P}_{T,j} \leq \bar{\mathbf{P}}_{T,j} \\ \quad \underline{\mathbf{V}}_j \leq \mathbf{V}_j \leq \bar{\mathbf{V}}_j \\ \quad \underline{\mathbf{q}}_j \leq \mathbf{q}_j \leq \bar{\mathbf{q}}_j \\ \quad 0 \leq \mathbf{u}_j \end{array} \right\} j = 1, \dots, j_{\max} \\ & - \text{Equações de balanço hídrico para todos os intervals. de tempo} \end{aligned} \quad (7.44)$$

As potências geradas pelas UHEs necessárias para os cálculos de balanço de potência devem ser calculadas pela Eq. (7.42), para  $i = 1, \dots, n_H$  e  $j = 1, \dots, j_{\max}$ .

### 7.8.4 Programação de Curto Prazo Considerando Custo Futuro

#### Custo Imediato e Custo Futuro

A estratégia de operação baseada na consideração do custo futuro baseia-se na comparação entre o benefício *imediato* do uso da água no presente com o benefício *futuro* de seu armazenamento. Este último é medido em termos da economia do uso do combustível pelas térmicas ao longo do tempo decorrido entre o final do horizonte de curto prazo e o final do horizonte total de estudo. As funções de custo imediato (FCI) e futuro (FCF) estão representadas na Fig. 7.7.

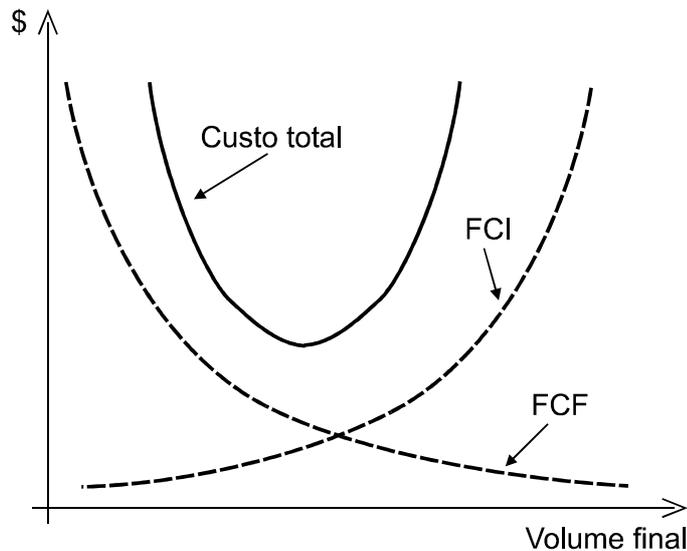


Figura 7.7: Funções de custo imediato e futuro.

A função FCI mede os custos de geração térmica no estágio  $j$ . Vê-se da Fig. 7.7 que o custo imediato aumenta com o aumento do volume armazenado ao final do estágio, isto é, com a redução da energia de origem hidráulica disponível para turbinamento durante o próprio estágio.

Em contrapartida, a função FCF está associada ao *custo esperado* de geração térmica e racionamento desde o final do estágio  $j$  até o final do horizonte total de estudo. Já que uma maior disponibilidade de água armazenada ao final do estágio  $j$  implica em mais energia de origem hidráulica disponível para o futuro, a função FCF diminui à medida que o volume final aumenta.

A inclusão dos custos futuros da água na função objetivo do problema visa diminuir os custos térmicos no futuro associados à geração hidráulica no presente. Assim, o modelo obtém o ponto de operação ótimo como um compromisso entre os custos de gerar com combustível térmico no presente e/ou utilizar energia hidráulica, o qual poderia resultar em maiores custos no futuro.

A função FCF é calculada no horizonte de médio prazo através de simulações de diversos cenários de operação futura, definidos por níveis de armazenamento e de vazões afluentes. Trata-se evidentemente de um problema probabilístico, envolvendo

um grande número de cenários hidrológicos. A ferramenta utilizada é a Programação Dinâmica Estocástica Dual, e FCF é obtida através de cortes de Benders, sendo portanto uma função linear por partes conforme indicado na Fig. 7.8. A minimização do custo futuro neste caso é descrita como:

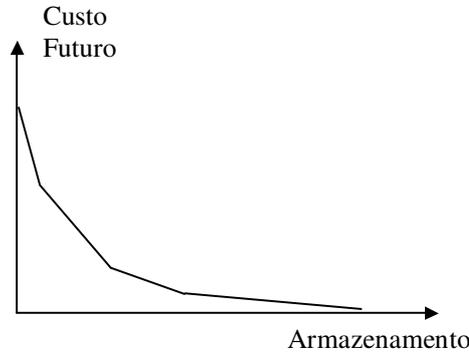


Figura 7.8: Custo futuro como uma função linear por partes.

$$\begin{aligned} \alpha_j(V_j) = \min \quad & \alpha \\ \text{s.a.} \quad & \\ & \alpha \geq C_{C_{k,j}} - \sum_{\ell=1}^{n_H} C_{V_{k,\ell,j}} V_{\ell,j}, \quad i = 1, \dots, n_C \end{aligned} \quad (7.45)$$

onde:

- $V_{\ell,j}$  : Volume do reservatório  $\ell$  ao final do estágio  $j$ ;
- $\alpha_j(V_j)$  : Custo total esperado de operação desde o final do estágio  $j$  até o final do horizonte total de estudo;
- $n_C$  : Número de segmentos lineares da FCF;
- $C_{V_{k,\ell,j}}$  : Coeficiente de corte  $k$ , associado ao volume da usina  $\ell$  no intervalo  $j$ ;
- $C_{C_{k,j}}$  : Termo constante associado ao corte  $k$  no intervalo  $j$ .

### Formulação da Programação de Curto Prazo com Base na FCF

Com o objetivo de representar o custo futuro da água, considera-se que os custos futuros devem ser expressos em função do volume ao final do horizonte,  $\mathbf{V}_{j_{\max}}$ . O horizonte de curto prazo é dividido em intervalos de despacho, para os quais deve-se definir o nível de geração hidráulica e geração térmica. As equações de continuidade da água estabelecem um acoplamento entre os intervalos de despacho.

Assim, procura-se minimizar o custo imediato de operação durante o horizonte completo mais o custo futuro da água, que depende do armazenamento ao final do mencionado horizonte.

Observa-se que é possível aproximar a função de custo futuro, dada a partir da função linear por partes da Fig. 7.8, por uma curva contínua e diferenciável do volume final, a qual chamaremos  $F_{CF}(\mathbf{V}_{j_{\max}})$ . Quando esta aproximação é utilizada, a formulação apresentada em (7.44) pode ser aplicada, com a única diferença que, na função-objetivo  $F_{CF}(\mathbf{V}_{j_{\max}})$  deve substituir  $F_{MV}(\mathbf{V}_{j_{\max}})$ .

Contudo, no problema (7.46) a seguir, apresenta-se a formulação da programação hidrotérmica de curto prazo quando a função de custo futuro é dada por uma curva linear por partes. Devem ser adicionadas as restrições do custo futuro, definidas no problema (7.45), às restrições do problema.

$$\begin{aligned}
 & \min F_T(\mathbf{P}_T) + \alpha \\
 & \text{s. a:} \\
 & \quad \left. \begin{array}{l}
 - \text{Eq. de balanço de pot. c/. repres. da rede no interv. } j \\
 - \text{Restrições de limites:} \\
 \mathbf{f} \leq \mathbf{f}_j \leq \bar{\mathbf{f}} \\
 \underline{\mathbf{P}}_{T,j} \leq \mathbf{P}_{T,j} \leq \bar{\mathbf{P}}_{T,j} \\
 \underline{\mathbf{V}}_j \leq \mathbf{V}_j \leq \bar{\mathbf{V}}_j \\
 \underline{\mathbf{q}}_j \leq \mathbf{q}_j \leq \bar{\mathbf{q}}_j \\
 0 \leq \mathbf{u}_j
 \end{array} \right\} j = 1, \dots, j_{\max} \\
 & \quad - \text{Equações de balanço hídrico para todos os intervs. de tempo} \\
 & \quad \alpha \geq C_{C_{k,j}} - \sum_{\ell=1}^{n_H} C_{V_{k,\ell,j}} V_{\ell,j}, \quad i = 1, \dots, n_C
 \end{aligned} \tag{7.46}$$

Como no caso das metas de volume, as potências geradas pelas UHEs necessárias para os cálculos de balanço de potência devem ser calculadas pela Eq. (7.42), para  $i = 1, \dots, n_H$  e  $j = 1, \dots, j_{\max}$ .