3.6.1.2 Aplicação do Método da Função Barreira Logarítmica ao FPO

Usando a função barreira logarítmica, a formulação do problema de FPO modificada é a seguinte:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & c(x,u) - \mu \sum_{i=1}^{p} \ln s_i \\ \text{sujeito a:} & g(x,u) = 0 \\ & f(x,u) + s = 0 \end{array}$$

A função Lagrangeana correspondente ao problema é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x,u,\lambda,\pi) = \; & c(x,u) - \mu \sum_{i=1}^{p} \ln\, s_i \\ & + \lambda^T g(x,u) + \pi^T (f(x,u) + s) \end{aligned}$$

e as condições de KKT são:

$$\begin{array}{rcrcl} \nabla_u \mathcal{L} & = & \nabla_u\, c(x,u) + G_u^T\, \lambda + F_u^T\, \pi & = & 0 \\ \nabla_x \mathcal{L} & = & \nabla_x\, c(x,u) + G_x^T\, \lambda + F_x^T\, \pi & = & 0 \\ & & g(x,u) & = & 0 \\ & & f(x,u) + s & = & 0 \\ \nabla_{s_i} \mathcal{L} & = & -\mu / s_i + \pi_i & = & 0,\; i = 1, \ldots, p \end{array}$$

A última equação pode ser re-escrita como:

$$\Pi\, S\, e = \mu\, e$$

onde $\Pi = diag(\pi_i^{(k)})$ e $S = diag(s_i^{(k)})$. Observe que esta equação traduzirá a folga de complementaridade quando $\mu \to 0$.

Aplicando-se o método de Newton às condições de KKT obtem-se o seguinte sistema de equações linearizadas, que deve ser resolvido a cada iteração:

$$\begin{array}{rcl} W_{uu}\, \Delta u + W_{ux}\, \Delta x + G_u^T\, \Delta\lambda + F_u^T\, \Delta\pi & = & b_u^{(k)} \\ W_{xu}\, \Delta u + W_{xx}\, \Delta x + G_x^T\, \Delta\lambda + F_x^T\, \Delta\pi & = & b_x^{(k)} \\ G_u\, \Delta u + G_x\, \Delta x & = & b_\lambda^{(k)} \\ F_u\, \Delta u + F_x \Delta x + \Delta s & = & b_\pi^{(k)} \\ S\, \Delta\pi + \Pi\, \Delta s & = & b_s^{(k)} \end{array}$$

Note que a última equação é a única que não apresenta simetria com as demais. As matrizes W e os elementos do vetor do lado direito são definidos como:

$$\begin{aligned}
W_{uu} &= \nabla^2_{uu}\, c(x,u) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 g_{pi}}{\partial u^2}\, \lambda_{pi} + \frac{\partial^2 g_{qi}}{\partial u^2} \lambda_{qi} \right) + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 f_i}{\partial u^2}\, \pi_i \\
W_{ux} &= \nabla^2_{ux}\, c(x,u) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 g_{pi}}{\partial u \partial x}\, \lambda_{pi} + \frac{\partial^2 g_{qi}}{\partial u \partial x} \lambda_{qi} \right) + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 f_i}{\partial u \partial x}\, \pi_i \\
W_{xu} &= W_{ux}^T \\
W_{xx} &= \nabla^2_{xx}\, c(x,u) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 g_{pi}}{\partial x^2}\, \lambda_{pi} + \frac{\partial^2 g_{qi}}{\partial x^2} \lambda_{qi} \right) + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}\, \pi_i
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
b_u^{(k)} &= -\nabla_u\, c(x^{(k)}, u^{(k)}) - G_u^T\, \lambda^{(k)} - F_u^T\, \pi^{(k)} \\
b_x^{(k)} &= -\nabla_x\, c(x^{(k)}, u^{(k)}) - G_x^T\, \lambda^{(k)} - F_x^T\, \pi^{(k)} \\
b_\lambda^{(k)} &= -g(x^{(k)}, u^{(k)}) \\
b_\pi^{(k)} &= -f\,(x^{(k)}, u^{(k)}) - s^{(k)} \\
b_s^{(k)} &= \mu\, e - \Pi\, S\, e
\end{aligned}$$

As equações do método de Newton obtidas acima podem ser resolvidas por fatoração LU, mas é mais eficiente eliminar primeiro Δs do sistema. Da última equação linearizada podemos obter Δs:

$$\Delta s = \Pi^{-1}\, (b_s^{(k)} - S\, \Delta\pi)$$

resultando no seguinte sistema reduzido:

$$\begin{bmatrix} W_{uu} & W_{ux} & G_u^T & F_u^T \\ W_{ux}^T & W_{xx} & G_x^T & F_x^T \\ G_u & G_x & 0 & 0 \\ F_u & F_x & 0 & -\Pi^{-1}\, S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta x \\ \Delta\lambda \\ \Delta\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_u^{(k)} \\ b_x^{(k)} \\ b_\lambda^{(k)} \\ \widehat{b}_\pi^{(k)} \end{bmatrix}$$

onde

$$\widehat{b}_\pi^{(k)} = b_\pi^{(k)} - \Pi^{-1}\, b_s^{(k)}$$

Estas equações podem ainda ser reduzidas através da eliminação de $\Delta\pi$, obtido da equação:

$$\Delta\pi = -S^{-1}\Pi\, (\, \widehat{b}_\pi^{(k)} - F_u\, \Delta u - F_x \Delta x)$$

Esta última redução fornece finalmente o sistema reduzido:

$$\begin{bmatrix} \widehat{W}_{uu} & \widehat{W}_{ux} & G_u^T \\ \widehat{W}_{ux}^T & \widehat{W}_{xx} & G_x^T \\ G_u & G_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta x \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{b}_u^{(k)} \\ \widehat{b}_x^{(k)} \\ \widehat{b}_\lambda^{(k)} \end{bmatrix}$$

onde:

$$
\begin{aligned}
\widehat{W}_{uu} &= W_{uu} + F_u^T\, S^{-1} \Pi\, F_u \\
\widehat{W}_{ux} &= F_u^T\, S^{-1} \Pi\, F_x \\
\widehat{W}_{xx} &= W_{xx} + F_x^T\, S^{-1} \Pi\, F_x \\
\widehat{b}_u^{(k)} &= b_u^{(k)} + F_u^T\, S^{-1} \Pi\, \widehat{b}_\pi^{(k)} \\
\widehat{b}_x^{(k)} &= b_x^{(k)} + F_x^T\, S^{-1} \Pi\, \widehat{b}_\pi^{(k)}
\end{aligned}
$$

O sistema acima é simétrico, mas a matriz de coeficientes não é positiva-definida. Assim, o sistema pode ser resolvido for fatoração LDL^T mas isto requer o uso de pivôs 2×2 e ordenação adequada.