Alocação de Unidades via Relaxação Lagrangeana

Prof. Antonio Simões Costa
Grupo de Sistemas de Potência
EEL - UFSC

Relaxação Lagrangeana: Conceitos Iniciais

2

Alocação de Unidades via Relaxação Lagrangeana (I)

- Motivação:
  - Solução via Programação Dinâmica apresenta muitas desvantagens para problemas envolvendo muitas unidades geradoras:
    - Grande dimensionalidade $\Rightarrow$ problema intratável;
    - Redução da dimensionalidade via redução do espaço de estados tende a gerar soluções não-ótimas.

3

Alocação de Unidades via Relaxação Lagrangeana (II)

- Características:
  - Contorna problemas de dimensionalidade (embora gere novos problemas que devem ser enfrentados);
  - Baseia-se em uma abordagem de otimização dual;
  - Utiliza variáveis que assumem apenas valores 0 ou 1:

$$\begin{cases} u_i^t = 0, & \text{se unidade i está desligada durante o período t;} \\ u_i^t = 1, & \text{se unidade i está operando durante o período t.} \end{cases}$$

4

Formulação do Problema

$$\min \quad F(P,u) \triangleq \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}[F_i(P_i^t) + ST_{i,t}]u_i^t$$

s. a

- $P_L^t - \sum_{i=1}^{N} P_i^t u_i^t = 0, \quad t = 1, \ldots, T$
- $u_i^t \underline{P}_i \leq P_i^t \leq u_i^t \overline{P}_i, \quad \begin{cases} i = 1, \ldots, N \\ t = 1, \ldots, T \end{cases}$
- Restrições de mínimos tempos de permanência *em* e *fora* de operação

5

Função Lagrangeana

- Desconsiderando temporariamente as restrições de limites e de permanência em e fora de operação, temos:

$$\mathcal{L}(P,u,\lambda) = F(P,u) + \sum_{t=1}^{T} \lambda^t \left(P_L^t - \sum_{i=1}^{N} P_i^t u_i^t\right)$$

6

Observações sobre a estrutura do problema:

- A função-objetivo ***F(P_i^t,u_i^t)***, as restrições de limites e as restrições de permanência em e fora de operação são *separáveis quanto às unidades geradoras;*
- Por outro lado, as restrições de balanço de carga

$$P_L^t - \sum_{i=1}^{N} P_i^t u_i^t = 0, \quad t = 1, \ldots, T$$

acoplam as potências das unidades geradoras.

7

Estratégia de Solução via Relaxação Lagrangeana

- As restrições acopladoras de balanço de carga são *relaxadas*, isto é, temporariamente ignoradas, e o problema é resolvido como se elas não existissem;
- A relaxação das restrições baseia-se na solução do problema mediante procedimentos de *Otimização Dual.*

8

Otimização Dual:

Teoria e Algoritmo

9

Otimização Dual (I)

- Considere o problema:

$$\begin{array}{ll} \text{min} & f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \text{s. a} & \\ & \omega(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{array}$$

- cuja Função Lagrangeana é:

$$\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda\, \omega(x_1, \ldots, x_n)$$

10

Otimização Dual (II)

- Função Dual:

$$q(\lambda) = \min_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n, \lambda)$$

- *Problema Dual:*

$$q^*(\lambda) = \max_{\lambda > 0} q(\lambda)$$

11

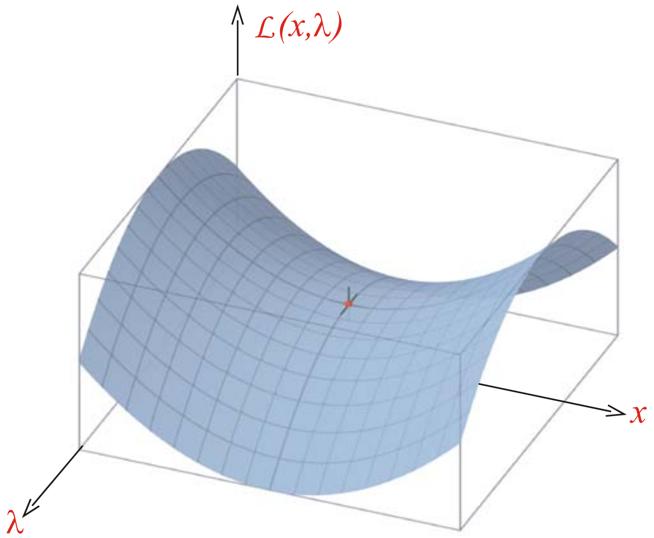
Otimização Dual – Caracterização da Solução

- Prova-se que a solução ótima é um *ponto de sela* da função Lagrangeana, isto é:

$$\boxed{\mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda) \leq \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \leq \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda^*)}$$

12

Otimização Dual – Ilustração da Solução



13

Otimização Dual - Solução

- Envolve dois problemas de otimização distintos:
  1. A partir de um conjunto de valores iniciais de x, encontrar o valor de λ que maximiza $q(\lambda)$;
  2. Mantendo este valor de λ constante, encontrar os valores de x que minimizam $\mathcal{L}(x, \lambda)$.
- Este processo se repete iterativamente até a solução final.

14

Ajuste de λ (I)

- Como $\mathcal{L}(x, \lambda)$ é linear em λ e esta variável não é sujeita a limites, a maximização de $q(\lambda)$ não pode ser feita de forma convencional;
- λ deve ser ajustado de modo a garantir um aumento no valor de $q(\lambda)$;
- Uma forma viável de ajuste é utilizar o método do gradiente com um controle de passo via um parâmetro α:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \alpha \left[\frac{d}{d\lambda} q(\lambda)\right]$$

15

Ajuste de λ (II)

- O parâmetro α deve ser ajustado para permitir taxas diferentes de crescimento e decrescimento de $q(\lambda)$;
- Exemplo:

$$\alpha = \begin{cases} 0,5 \text{ se } \frac{dq}{d\lambda} \text{ é positivo;} \\ 0,1 \text{ se } \frac{dq}{d\lambda} \text{ é negativo.} \end{cases}$$

16

Critério de Convergência

- Baseado na brecha *("gap")* de dualidade;
- De posse da solução do problema dual em cada iteração, é possível se calcular o valor da função-objetivo do problema primal, J^*;
- Uma boa medida da proximidade da solução ótima é dada pela *brecha de dualidade relativa:*

$$\frac{J^* - q^*}{q^*}$$

- Em problemas convexos, a brecha de dualidade deve ir a zero. Isto não acontece quando o problema envolve variáveis não-contínuas.

Otimização Dual:

Exemplo de Aplicação

Exemplo Numérico

$$\min \quad J(\mathbf{x},\mathbf{u}) = (0,25x_1^2 + 15)u_1 + (0,255x_2^2 + 15)u_2$$

s. a

$$\omega(\mathbf{x},\mathbf{u}) = 5 - x_1u_1 - x_2u_2 = 0$$

$$0 \leq x_1, x_2 \leq 10$$

$$u_1, u_2 = 1 \quad ou \quad 0$$

19

Exemplo Numérico: solução por enumeração (I)

- Há quatro possíveis soluções:
  - $u_1 = u_2 = 0$: Não gera soluções factíveis (ver restr. igual.);
  - $u_1 = 1$ e $u_2 = 0$: gera solução trivial $x_1 = 5$ e x_2 excluído do problema $\Rightarrow$ $J = 21,25$;
  - $u_1 = 0$ e $u_2 = 1$: gera solução trivial $x_2 = 5$ e x_1 excluído do problema $\Rightarrow$ $J = 21,375$;
  - $u_1 = u_2 = 1$

20

Exemplo Numérico: solução por enumeração (II)

- ***$u_1 = u_2 = 1$:*** neste caso, a função Lagrangeana é

$$\mathcal{L} = (0,25x_1^2 + 15) + (0,255x_2^2 + 15) + \lambda\,(5 - x_1 - x_2)$$

- A solução minimizadora neste caso é

$$x_1 = 2,5248;\ \ x_2 = 2,4752;\ \ \lambda = 1,2642$$

e ***$J = 33,1559$.***

Portanto, a solução ótima do problema é ***$u_1^* = 1$, $u_2^* = 0$ e $x_1^* = 5$.***

21

Exemplo Numérico: solução via Otimização Dual

- Função Lagrangeana do problema original:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{u},\lambda) \;&=\; (0,25x_1^2 + 15)u_1 + (0,255x_2^2 + 15)u_2 \\ &\quad +\lambda\,(5 - x_1u_1 - x_2u_2)\end{aligned}$$

- A *função dual* neste caso é definida como

$$q(\lambda) = \min_{\mathbf{x},\mathbf{u}} \mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{u},\lambda)$$

- e o *Problema Dual* é

$$q^*(\lambda) = \max_{\lambda > 0} q(\lambda)$$

22

Algoritmo da Solução via Otimização Dual (I)

1. Escolher um valor fixo para λ, λ^k. $\mathcal{L}$ pode agora ser minimizada com respeito a x e u. Rearranjando $\mathcal{L}$:

$$(0,25x_1^2+15-x_1\lambda^k)u_1+(0,255x_2^2+15-x_2\lambda^k)u_2+5\lambda^k$$

- Último termo fixo $\Rightarrow$ minimização é sobre demais termos, cada um deles multiplicado por variável do tipo 0-1;
- O mínimo pode ser obtido minimizando-se cada termo;
- O valor mínimo de cada termo será zero (se $u_i = 0$) ou *negativo*, se $u_i = 1$.

23

Algoritmo da Solução via Otimização Dual (II)

- Se $u_2 = 1$, o valor ótimo de x_1 é obtido de

$$\frac{d}{dx_1}\underbrace{(0,25x_1^2+15-x_1\lambda^k)}_{f_1}=0$$

- Caso x_1 extrapole seus limites, é feito igual ao limite violado;
- Se o termo f_1 for positivo $\Rightarrow$ $u_1 = 0$; se não, $u_1 = 1$.

24

Algoritmo da Solução via Otimização Dual (III)

- Se $u_2 = 1$, o valor ótimo de x_2 é obtido de

$$\frac{d}{dx_2} \underbrace{\left(0,255x_2^2 + 15 - x_2\lambda^k\right)}_{f_2} = 0$$

- Caso x_2 extrapole seus limites, é feito igual ao limite violado;
- Se o termo f_2 for positivo $\Rightarrow$ $u_2 = 0$; se não, $u_2 = 1.$

Algoritmo da Solução via Otimização Dual (IV)

2. Considerando agora u_1, u_2, x_1 e x_2 fixos, achar um valor de λ que aumente o valor de $q(\lambda)$, como anteriormente:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \alpha \left[\frac{d}{d\lambda} q(\lambda)\right]$$

onde a derivada acima é igual à restrição de igualdade $\omega(x,u) = 5 - x_1u_1 - x_2u_2$ e α é ajustado como antes.

Algoritmo da Solução via Otimização Dual (V)

- Enquanto u_1, u_2 forem nulos, $\nabla q(\lambda) = 5$, levando a um aumento de λ;
- A partir de um certo valor de λ, os valores de

$$(0,25x_1^2 + 15 - x_1\lambda^k) \quad \text{ou} \quad (0,255x_2^2 + 15 - x_2\lambda^k)$$

ou ambos se tornarão negativos $\Rightarrow$ u_1 ou u_2 ou ambos serão feitos iguais a 1;

- Volta-se então ao Passo 1 para determinar novos valores para u_1, u_2, x_1 e x_2 .

Otimização Dual – Critério de Parada (I)

- Na presença de variáveis (0,1), não é possível encontrar um λ^k que torne o problema factível c/ resp. às restr. igual.;
- Porém, com os valores de u_1 e u_2 obtidos em cada iteração, pode-se obter o mínimo de $J(x,u)$ usando-se métodos convencionais para minimizar

$$(0,25x_1^2+15)u_1+(0,255x_2^2+15)u_2+\lambda^k(5-x_1u_1-x_2u_2)$$

- Denotaremos a solução deste problema por

$$x_1 = \bar{x}_1, \quad x_2 = \bar{x}_2 \text{ e } \lambda = \bar{\lambda} \quad \Rightarrow \quad J^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2, u_1, u_2)$$

- Se $u_1 = u_2 = 0$, faz-se J^* igual a um valor alto (p.ex., 50).

Otimização Dual – Critério de Parada (II)

- J^* inicia o processo iterativo com um valor alto, que decresce gradativamente;
- O valor dual $q^*(\lambda)$, por outro lado, começa como zero e aumenta;
- A brecha de dualidade relativa $BDR = (J^* - q^*)/ q^*$ se reduz ao longo das iterações, mas a presença das variáveis (0,1) em geral não permite que ela chegue a zero.

29

Otimização Dual – Resultados das Iterações (I)

Iter.	λ	u_1	u_2	x_1	x_2	q^*	ω	$\bar{\lambda}$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	J^*	BDR
1	0,00	0	0	0,00	0,00	0,00	5,00	–	–	–	50,00	–
2	1,00	0	0	2,00	1,96	5,00	5,00	–	–	–	50,00	9,00
3	2,00	0	0	4,00	3,92	10,00	5,00	–	–	–	50,00	4,00
4	3,00	0	0	6,00	5,88	15,00	5,00	–	–	–	50,00	2,33
5	4,00	1	1	8,00	7,84	18,31	−10,84	1,26	2,52	2,47	33,16	0,81
6	3,95	1	1	7,89	7,74	18,89	−10,62	1,26	2,52	2,47	33,16	0,75
7	3,89	1	0	7,78	7,63	19,31	−2,78	2,50	5,00	–	21,25	0,10
8	3,88	1	0	7,76	7,60	19,35	−2,76	2,50	5,00	–	21,25	0,09

Observações:

- λ é inicializado como zero;
- convergência lenta, com variáveis (0,1) trocando de valor;

30

Otimização Dual – Resultados das Iterações (II)

Iter.	λ	u_1	u_2	x_1	x_2	q^*	ω	$\overline{\lambda}$	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	J^*	BDR
1	0,00	0	0	0,00	0,00	0,00	5,00	–	–	–	50,00	–
2	1,00	0	0	2,00	1,96	5,00	5,00	–	–	–	50,00	9,00
3	2,00	0	0	4,00	3,92	10,00	5,00	–	–	–	50,00	4,00
4	3,00	0	0	6,00	5,88	15,00	5,00	–	–	–	50,00	2,33
5	4,00	1	1	8,00	7,84	18,31	−10,84	1,26	2,52	2,47	33,16	0,81
6	3,95	1	1	7,89	7,74	18,89	−10,62	1,26	2,52	2,47	33,16	0,75
7	3,89	1	0	7,78	7,63	19,31	−2,78	2,50	5,00	–	21,25	0,10
8	3,88	1	0	7,76	7,60	19,35	−2,76	2,50	5,00	–	21,25	0,09

Observações:

- ω torna se negativo $\Rightarrow$ decrescimento de λ;
- Solução não é estável: iterações adicionais levam a outras mudanças nos valores das variáveis (0,1).

Aplicação da Relaxação Lagrangeana Ao Problema de Alocação de Unidades

Formulação do Problema

$$\min \quad F(P,u) \triangleq \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{N} [F_i(P_i^t) + ST_{i,t}]u_i^t$$

s. a

- $P_L^t - \sum_{i=1}^{N} P_i^t u_i^t = 0, \quad t = 1, \ldots, T$
- $u_i^t \underline{P}_i \leq P_i^t \leq u_i^t \overline{P}_i, \quad \begin{cases} i = 1, \ldots, N \\ t = 1, \ldots, T \end{cases}$
- Restrições de mínimos tempos de permanência *em* e *fora* de operação

33

Função Lagrangeana

- Como vimos, se desconsiderarmos temporariamente as restrições de limites e de permanência em e fora de operação, temos:

$$\mathcal{L}(P,u,\lambda) = F(P,u) + \sum_{t=1}^{T} \lambda^t (P_L^t - \sum_{i=1}^{N} P_i^t u_i^t)$$

ou ainda

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{N} [F_i(P_i^t) + ST_{i,t}]u_i^t + \sum_{t=1}^{T} \lambda^t (P_L^t - \sum_{i=1}^{N} P_i^t u_i^t)$$

34

Aplicação da otimização dual

- Em seguida, devemos formar a *Função Dual*

$$q(\lambda) = \min_{P_i^t, u_i^t} \mathcal{L}(P, u, \lambda)$$

e resolver o Problema Dual:

$$q^*(\lambda) = \max_{\lambda > 0} q(\lambda)$$

35

Passos do Algoritmo

1. Encontrar valores para λ^t capaz de aumentar o valor de $q(\lambda)$;
2. Considerando fixo o valor λ^t de determinado no Passo 1, achar o mínimo de $\mathcal{L}$ através de ajustes em P^t e u^t .

- Consideraremos inicialmente o Passo 2, supondo que valores para todos os λ^t já foram determinados e serão considerados fixos na minimização de $\mathcal{L}$.

36

Minimização de $\mathcal{L}$ (P,u,λ) (I)

- A função Lagrangeana do problema é

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}[F_i(P_i^t)+ST_{i,t}]u_i^t + \sum_{t=1}^{T}\lambda^t(P_L^t - \sum_{i=1}^{N} P_i^t u_i^t)$$

que pode ser re-escrita como:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}[F_i(P_i^t)+ST_{i,t}]u_i^t - \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\lambda^t P_i^t u_i^t + \underbrace{\cancel{\sum_{t=1}^{T}\lambda^t P_L^t}}_{\text{constante}}$$

37

Minimização de $\mathcal{L}$ (P,u,λ) (II)

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}[F_i(P_i^t)+ST_{i,t}]u_i^t - \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\lambda^t P_i^t u_i^t + \underbrace{\cancel{\sum_{t=1}^{T}\lambda^t P_L^t}}_{\text{constante}}$$

- O termo constante não afeta a minimização e será desconsiderado. $\mathcal{L}$ pode então ser re-escrita como:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N}\underbrace{\left(\sum_{t=1}^{T}\left\{[F_i(P_i^t) + ST_{i,t}]u_i^t - \lambda^t P_i^t u_i^t\right\}\right)}_{\text{pode ser resolvido para cada unidade geradora independentemente!}}$$

38

Minimização de $\mathcal{L}$ (P,u,λ) (III)

- Com λ = constante , mostra-se portanto que

$$\min_{P,u} \mathcal{L}(P,u,\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \min_{P_i^t, u_i^t} \left\{ \sum_{t=1}^{T} \left(\widetilde{F}_i(P_i^t, ST_{i,t}, u_i^t) - \lambda^t P_i^t u_i^t \right) \right\}$$

onde $\widetilde{F}_i$ inclui apenas componentes de custo da unidade ***i*** .

- Logo, o mínimo de $\mathcal{L}$ é obtido obtendo-se o mínimo para cada unidade geradora sobre todos os intervalos de tempo, sujeito a:
  - Limites máximo e mínimo de geração, para cada intervalo *t* ;
  - Restrições de *up-* e *down-time.*

39

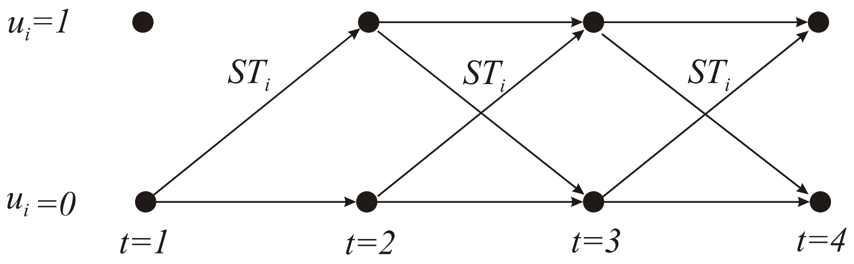
Minimização para uma Unidade Geradora

- Dados os valores de λ^t , $t = 1, ..., T$, o mínimo para uma unidade é obtido resolvendo-se um problema de *Programação Dinâmica* em uma única variável;

- Há apenas dois estados possíveis para uma dada unidade i no intervalo t , correspondentes a $u_i^t = 1$ ou 0.

40

Programação Dinâmica para uma Unidade



41

Solução via Programação Dinâmica (I)

- No estado $u_i^t = 0$, o valor da função a ser minimizada é trivial, isto é, é igual a zero;
- No estado $u_i^t = 1$, o problema a ser resolvido é (sem considerar os custos de partida, já que a minimização é com respeito a P_i^t):

$$\min \ \mathcal{L}_i = \left[F_i(P_i^t) - \lambda^t P_i^t\right]$$

42

Solução via Programação Dinâmica (II)

- No estado $u_i^t = 1$, o problema a ser resolvido é

$$\min \ \mathcal{L}_i = \left[F_i(P_i^t) - \lambda^t P_i^t\right]$$

cuja solução é obtida de

$$\frac{d\mathcal{L}_i}{dP_i^t} = \frac{d}{dP_i^t} F_i(P_i^t) - \lambda^t = 0$$

ou

$$\boxed{\frac{d}{dP_i^t} F_i(P_i^{t*}) = \lambda^t}$$

43

Solução via Programação Dinâmica (III)

- Considerando-se os limites de geração, os mínimos viáveis são:

$$P_i^{t*} \leq \underline{P}_i \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_i^* = F_i(\underline{P}_i) - \lambda^t \underline{P}_i$$

$$\underline{P}_i \leq P_i^{t*} \leq \bar{P}_i \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_i^* = F_i(P_i^{t*}) - \lambda^t P_i^{t*}$$

$$P_i^{t*} \geq \bar{P}_i \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_i^* = F_i(\bar{P}_i^t) - \lambda^t \bar{P}_i^t$$

44

Solução via Programação Dinâmica (IV)

- A solução da programação dinâmica para cada unidade é obtida da maneira usual, considerando os tempos mínimos de permanência em e fora de operação e custos de partida;
- Como $J_i^* = 0$ para $u_i^t = 0$, a única forma de gerar um valor menor com $u_i^t = 1$ exige que

$$\left[F_i(P_i^t) - \lambda^t P_i^t\right] < 0$$

- A solução do problema para cada gerador independente-mente contorna o problema de dimensionalidade da *PD*.

45

Ajuste de λ

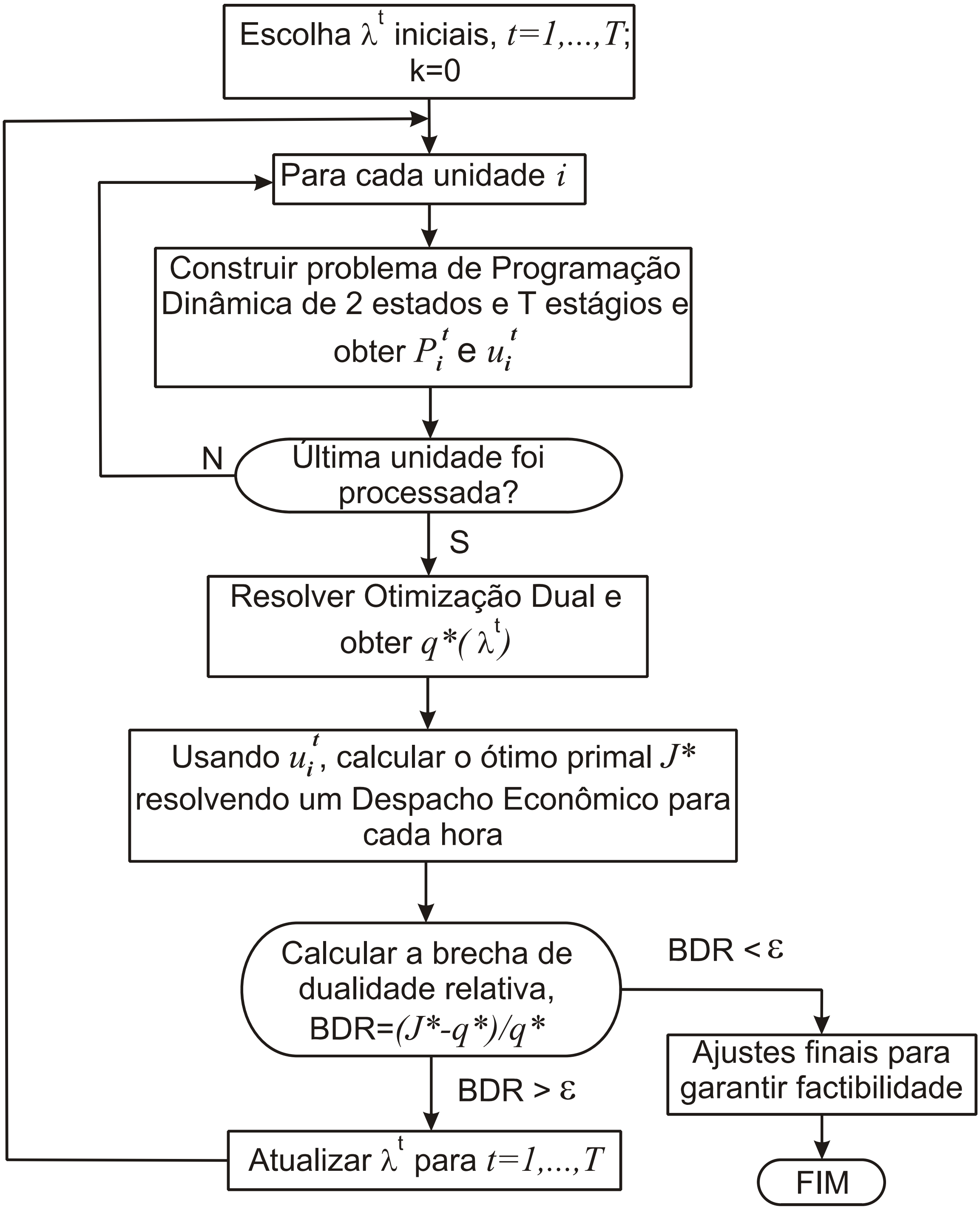
- Resolvido os problemas de *PD* para cada uma das N unidades, deve-se agora gerar novos valores do vetor λ que levem a um aumento da função dual $q(\lambda)$;
- Isto é feito usando-se os subgradientes, com cada λ^t tratado separadamente e α dependente do sinal do subgradiente:

$$\lambda^{t,k+1} = \lambda^{t,k} + \alpha \left[\frac{d}{d\lambda} q(\lambda^{t,k})\right]$$

- Algoritmo completo

46

Alocação de Unidades via Relaxação Lagrangeana



Exemplo

Curvas de Custo (P's em MW)	$\underline{P}(MW)$	$\overline{P}(MW)$
$F_1(P_1) = 500 + 10\ P_1 + 0,0020\ P_1^2$	100	600
$F_2(P_2) = 300 + 8\ P_2 + 0,0025\ P_2^2$	100	400
$F_3(P_3) = 100 + 6\ P_3 + 0,0050\ P_3^2$	50	200

Carga

t	$P_L^t\ (MW)$
1	170
2	520
3	1100
4	330

Dados do Exemplo

- Desconsideram-se os custos de partida e as restrições de mínima permanência em e fora de operação;
- A cada hora, é executado um Despacho Econômico (DE) para cálculo de J^*, desde que haja geração suficiente alocada nesta hora;
- Não havendo geração alocada suficiente, $J^* = 40.000$;
- Em caso contrário, J^* é o custo total de geração somado sobre as 4 horas, conforme calculado pelo DE;
- $\alpha = 0,01$ se $dq/d\lambda > 0$ e $0,002$ em caso contrário.

Iteração 1

Hora	λ^t	u_1	u_2	u_3	P_1	P_2	P_3	ω^t	P_1^{DE}	P_2^{DE}	P_3^{DE}
1	0,00	0	0	0	0	0	0	170	0	0	0
2	0,00	0	0	0	0	0	0	520	0	0	0
3	0,00	0	0	0	0	0	0	1100	0	0	0
4	0,00	0	0	0	0	0	0	330	0	0	0

$q(\lambda) = 0.0$ $\quad J^* = 40.000$ $\quad BDR = indef$

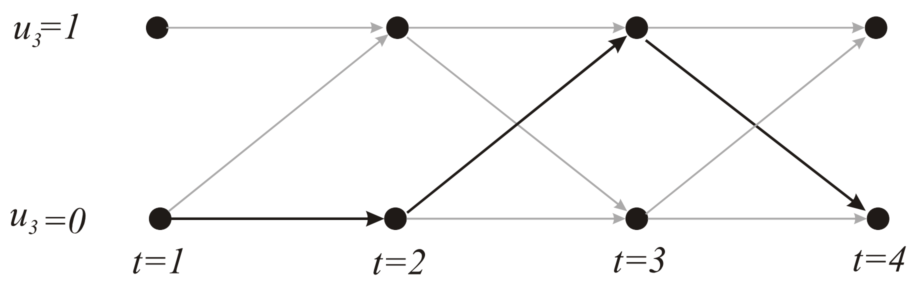
onde

$\omega^t = P_L^{\,t} - \Sigma P_i^{\,t} u_i^{\,t}$ e $BDR = (J^* - q) / q$

49

Programação Dinâmica aplicada à Unidade 3 (2ª. Iteração)

λ	1,7	5,2	11,0	3,3
$\mathcal{L}$	327,5	152,5	-700,0	247,5



50

Iteração 2

Hora	λ^t	u_1	u_2	u_3	P_1	P_2	P_3	ω^t	P_1^{DE}	P_2^{DE}	P_3^{DE}
1	1,7	0	0	0	0	0	0	170	0	0	0
2	5,2	0	0	0	0	0	0	520	0	0	0
3	11,0	0	1	1	0	400	200	500	0	0	0
4	3,3	0	0	0	0	0	0	330	0	0	0

$q(\lambda) = 14.982$ $\quad J^* = 40.000$ $\quad BDR = 1,67$

Iteração 3

Hora	λ^t	u_1	u_2	u_3	P_1	P_2	P_3	ω^t	P_1^{DE}	P_2^{DE}	P_3^{DE}
1	3,4	0	0	0	0	0	0	170	0	0	0
2	10,4	0	1	1	0	400	200	−80	0	320	200
3	16,0	1	1	1	600	400	200	−100	500	400	200
4	6,6	0	0	0	0	0	0	330	0	0	0

$q(\lambda) = 18.344$ $\quad J^* = 36.024$ $\quad BDR = 0,965$

Iteração 4

Hora	λ^t	u_1	u_2	u_3	P_1	P_2	P_3	ω^t	P_1^{DE}	P_2^{DE}	P_3^{DE}
1	5,1	0	0	0	0	0	0	170	0	0	0
2	10,24	0	1	1	0	400	200	−80	0	320	200
3	15,8	1	1	1	600	400	200	−100	500	400	200
4	9,9	0	1	1	0	380	200	−250	0	130	200

$q(\lambda) = 19.214$ $\quad J^* = 28.906$ $\quad BDR = 0,502$

53

Iteração 5

Hora	λ^t	u_1	u_2	u_3	P_1	P_2	P_3	ω^t	P_1^{DE}	P_2^{DE}	P_3^{DE}
1	6,8	0	0	0	0	0	0	170	0	0	0
2	10,08	0	1	1	0	400	200	−80	0	320	200
3	15,6	1	1	1	600	400	200	−100	500	400	200
4	9,4	0	0	1	0	0	200	130	0	0	0

$q(\lambda) = 19.532$ $\quad J^* = 36.024$ $\quad BDR = 0,844$

54

Iteração 6

Hora	λ^t	u_1	u_2	u_3	P_1	P_2	P_3	ω^t	P_1^{DE}	P_2^{DE}	P_3^{DE}
1	$8,5$	0	0	1	0	0	200	-30	0	0	170
2	$9,92$	0	1	1	0	384	200	-64	0	320	200
3	$15,4$	1	1	1	600	400	200	-100	500	400	200
4	$10,07$	0	1	1	0	400	200	-270	0	130	200

$q(\lambda) = 19.442$ $\quad J^* = 20.170$ $\quad BDR = 0,037$

Observações finais sobre o exemplo

- Iterações adicionais não alteram muito a alocação, embora isto não signifique que a solução é estável;
- Com mais algumas iterações, a *BDR* se reduz um pouco, mas verifica-se instabilidade já que a unidade 2 fica no limite entre ser ou não alocada;
- Uma tolerância de 0,05 para convergência parece ser adequada neste caso $\Rightarrow$ convergência na sexta iteração.