Despacho Econômico via Método Primal/Dual de Pontos Interiores

Prof. Antonio Simões Costa

GSP - Labspot

Formulação do Despacho Econômico utilizando variáveis de folga

- Variáveis, $\bar{s}_i$ e $\underline{s}_i$, *não-negativas*, introduzidas para converter *restrições de desigualdade* em *restrições de igualdade:*

Problema DE:

$$
\begin{array}{lrcll}
\min & F_T(P) & = & \sum_{i=1}^{N} F_i(P_i) & \\
s.\ a & & & & \\
 & P_L - \sum_{i=1}^{N} P_i & = & 0 & \\
 & P_i + \bar{s}_i & = & \bar{P}_i, & i = 1, \ldots, N \\
 & -P_i + \underline{s}_i & = & -\underline{P}_i, & i = 1, \ldots, N \\
 & \bar{s}_i, \underline{s}_i & \geq & 0, & i = 1, \ldots, N
\end{array}
$$

Função Lagrangeana

$$\mathcal{L}(P,\lambda,\bar{\pi},\underline{\pi},\bar{s},\underline{s}) = F_T(P) + \lambda^T(P_L - e^T P) + \bar{\pi}^T(P+\bar{s}-\bar{P}) + \underline{\pi}^T(-P+\underline{s}+\underline{P})$$

- Expressão pode ser simplificada definindo-se:

$$F_P \triangleq \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix}, \quad s \triangleq \begin{bmatrix} \bar{s} \\ \underline{s} \end{bmatrix}, \quad \pi = \begin{bmatrix} \overline{\pi} \\ \underline{\pi} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_{\lim} \triangleq \begin{bmatrix} \overline{P} \\ -\underline{P} \end{bmatrix}$$

Função Lagrangeana

$$\mathcal{L}(P,\lambda,\bar{\pi},\underline{\pi},\bar{s},\underline{s}) = \begin{array}{l} F_T(P) + \quad \lambda^T(P_L - e^T P) + \\ \quad \bar{\pi}^T(P + \bar{s} - \bar{P}) + \quad \underline{\pi}^T(-P + \underline{s} + \underline{P}) \end{array}$$

- Expressão pode ser simplificada definindo-se:

$$F_P \triangleq \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix}, \quad s \triangleq \begin{bmatrix} \bar{s} \\ \underline{s} \end{bmatrix}, \quad \pi = \begin{bmatrix} \overline{\pi} \\ \underline{\pi} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_{\lim} \triangleq \begin{bmatrix} \overline{P} \\ -\underline{P} \end{bmatrix}$$

- Função Lagrangeana com novas definições:

$$\mathcal{L}(P,\lambda,\pi,s) = F_T(P) + \lambda^T(P_L - e^T P) + \pi^T(F_P\ P + s - P_{\lim})$$

Condições de KKT

- Considerando a Lagrangeana anterior, as condições de factibilidade dual e primal são:

$$
\begin{array}{rcccc}
\nabla_P \mathcal{L} & = & \nabla F_T - \lambda\, e + F_P^T\, \pi & = & 0 \\
\nabla_\lambda \mathcal{L} & = & P_L - e^T\, P & = & 0 \\
\nabla_\pi \mathcal{L} & = & F_P\, P + s - P_{\lim} & = & 0
\end{array}
$$

e as *condições de folga complementar:*

$$
\left.
\begin{array}{rcl}
s_i\, \pi_i & = & 0 \\
s_i & \geq & 0 \\
\pi_i & \geq & 0
\end{array}
\right\}, \; i = 1, \ldots, 2N
$$

- *Fatores complicadores:* não-linearidade e condições de não-negatividade de π_i e s_i nas condições de folga complementar.

Dificuldades para resolver as condições de KKT (I)

- Pode-se resolver as equações de factibilidade primal e dual e a equação incluída na condição de complementaridade:

$$
\begin{aligned}
\nabla F_T - \lambda\ e + F_P^T\ \pi &= 0 \\
P_L - e^T\ P &= 0 \\
F_P\ P + s - P_{\text{lim}} &= 0 \\
s_i\ \pi_i &= 0
\end{aligned}
$$

Dificuldades para resolver as condições de KKT (I)

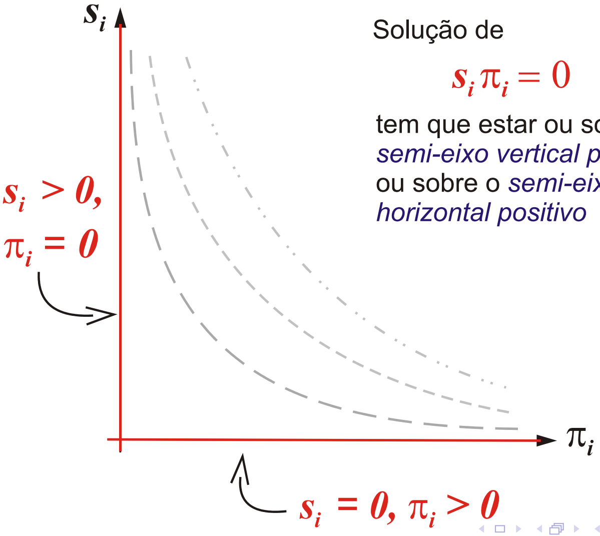
- Pode-se resolver as equações de factibilidade primal e dual e a equação incluída na condição de complementaridade:

$$\begin{aligned} \nabla F_T - \lambda\ e + F_P^T\ \pi &= 0 \\ P_L - e^T\ P &= 0 \\ F_P\ P + s - P_{\text{lim}} &= 0 \\ s_i\ \pi_i &= 0 \end{aligned}$$

- Porém, não temos nenhuma garantia de que s_i e π_i serão não-negativos na solução.

Dificuldades para resolver as condições de KKT (II)

Ilustração gráfica do problema:



Solução de

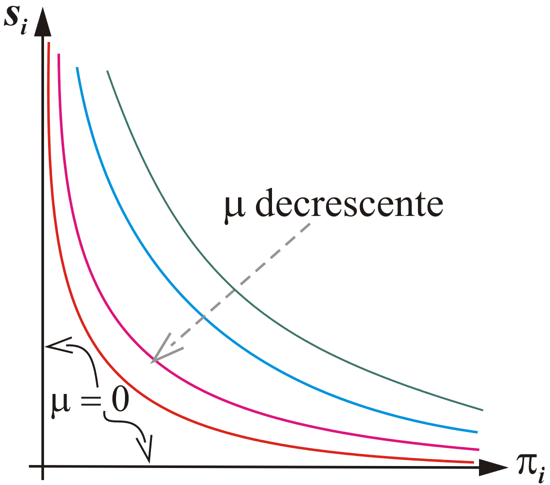
$$s_i \pi_i = 0$$

tem que estar ou sobre o *semi-eixo vertical positivo* ou sobre o *semi-eixo horizontal positivo*

Relaxação da condição de complementaridade

- Condição original:
$$\pi_i \times s_i = 0$$
- Condição relaxada:
$$\pi_i \times s_i = \mu, \quad \mu > 0$$
- Em notação matricial:
$$\mathbf{S}\ \boldsymbol{\pi} = \mu \mathbf{e}$$
- Valor relativamente alto de μ torna condição de folga complementar relaxada suave e analítica;
- Problema relaxado para um dado μ é denotado como Problema $\mathbf{DE}_\mu$.

Interpretação gráfica da relaxação da cond. complem.



Problema DE modificado

- A relaxação da folga complementar altera o problema original **DE;**

Problema DE modificado

- A relaxação da folga complementar altera o problema original **DE;**
- Soluções dos problemas $($**DE** e **DE**$_{\mu})$ se aproximam para valores de μ próximos a zero;

Problema DE modificado

- A relaxação da folga complementar altera o problema original **DE;**
- Soluções dos problemas $($**DE** e **DE**$_\mu)$ se aproximam para valores de μ próximos a zero;
- **Procedimento:**

Problema DE modificado

- A relaxação da folga complementar altera o problema original **DE;**
- Soluções dos problemas (**DE** e $\mathbf{DE}_{\mu}$) se aproximam para valores de μ próximos a zero;
- **Procedimento:**
  - Adota-se valor inicial alto para μ, para facilitar solução das condições de otimalidade (com cond. complem. relaxada);

Problema DE modificado

- A relaxação da folga complementar altera o problema original **DE;**
- Soluções dos problemas $(\mathbf{DE}$ e $\mathbf{DE}_\mu)$ se aproximam para valores de μ próximos a zero;
- **Procedimento:**
  - Adota-se valor inicial alto para μ, para facilitar solução das condições de otimalidade (com cond. complem. relaxada);
  - Após solução para um dado $\mu^{(k)}$, faz-se $\mu^{(k+1)} < \mu^{(k)}$ e solução do problema $k =$ condição inicial para problema $k+1$;

Problema DE modificado

- A relaxação da folga complementar altera o problema original **DE;**
- Soluções dos problemas ($\mathbf{DE}$ e $\mathbf{DE}_{\mu}$) se aproximam para valores de μ próximos a zero;
- **Procedimento:**
  - Adota-se valor inicial alto para μ, para facilitar solução das condições de otimalidade (com cond. complem. relaxada);
  - Após solução para um dado $\mu^{(k)}$, faz-se $\mu^{(k+1)} < \mu^{(k)}$ e solução do problema $k =$ condição inicial para problema $k + 1$;
  - Processo de redução de μ é reaplicado, sempre utilizando resultado anterior como condição inicial;

Problema DE modificado

- A relaxação da folga complementar altera o problema original **DE;**
- Soluções dos problemas ($\mathbf{DE}$ e $\mathbf{DE}_\mu$) se aproximam para valores de μ próximos a zero;
- **Procedimento:**
  - Adota-se valor inicial alto para μ, para facilitar solução das condições de otimalidade (com cond. complem. relaxada);
  - Após solução para um dado $\mu^{(k)}$, faz-se $\mu^{(k+1)} < \mu^{(k)}$ e solução do problema k = condição inicial para problema $k+1$;
  - Processo de redução de μ é reaplicado, sempre utilizando resultado anterior como condição inicial;
  - $\mu \to 0 \Rightarrow$ solução do Problema **DE**:

$$\mathbf{DE}_{\mu_1} \to \mathbf{DE}_{\mu_2} \to \cdots \to \mathbf{DE}_{\mu_k} \to \cdots \to \mathbf{DE}$$

onde

$$\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_k > 0$$

Solução do Problema Relaxado (I)

- Definir matriz S das variáveis de folga:

$$S = diag\{\bar{s}_i, \ldots, \bar{s}_N, \underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_N\}$$

- Re-escrever folga complementar como:

$$S\ \pi - \mu e = 0$$

- Sistema de equações a ser resolvido para um valor genérico μ :

$$\begin{aligned} \nabla F_T - \lambda\ e + F_P^T\ \pi &= 0 \\ P_L - e^T\ P &= 0 \\ F_P\ P + s - P_{\lim} &= 0 \\ S\ \pi - \mu_k\ e &= 0 \end{aligned}$$

Solução do Problema Relaxado (II)

- Cond. complem. relax. torna problem não-linear mesmo com funções de produção quadráticas $\Longrightarrow$ solução por método iterativo;

Solução do Problema Relaxado (II)

- Cond. complem. relax. torna problem não-linear mesmo com funções de produção quadráticas $\Longrightarrow$ solução por método iterativo;
- Método de Newton é utilizado:

$$\boxed{\nabla^2 \mathcal{L}|_k \; \Delta\mathbf{x} = -\nabla \mathcal{L}|_k}$$

onde:

Solução do Problema Relaxado (II)

- Cond. complem. relax. torna problem não-linear mesmo com funções de produção quadráticas $\Longrightarrow$ solução por método iterativo;
- Método de Newton é utilizado:

$$\boxed{\nabla^2 \mathcal{L}|_k \ \Delta\mathbf{x}\text{=-}\nabla \mathcal{L}|_k}$$

onde:

  - $\nabla \mathcal{L}|_k$: gradiente de $\mathcal{L}$ calculado no ponto k;

Solução do Problema Relaxado (II)

- Cond. complem. relax. torna problem não-linear mesmo com funções de produção quadráticas $\Longrightarrow$ solução por método iterativo;
- Método de Newton é utilizado:

$$\boxed{\nabla^2 \mathcal{L}|_k \ \Delta \mathbf{x} = -\nabla \mathcal{L}|_k}$$

onde:

  - $\nabla \mathcal{L}|_k$: gradiente de $\mathcal{L}$ calculado no ponto k;
  - $\nabla^2 \mathcal{L}|_k$: matriz Hessiana de $\mathcal{L}$ calculada no ponto k, e

$$\Delta \mathbf{x} = [\Delta P, \Delta\lambda, \Delta\pi, \Delta s]^T$$

  determina a direção de busca;

Solução do Problema Relaxado (II)

- Cond. complem. relax. torna problem não-linear mesmo com funções de produção quadráticas $\Longrightarrow$ solução por método iterativo;
- Método de Newton é utilizado:

$$\boxed{\nabla^2 \mathcal{L}|_k \; \Delta\mathbf{x} = \text{-} \nabla \mathcal{L}|_k}$$

onde:

- $\nabla \mathcal{L}|_k$: gradiente de $\mathcal{L}$ calculado no ponto k;
- $\nabla^2 \mathcal{L}|_k$: matriz Hessiana de $\mathcal{L}$ calculada no ponto k, e

$$\Delta\mathbf{x} = [\Delta P, \Delta\lambda, \Delta\pi, \Delta s]^T$$

determina a direção de busca;

- Valores iniciais (p^0, s^0, π^0) para iterações necessariamente interiores:

$$s^0 \geq 0 \quad \text{e} \quad \pi^0 \geq 0$$

$$P^0 + \bar{s}^0 = \overline{P} \quad \text{e} \quad -P^0 + \underline{s^0} = \underline{-P}$$

Solução do Problema Relaxado (III)

- Equação do método de Newton:

$$\nabla^2 \mathcal{L}|_k \; \Delta x = -\nabla \mathcal{L}|_k$$

- Calculando a Hessiana e o gradiente de $\mathcal{L}$ para x^k, temos

$$\boxed{\begin{array}{rcl} G^k \, \Delta P - e \, \Delta\lambda + F_P^T \, \Delta\pi & = & b_P^{(k)} \\ -e^T \, \Delta P & = & b_\lambda^{(k)} \\ F_P \, \Delta P + \Delta s & = & b_\pi^{(k)} \\ S \, \Delta\pi + \Pi \, \Delta s & = & b_s^{(k)} \end{array}}$$

onde

$$\begin{array}{rcl} G^k & \triangleq & \nabla^2 F_T(P^k) \\ \\ \Pi & \triangleq & diag\{\bar{\pi}_i, \ldots, \bar{\pi}_N, \\ & & \underline{\pi}_1, \ldots, \underline{\pi}_N\} \end{array} \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} b_u^{(k)} & \triangleq & -\nabla_P \mathcal{L}|_k \\ b_\lambda^{(k)} & \triangleq & -\nabla_\lambda \mathcal{L}|_k \\ b_\pi^{(k)} & \triangleq & -\nabla_\pi \mathcal{L}|_k \\ b_s^{(k)} & \triangleq & -\nabla_s \mathcal{L}|_k \end{array} \right.$$

Solução do Problema Relaxado (IV)

- Equação do método de Newton na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} G^k & -e & F_P^T & 0 \\ -e^T & 0 & 0 & 0 \\ F_P & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & S & \Pi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta \lambda \\ \Delta \pi \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_u^{(k)} \\ b_\lambda^{(k)} \\ b_\pi^{(k)} \\ b_s^{(k)} \end{bmatrix}$$

Atualização das Variáveis

- Tamanhos de passo dimensionados para preservar não-negatividade de s_i e π_i;

$$\alpha_p = \min\left\{\min_{\Delta s_j<0} \frac{s_j}{|\Delta s_j|}, 1\right\}$$
$$\alpha_d = \min\left\{\min_{\Delta \pi_j<0} \frac{\pi_j}{|\Delta \pi_j|}, 1\right\}$$

- Variáveis são atualizadas como:

$$P^{k+1} = P^k + \rho\ \alpha_p\ \Delta P$$
$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \rho\ \alpha_d\ \Delta \lambda$$
$$\pi^{k+1} = \pi^k + \rho\ \alpha_d\ \Delta \pi$$
$$s^{k+1} = s^k + \rho\ \alpha_p\ \Delta s$$

Parâmetro ρ : impede que um componente da nova solução atinja a fronteira da região viável (Valor típico: $\rho = 0,9995$).

Atualização do parâmetro de relaxação e teste de convergência

- Parâmetro μ é atualizado com base no conceito de "brecha de dualidade" (*duality gap*) da programação linear:

$$\mu = \frac{(s^k)^T \times \pi^k}{2 \times N \times \beta}$$

onde $\beta > 1,0$ (tipicamente, $\beta = 10$);

Atualização do parâmetro de relaxação e teste de convergência

- Parâmetro μ é atualizado com base no conceito de "brecha de dualidade" (*duality gap*) da programação linear:

$$\mu = \frac{(s^k)^T \times \pi^k}{2 \times N \times \beta}$$

onde $\beta > 1,0$ (tipicamente, $\beta = 10$);

- Teste de convergência baseado no cumprimento das condições de KKT do problema **DE** original:

$$\begin{aligned}
\left\| \nabla F_T|_k - \lambda^k \; e + F_P^T \; \pi^k \right\| &\leq \delta \\
\left\| P_L - e^T \; P^k \right\| &\leq \delta \\
\left\| F_P \; P^k + s^k - P_{\lim} \right\| &\leq \delta \\
s_i^k \; \pi_i^k &\leq \delta \quad , i = 1, \ldots, 2N
\end{aligned}$$

onde δ : tolerância para convergência.

Algoritmo

1. Escolha um ponto inicial interior (p^0, s^0, π^0) e um valor inicial para o parâmetro μ, μ^0; inicializar $k := 0$;
2. Resolver o problema $\mathbf{DE}_\mu$ usando o método de Newton inicializado em (p^k, s^k, π^k) para calcular um novo ponto $(p^{k+1}, s^{k+1}, \pi^{k+1})$;
3. Aplicar os testes de convergência baseados nas conds. de KKT. Se os testes indicam convergência, **FIM**. Em caso contrário, seguir para o passo 4;
4. Faça $k := k + 1$. Calcule novo valor para o parâmetro de relaxação, $\mu^k < \mu^{k-1}$ e retorne ao passo 2.

Não-negatividade de s via barreira Logaritmica

- Função objetivo é alterada:

$$\min \left\{ F_T(\mathbf{P}) - \mu \sum_{k=1}^{2N} \ln s_i \right\}$$

Não-negatividade de s via barreira Logaritmica

- Função objetivo é alterada:

$$\min \left\{ F_T(\mathbf{P}) - \mu \sum_{k=1}^{2N} \ln s_i \right\}$$

- a função Lagangeana torna-se:

$$\mathcal{L} = F_T(\mathbf{P}) - \mu \sum_{k=1}^{2N} \ln s_k + \lambda(P_L - \mathbf{e}^T \mathbf{P}) + \boldsymbol{\pi}^T (\mathbf{F}_P \ \mathbf{P} + \mathbf{s} - \mathbf{P}_{\text{lim}})$$

Não-negatividade de s via barreira Logaritmica

- Função objetivo é alterada:

$$\min \left\{ F_T(\mathbf{P}) - \mu \sum_{k=1}^{2N} \ln s_i \right\}$$

- a função Lagangeana torna-se:

$$\mathcal{L} = F_T(\mathbf{P}) - \mu \sum_{k=1}^{2N} \ln s_k + \lambda(P_L - \mathbf{e}^T \mathbf{P}) + \boldsymbol{\pi}^T (\mathbf{F}_P \ \mathbf{P} + \mathbf{s} - \mathbf{P}_{\lim})$$

- Condição de factibilidade dual para s_i :

$$\nabla_{s_i} \mathcal{L} = 0 \ \Rightarrow \ -\frac{\mu}{s_i} + \pi_i = 0$$

Não-negatividade de s via barreira Logaritmica

- Função objetivo é alterada:

$$\min \left\{ F_T(\mathbf{P}) - \mu \sum_{k=1}^{2N} \ln s_i \right\}$$

- a função Lagangeana torna-se:

$$\mathcal{L} = F_T(\mathbf{P}) - \mu \sum_{k=1}^{2N} \ln s_k + \lambda (P_L - \mathbf{e}^T \mathbf{P}) + \boldsymbol{\pi}^T (\mathbf{F}_P \ \mathbf{P} + \mathbf{s} - \mathbf{P}_{\lim})$$

- Condição de factibilidade dual para s_i :

$$\nabla_{s_i} \mathcal{L} = 0 \ \Rightarrow \ -\frac{\mu}{s_i} + \pi_i = 0$$

- ou seja

$$\pi_i \times s_i = \mu$$

que é a mesma condição obtida com a relaxação da condição de complementaridade.