EEL 6300
Despacho Econômico de Unidades Térmicas
Parte 1

Antonio Simões Costa

UFSC - LABSPOT

Introdução

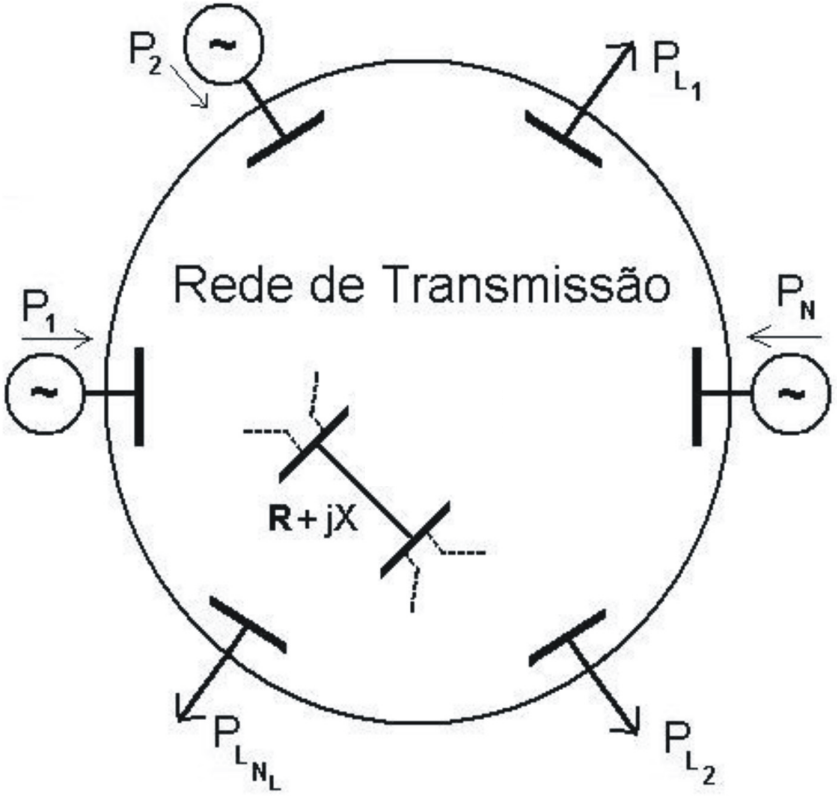
- Importância da consideração da eficiência econômica na operação de sistemas de potência;
- Despacho de unidades térmicas:
  - Características das unidades geradoras térmicas;
  - Representação simplificada da rede elétrica;
  - Consideração das perdas de transmissão.
- O Despacho Econômico (DE) é um problema de *otimização com restrições*.

Modelagem da Rede no DE Clássico

- Rede elétrica real

Modelagem da Rede no DE Clássico

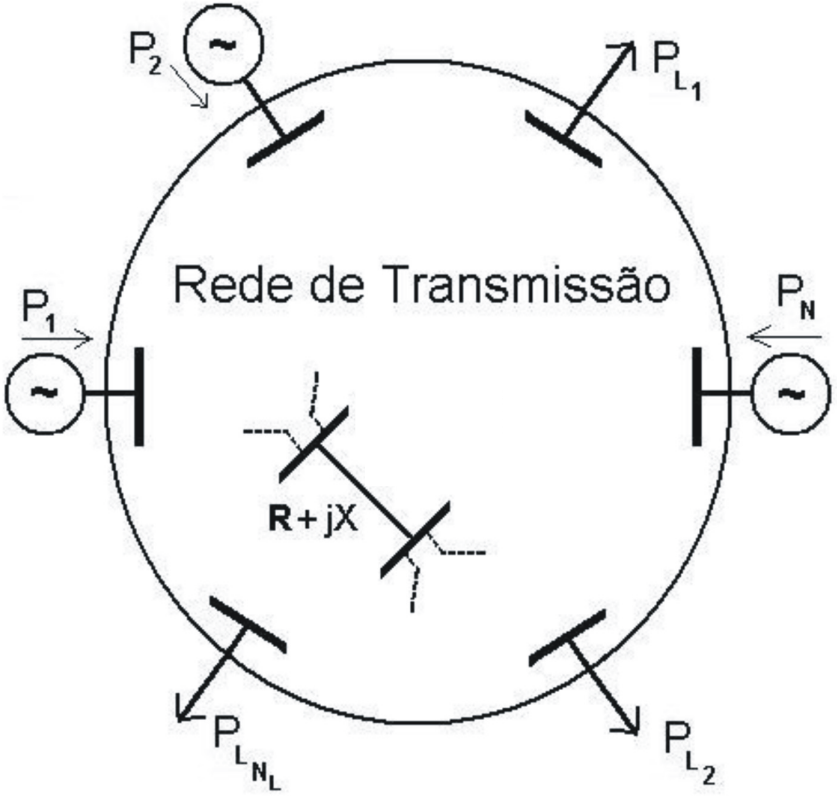
- Rede elétrica real



(a)

Modelagem da Rede no DE Clássico

- Rede elétrica real

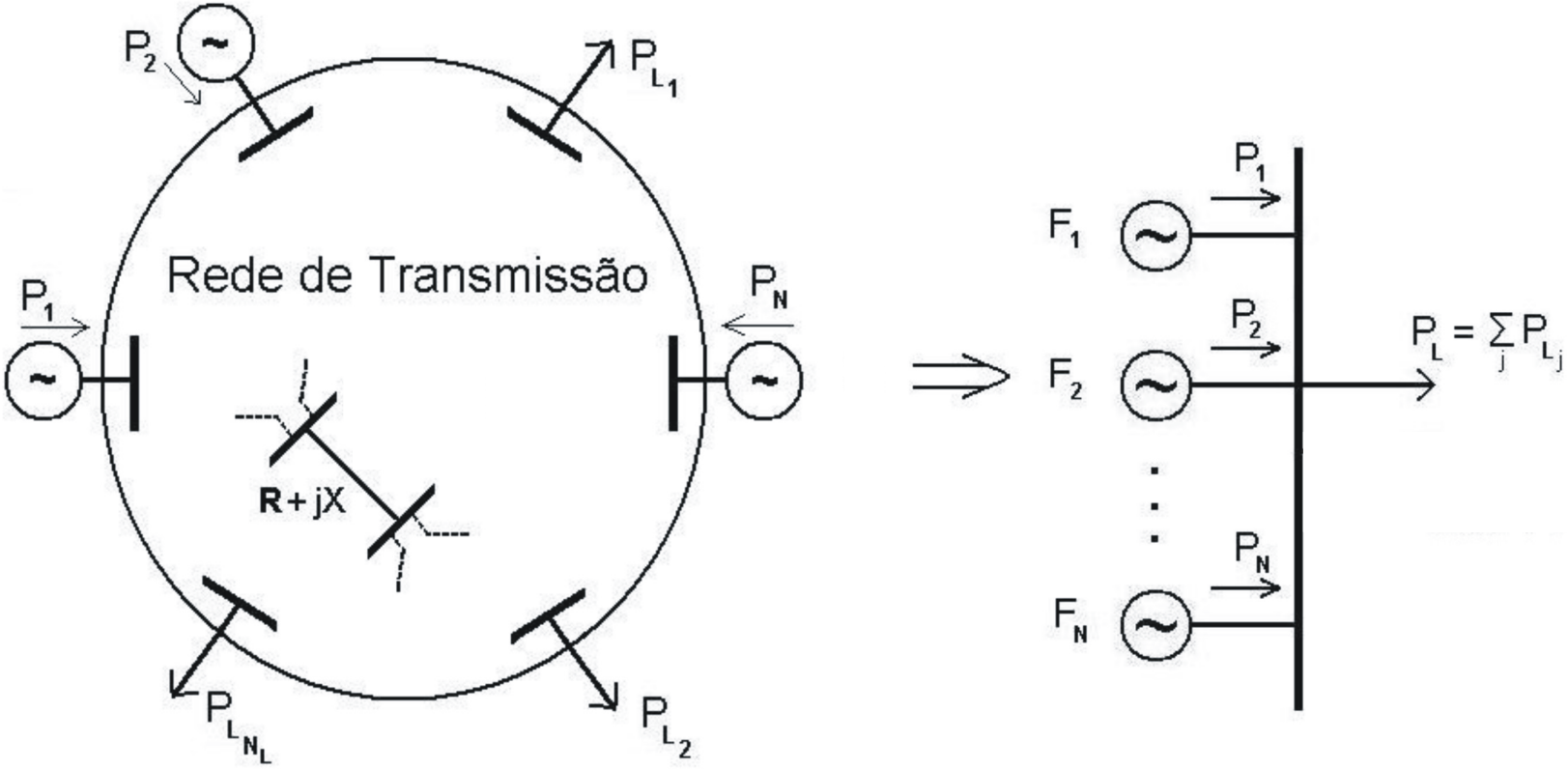


(a)

- Modelo em Barra única

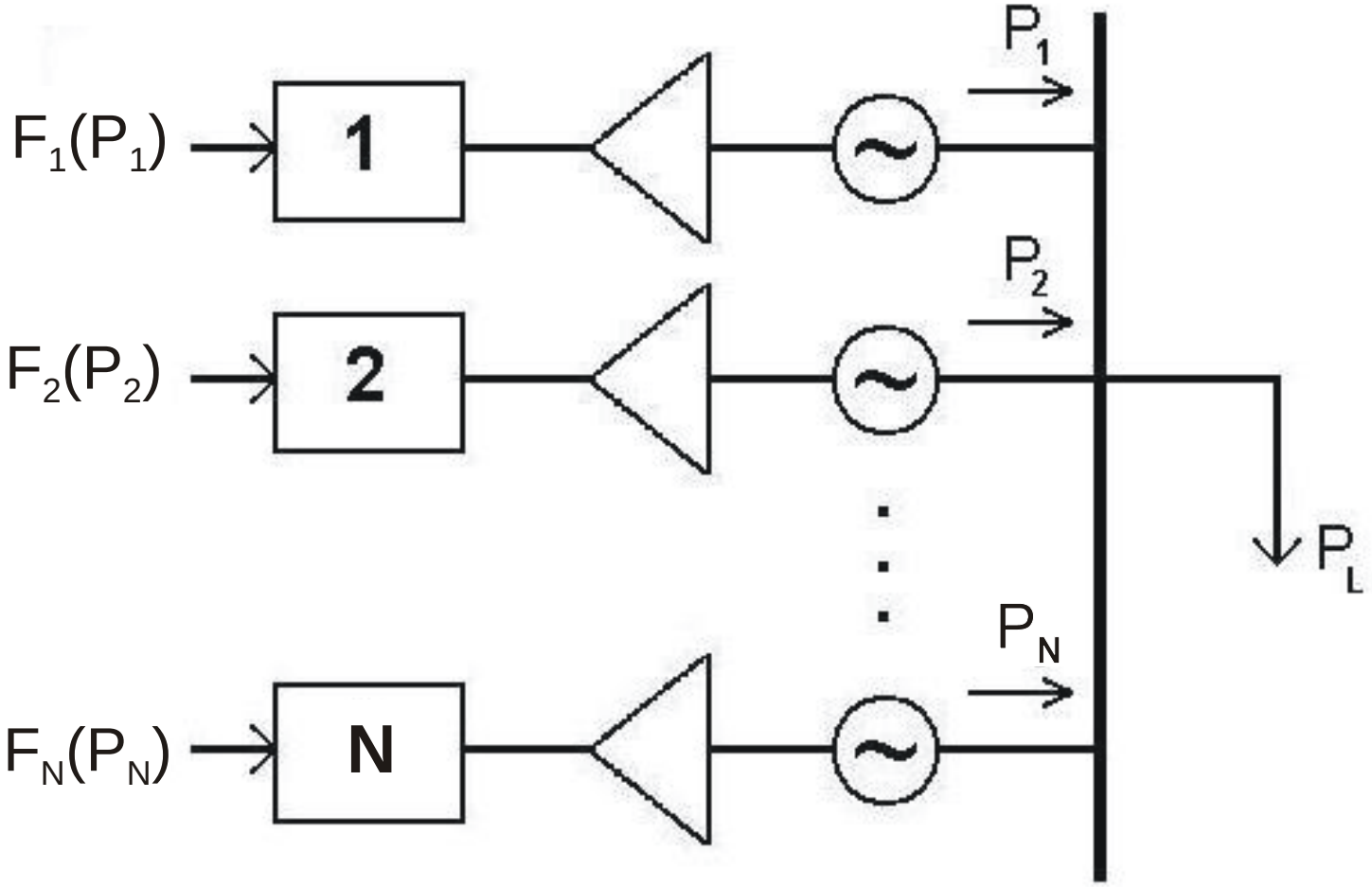
Modelagem da Rede no DE Clássico

- Rede elétrica real
- Modelo em Barra única



(a) (b)

Representação das Unidades Geradoras



Formulação matemática do Problema de Despacho Econômico

$$\min F_T(P_1, P_2, ..., P_N) = \sum_{i=1}^{N} F_i(P_i)$$

sujeito a

$$\begin{array}{rcccl} P_L & - & \sum_{i=1}^{N} P_i & = & 0 \\ \\ \underline{P}_i & \leq & P_i & \leq & \overline{P}_i, \quad i = 1, ..., N \end{array}$$

Revisão de Otimização com Restrições

- Otimização Irrestrita
- Otimização com Restrições de Igualdade
- Otimização com Restrições de Igualdade e Desigualdade

Otimização Irrestrita

- Formulação matemática:

$$\boxed{\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})}$$

onde a *função-objetivo* $f(\mathbf{x})$ é uma função convexa de $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, x_2, \ldots, x_N]^T$;

Otimização Irrestrita

- Formulação matemática:

$$\boxed{\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})}$$

onde a *função-objetivo* $f(\mathbf{x})$ é uma função convexa de $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, x_2, \ldots, x_N]^T$;

- Condição de otimalidade:

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

Otimização Irrestrita

- Formulação matemática:

$$\boxed{\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})}$$

onde a *função-objetivo* $f(\mathbf{x})$ é uma função convexa de $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, x_2, \ldots, x_N]^T$;

- Condição de otimalidade:

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

- A condição de otimalidade acima fornece os *pontos estacionários;*

Otimização Irrestrita

- Formulação matemática:

$$\boxed{\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})}$$

onde a *função-objetivo* $f(\mathbf{x})$ é uma função convexa de $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, x_2, \ldots, x_N]^T$;

- Condição de otimalidade:

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

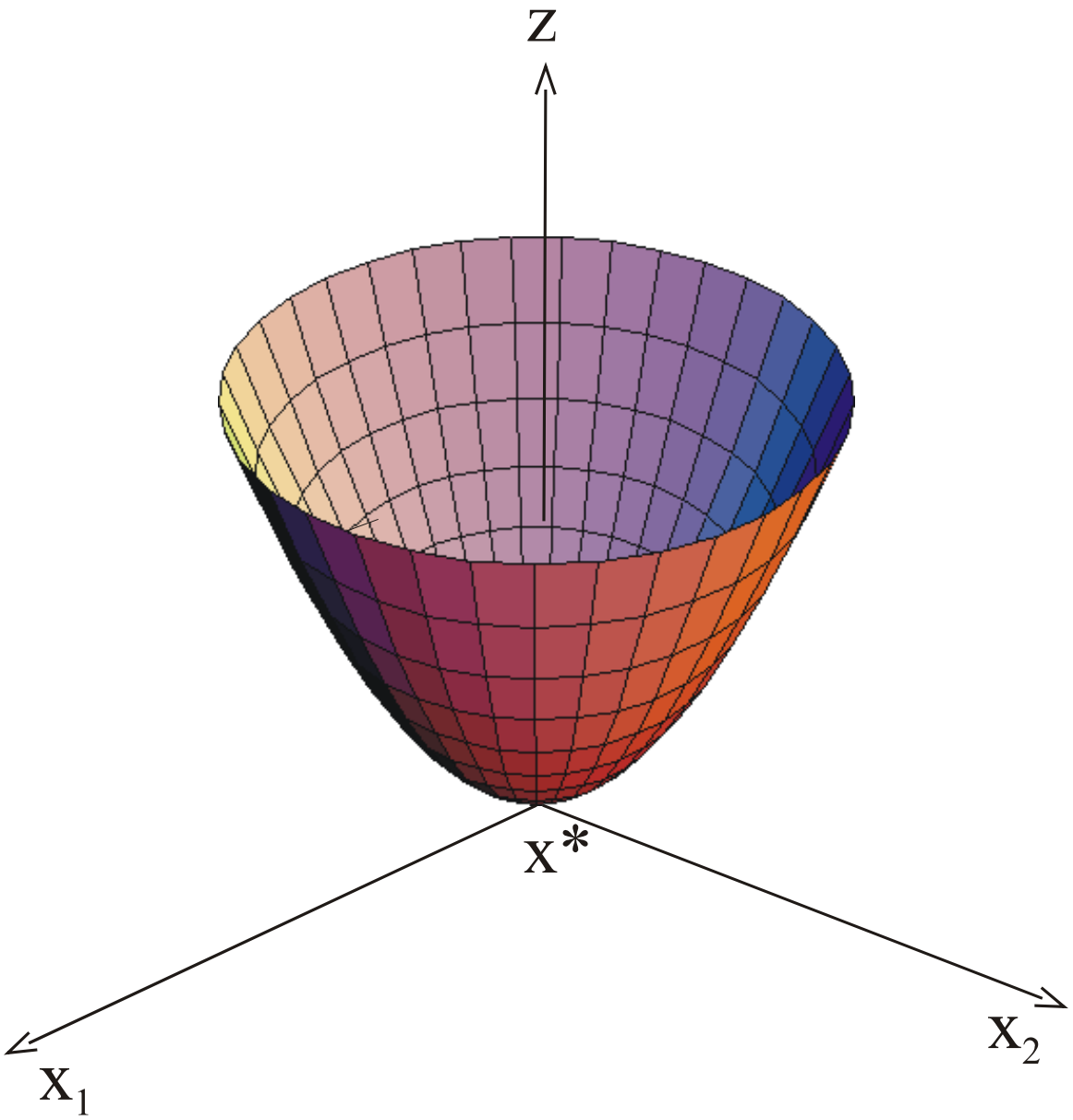
- A condição de otimalidade acima fornece os *pontos estacionários;*

- O mínimo de $f(\mathbf{x})$ é necessariamente um ponto estacionário.

Caso Irrestrito: Exemplo

$$\min_{\mathbf{x}} \; f(x_1, x_2) = 0,25 \; x_1^2 + x_2^2$$

Caso Irrestrito: interpretação gráfica



Otimização com restrições de igualdade

- Formulação matemática:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a} \quad & \\ & \omega(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned}$$

Otimização com restrições de igualdade

- Formulação matemática:

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a} & \\ & \omega(\mathbf{x}) = 0 \end{array}$$

- Neste caso, forma-se a *Função Lagrangeana:*

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda\omega(\mathbf{x})$$

onde a variável escalar λ é chamada *multiplicador de Lagrange;*

Otimização com restrições de igualdade

- Formulação matemática:

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a} & \\ & \omega(\mathbf{x}) = 0 \end{array}$$

- Neste caso, forma-se a *Função Lagrangeana:*

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda\omega(\mathbf{x})$$

  onde a variável escalar λ é chamada *multiplicador de Lagrange;*
- As condições de otimalidade são:

Otimização com restrições de igualdade

- Formulação matemática:

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a} & \\ & \omega(\mathbf{x}) = 0 \end{array}$$

- Neste caso, forma-se a *Função Lagrangeana:*

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda\omega(\mathbf{x})$$

  onde a variável escalar λ é chamada *multiplicador de Lagrange;*
- As condições de otimalidade são:
  - Factibilidade dual:

$$\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{L}|_{*} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \nabla f(\mathbf{x}^*) + \lambda\ \nabla\omega(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

Otimização com restrições de igualdade

- Formulação matemática:

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a} & \\ & \omega(\mathbf{x}) = 0 \end{array}$$

- Neste caso, forma-se a *Função Lagrangeana:*

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda\omega(\mathbf{x})$$

onde a variável escalar λ é chamada *multiplicador de Lagrange;*

- As condições de otimalidade são:
  - Factibilidade dual:

$$\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{L}|_{*} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \nabla f(\mathbf{x}^*) + \lambda\ \nabla\omega(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

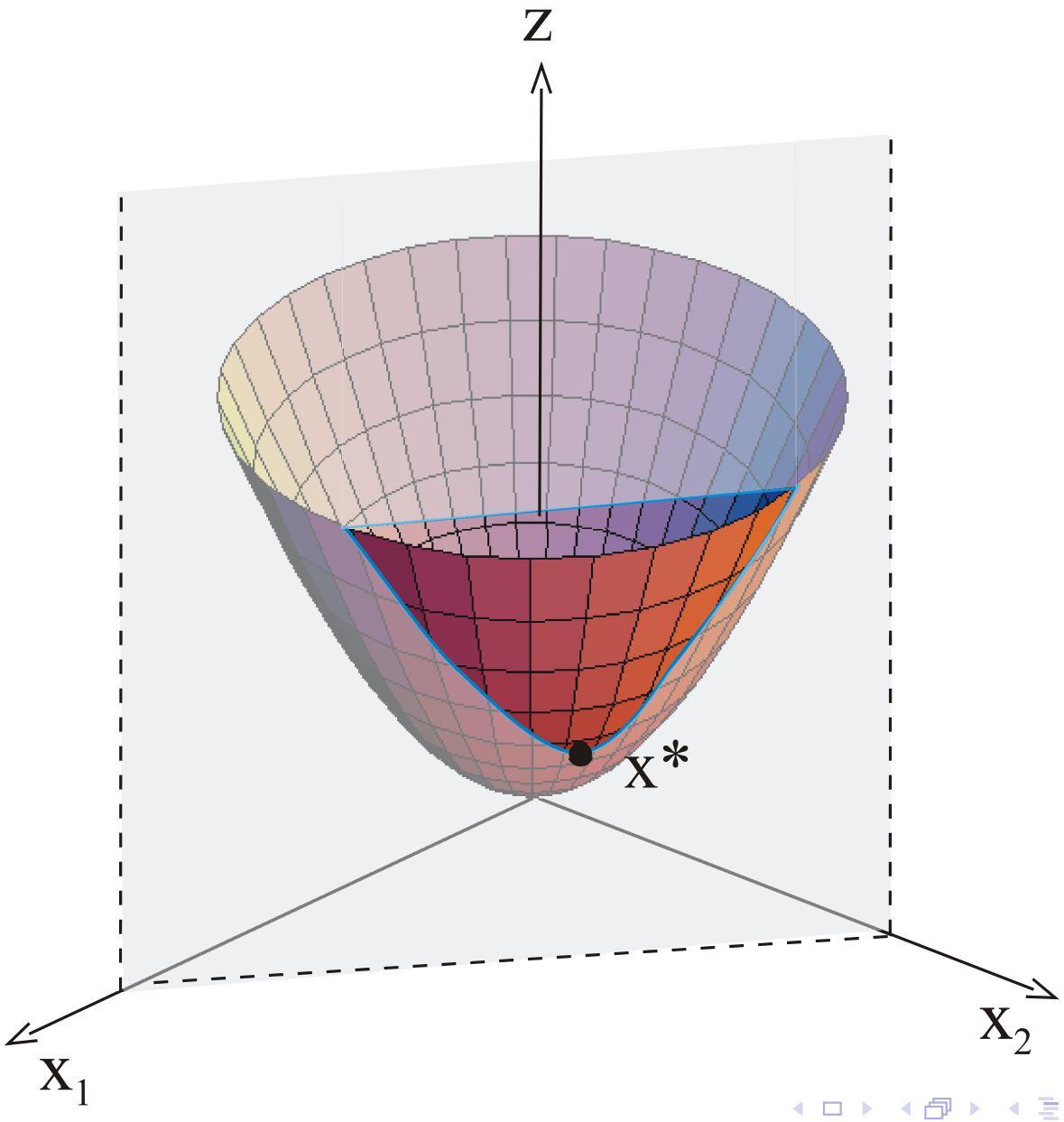
  - Factibilidade primal:

$$\nabla_{\lambda}\mathcal{L}|_{*} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \omega(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

Caso restrito: Função-objetivo e Restrições

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x_1, x_2) = 0,25\ x_1^2 + x_2^2 \\
\text{sujeito a} \quad & \\
& \omega(x_1, x_2) = 5 - x_1 - x_2 = 0
\end{aligned}
$$

Caso com restrições: ilustração



Condições de Otimalidade

- Função Lagrangeana:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}\ \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$$

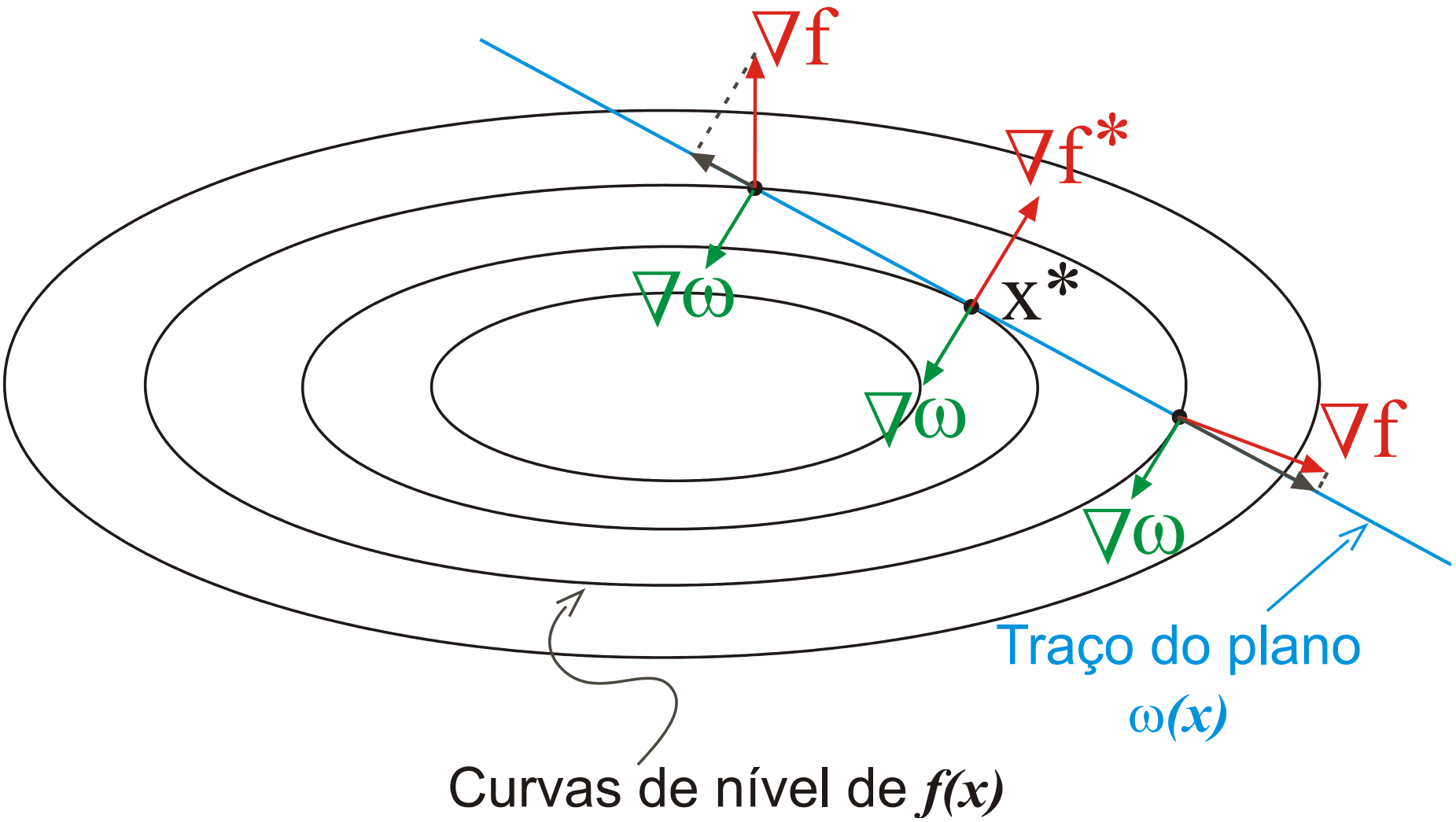
- Factibilidade dual:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \nabla_{\mathbf{x}}\ f(\mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\lambda}\ \nabla_{\mathbf{x}}\ \omega(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

- Factibilidade primal:

$$\nabla_{\lambda} \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \omega(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

Interpretação das Condições de Otimalidade



Exemplo 1 de Despacho Econômico: Enunciado

Considere o problema de três unidades térmicas alimentando uma carga total de 800 MW. Os dados das unidades são:

Unidade 1:	$\underline{P}_1 = 150\ MW$	$\overline{P}_1 = 550\ MW$
	$F_1 = 500 + 8\,P_1 + 0,0016\,P_1^2$	
Unidade 2:	$\underline{P}_2 = 50\ MW$	$\overline{P}_2 = 200\ MW$
	$F_2 = 80 + 9\,P_2 + 0,0048\,P_2^2$	
Unidade 3:	$\underline{P}_3 = 80\ MW$	$\overline{P}_3 = 230\ MW$
	$F_3 = 100 + 8,5\,P_3 + 0,003\,P_3^2$	

Exemplo 1 de Despacho Econômico: Formulação

- O problema de DE para as 3 unidades é formulado como:

$$\min F_T(P_1, P_2, P_3) = F_1(P_1) + F_2(P_2) + F_3(P_3)$$

sujeito a

$$P_L - (P_1 + P_2 + P_3) \quad = \quad 0$$

Exemplo 1 de Despacho Econômico: Formulação

- O problema de DE para as 3 unidades é formulado como:

$$\min F_T(P_1, P_2, P_3) = F_1(P_1) + F_2(P_2) + F_3(P_3)$$

sujeito a

$$P_L - (P_1 + P_2 + P_3) = 0$$

- A função Lagrangeana neste caso é:

$$\mathcal{L}(P_1, P_2, P_2, \lambda) = \sum_{i=1}^{3} F_i(P_i) + \lambda(P_L - \sum_{i=1}^{N} P_i)$$

Exemplo 1 de Despacho Econômico: Formulação

- O problema de DE para as 3 unidades é formulado como:

$$\min F_T(P_1, P_2, P_3) = F_1(P_1) + F_2(P_2) + F_3(P_3)$$

sujeito a

$$P_L - (P_1 + P_2 + P_3) = 0$$

- A função Lagrangeana neste caso é:

$$\mathcal{L}(P_1, P_2, P_2, \lambda) = \sum_{i=1}^{3} F_i(P_i) + \lambda(P_L - \sum_{i=1}^{N} P_i)$$

- As condições de otimalidade são:

Exemplo 1 de Despacho Econômico: Formulação

- O problema de DE para as 3 unidades é formulado como:

$$\min F_T(P_1, P_2, P_3) = F_1(P_1) + F_2(P_2) + F_3(P_3)$$

sujeito a

$$P_L - (P_1 + P_2 + P_3) \quad = \quad 0$$

- A função Lagrangeana neste caso é:

$$\mathcal{L}(P_1, P_2, P_2, \lambda) \quad = \quad \sum_{i=1}^{3} F_i(P_i) + \lambda(P_L - \sum_{i=1}^{N} P_i)$$

- As condições de otimalidade são:
  - Factibilidade dual:

$$\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{L}(\mathbf{P}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_i}\bigg|_* = F_i'(P_i^*) - \lambda^* = 0, \;\; i = 1, 2, 3$$

Exemplo 1 de Despacho Econômico: Formulação

- O problema de DE para as 3 unidades é formulado como:

$$\min F_T(P_1, P_2, P_3) = F_1(P_1) + F_2(P_2) + F_3(P_3)$$

sujeito a

$$P_L - (P_1 + P_2 + P_3) \quad = \quad 0$$

- A função Lagrangeana neste caso é:

$$\mathcal{L}(P_1, P_2, P_2, \lambda) \quad = \quad \sum_{i=1}^{3} F_i(P_i) + \lambda(P_L - \sum_{i=1}^{N} P_i)$$

- As condições de otimalidade são:
  - Factibilidade dual:

$$\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{L}(\mathbf{P}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_i}\bigg|_* = F_i'(P_i^*) - \lambda^* = 0, \;\; i = 1, 2, 3$$

  - Factibilidade primal (equação de balanço de potência):

$$\nabla_{\lambda}\mathcal{L}(\mathbf{P}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad P_L = P_1^* + P_2^* + P_3^*$$

Exemplo 1 de Despacho Econômico: solução

- As condições de factibilidade dual fornecem:

$$\begin{array}{rlll} F_1'(P_1) = & 8 + 0,0032\ P_1 & = \lambda & \\ F_2'(P_2) = & 9 + 0,0096\ P_2 & = \lambda & \Rightarrow \\ F_3'(P_3) = & 8,5 + 0,006\ P_3 & = \lambda & \end{array} \quad \begin{array}{l} P_1 = (\lambda - 8)/0,0032 \\ P_2 = (\lambda - 9)/0,0096 \\ P_3 = (\lambda - 8,5)/0,006 \end{array}$$

Exemplo 1 de Despacho Econômico: solução

- As condições de factibilidade dual fornecem:

$$\begin{array}{lllll} F_1'(P_1) = & 8 + 0,0032\ P_1 & = \lambda & & P_1 = (\lambda - 8)/0,0032 \\ F_2'(P_2) = & 9 + 0,0096\ P_2 & = \lambda & \Rightarrow & P_2 = (\lambda - 9)/0,0096 \\ F_3'(P_3) = & 8,5 + 0,006\ P_3 & = \lambda & & P_3 = (\lambda - 8,5)/0,006 \end{array}$$

- Substituindo P_1, P_2 e P_3 na equação de balanço de potência com $P_L = 800\ MW$:

$$\frac{\lambda-8}{0{,}0032} + \frac{\lambda-9}{0{,}0096} + \frac{\lambda-8{,}5}{0{,}006} = 800 \ \Rightarrow \ \lambda^* = 9,693\ \$/MWh$$

Exemplo 1 de Despacho Econômico: solução

- As condições de factibilidade dual fornecem:

$$\begin{array}{lllll} F_1'(P_1) = & 8 + 0,0032\ P_1 & = \lambda & & P_1 = (\lambda - 8)/0,0032 \\ F_2'(P_2) = & 9 + 0,0096\ P_2 & = \lambda & \Rightarrow & P_2 = (\lambda - 9)/0,0096 \\ F_3'(P_3) = & 8,5 + 0,006\ P_3 & = \lambda & & P_3 = (\lambda - 8,5)/0,006 \end{array}$$

- Substituindo P_1, P_2 e P_3 na equação de balanço de potência com $P_L = 800\ MW$:

$$\frac{\lambda-8}{0,0032} + \frac{\lambda-9}{0,0096} + \frac{\lambda-8,5}{0,006} = 800 \ \Rightarrow \ \lambda^* = 9,693\ \$/MWh$$

- Com este valor de λ obtemos as potências geradas:

$$P_1^* = 529,02\ MW \quad P_2^* = 72,17\ MW \quad P_3^* = 198,81\ MW$$

Exemplo 1 de Despacho Econômico: solução

- As condições de factibilidade dual fornecem:

$$\begin{array}{lllll} F_1'(P_1) = & 8 + 0,0032\ P_1 & = \lambda & & P_1 = (\lambda - 8)/0,0032 \\ F_2'(P_2) = & 9 + 0,0096\ P_2 & = \lambda & \Rightarrow & P_2 = (\lambda - 9)/0,0096 \\ F_3'(P_3) = & 8,5 + 0,006\ P_3 & = \lambda & & P_3 = (\lambda - 8,5)/0,006 \end{array}$$

- Substituindo P_1, P_2 e P_3 na equação de balanço de potência com $P_L = 800\ MW$:

$$\frac{\lambda-8}{0,0032} + \frac{\lambda-9}{0,0096} + \frac{\lambda-8,5}{0,006} = 800 \ \Rightarrow \ \lambda^* = 9,693\ \$/MWh$$

- Com este valor de λ obtemos as potências geradas:

$$P_1^* = 529,02\ MW \quad P_2^* = 72,17\ MW \quad P_3^* = 198,81\ MW$$

- Como todas elas obedecem os limites mínimos e máximos das respectivas unidades, este é o despacho ótimo.

Exemplo 2 de Despacho Econômico

Reconsidere o problema de três unidades térmicas, cujos dados são os mesmos do Exemplo 1. Entretanto, a carga total é agora aumentada para 950 MW. Recalcule o despacho ótimo das unidades.

Solução:

- Como apenas P_L muda em relação ao Exemplo 1, o novo valor de λ é obtido de

$$\frac{\lambda-8}{0{,}0032} + \frac{\lambda-9}{0{,}0096} + \frac{\lambda-8{,}5}{0{,}006} = 950 \quad \Rightarrow \quad \lambda^* = 9,95 \ \$/MWh$$

que fornece

$$P_1 = 609,37 \ MW \quad P_2 = 98,96 \ MW \quad P_3 = 241 \ MW$$

Exemplo 2 de Despacho Econômico

Reconsidere o problema de três unidades térmicas, cujos dados são os mesmos do Exemplo 1. Entretanto, a carga total é agora aumentada para 950 MW. Recalcule o despacho ótimo das unidades.

Solução:

- Como apenas P_L muda em relação ao Exemplo 1, o novo valor de λ é obtido de

$$\frac{\lambda-8}{0{,}0032} + \frac{\lambda-9}{0{,}0096} + \frac{\lambda-8{,}5}{0{,}006} = 950 \quad \Rightarrow \quad \lambda^* = 9,95 \ \$/MWh$$

que fornece

$$P_1 = 609,37 \ MW \quad P_2 = 98,96 \ MW \quad P_3 = 241 \ MW$$

- Observa-se que $P_1 > \overline{P}_1$ e $P_3 > \overline{P}_3$. Portanto esta solução é *inviável*.

Observações sobre o Exemplo 2

- A não consideração dos limites de geração na formulação do problema pode conduzir a soluções inviáveis;

Observações sobre o Exemplo 2

- A não consideração dos limites de geração na formulação do problema pode conduzir a soluções inviáveis;
- É possível modificar a solução obtida de modo a torná-la viável, mas não haverá garantias sobre a otimalidade da nova solução encontrada;

Observações sobre o Exemplo 2

- A não consideração dos limites de geração na formulação do problema pode conduzir a soluções inviáveis;
- É possível modificar a solução obtida de modo a torná-la viável, mas não haverá garantias sobre a otimalidade da nova solução encontrada;
- Fica evidente a necessidade da consideração dos limites de geração, sob a forma de restrições de desigualdade, na formulação e solução do problema de otimização.

Inclusão das Restrições de Desigualdade

- Formulação matemática do problema de otimização

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min\limits_{\mathbf{x}} & f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a:} & \\ & \omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{array}} \quad \begin{array}{l} (\mathbf{x}: \ n \times 1) \\ \\ \textit{(uma restrição)} \\ \textit{(}N_g \textit{ restrições)} \end{array}$$

Inclusão das Restrições de Desigualdade

- Formulação matemática do problema de otimização

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min\limits_{\mathbf{x}} & f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a:} & \\ & \omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{array}} \quad \begin{array}{l} (\mathbf{x}: \ n \times 1) \\ \\ \textit{(uma restrição)} \\ \textit{(}N_g \textit{ restrições)} \end{array}$$

- Função Lagrangeana:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = f(\mathbf{x}) + \lambda \ \omega(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}),$$

onde

$$\boldsymbol{\pi} = \left[\ \pi_1 \quad \pi_2 \quad \ldots \quad \pi_{N_g} \ \right]^T$$

é o vetor de multiplicadores de Lagrange das restrições de desigualdade.

Classificação das variáveis

- Problema de otimização e função Lagrangeana:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a:} \quad & \\ & \omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = f(\mathbf{x}) + \lambda\ \omega(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

Classificação das variáveis

- Problema de otimização e função Lagrangeana:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a:} \quad & \\ & \omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = f(\mathbf{x}) + \lambda\ \omega(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

- Variáveis primais - são as variáveis de otimização, $\mathbf{x}$;

Classificação das variáveis

- Problema de otimização e função Lagrangeana:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a:} \quad & \\ & \omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = f(\mathbf{x}) + \lambda\ \omega(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

- Variáveis primais - são as variáveis de otimização, $\mathbf{x}$;
- Variáveis duais - são os multiplicadores de Lagrange:

Classificação das variáveis

- Problema de otimização e função Lagrangeana:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a:} \quad & \\ & \omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = f(\mathbf{x}) + \lambda\ \omega(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

- Variáveis primais - são as variáveis de otimização, $\mathbf{x}$;
- Variáveis duais - são os multiplicadores de Lagrange:
  - da restrição de igualdade, λ;

Classificação das variáveis

- Problema de otimização e função Lagrangeana:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a:} \quad & \\ & \omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = f(\mathbf{x}) + \lambda\ \omega(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

- Variáveis primais - são as variáveis de otimização, $\mathbf{x}$;
- Variáveis duais - são os multiplicadores de Lagrange:
  - da restrição de igualdade, λ;
  - das restrições de desigualdade, $\boldsymbol{\pi}$.

Condições de Otimalidade

A otimalidade da solução exige o cumprimento das condições de Karush-Kuhn-Tucker, que consistem de:

- Condições de Factibilidade Dual;

Condições de Otimalidade

A otimalidade da solução exige o cumprimento das condições de Karush-Kuhn-Tucker, que consistem de:

- Condições de Factibilidade Dual;
- Condições de Factibilidade Primal;

Condições de Otimalidade

A otimalidade da solução exige o cumprimento das condições de Karush-Kuhn-Tucker, que consistem de:

- Condições de Factibilidade Dual;
- Condições de Factibilidade Primal;
- Condições de Folga Complementar.

Condições de Karush-Kuhn-Tucker (1)

Factibilidade Dual

- Problema de Otimização e Função Lagrangeana:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a:} \quad & \\ & \omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = f(\mathbf{x}) + \lambda\ \omega(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

Condições de Karush-Kuhn-Tucker (1)

Factibilidade Dual

- Problema de Otimização e Função Lagrangeana:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a:} \quad & \\ & \omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = f(\mathbf{x}) + \lambda\ \omega(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

- Factibilidade Dual:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}\big|_* = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \nabla f(\mathbf{x}^*) + \lambda^*\ \boldsymbol{\nabla} \omega(\mathbf{x}^*) + \mathbf{G}(\mathbf{x}^*)^T\ \boldsymbol{\pi}^* = \mathbf{0},$$

onde

$$\boldsymbol{\nabla} \omega = [\partial \omega / \partial \mathbf{x}]\ \ (n \times 1) \quad \text{e} \quad \mathbf{G}(\mathbf{x}) = [\partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{x}]\ \ (N_g \times n)$$

Condições de Karush-Kuhn-Tucker (2)

Factibilidade Primal

- Problema de Otimização e Função Lagrangeana:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a:} \quad & \\ & \omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = f(\mathbf{x}) + \lambda\ \omega(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

Condições de Karush-Kuhn-Tucker (2)

Factibilidade Primal

- Problema de Otimização e Função Lagrangeana:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a:} \quad & \\ & \omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = f(\mathbf{x}) + \lambda\ \omega(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

- Factibilidade Primal:

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) &\leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Condições de Karush-Kuhn-Tucker (3)

Folga Complementar (1)

- Problema de Otimização e Função Lagrangeana:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a:} \quad & \\ & \omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = f(\mathbf{x}) + \lambda\ \omega(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

Condições de Karush-Kuhn-Tucker (3)

Folga Complementar (1)

- Problema de Otimização e Função Lagrangeana:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a:} \quad & \\ & \omega(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = f(\mathbf{x}) + \lambda\ \omega(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

- Condições de Folga complementar:

$$\left.\begin{aligned} \pi_i^*\ g_i(\mathbf{x}^*) &= 0 \\ \pi_i^* &\geq 0 \end{aligned}\right\} i = 1, \ldots, N_g$$

Condições de Karush-Kuhn-Tucker (3)

Folga Complementar (2)

Interpretação das condições de Folga Complementar:

$$\pi_i^* \; g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \pi_i^* = 0, \; g_i(\mathbf{x}^*) < 0 & \Rightarrow \text{Restr. } g_i \text{ inativa na solução} \\ \qquad \text{ou} & \\ \pi_i^* > 0, \; g_i(\mathbf{x}^*) = 0 & \Rightarrow \text{Restr. } g_i \text{ ativa na solução} \end{cases}$$

Exemplo Genérico Ilustrativo (1)

- Problema:

$$
\begin{aligned}
\min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) = 0,25x_1^2 + x_2^2 \\
\text{Sujeito a:} \quad & \\
& \omega(\mathbf{x}) = 5 - x_1 - x_2 = 0 \\
& \mathbf{g}(\mathbf{x}) = x_1 + 0,2x_2 - 3 \leq 0
\end{aligned}
$$

Exemplo Genérico Ilustrativo (1)

- Problema:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) = 0,25x_1^2 + x_2^2 \\ \text{Sujeito a:} \quad & \\ & \omega(\mathbf{x}) = 5 - x_1 - x_2 = 0 \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) = x_1 + 0,2x_2 - 3 \leq 0 \end{aligned}$$

- Função Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = 0,25x_1^2 + x_2^2 + \lambda \times (5 - x_1 - x_2) + \pi \times (x_1 + 0,2x_2 - 3)$$

Exemplo Genérico Ilustrativo (2)

- Função Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = 0,25x_1^2 + x_2^2 + \lambda\ (5 - x_1 - x_2) + \pi\ (x_1 + 0,2x_2 - 3)$$

Exemplo Genérico Ilustrativo (2)

- Função Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = 0,25x_1^2 + x_2^2 + \lambda\ (5 - x_1 - x_2) + \pi\ (x_1 + 0,2x_2 - 3)$$

- Condições de KKT:

Exemplo Genérico Ilustrativo (2)

- Função Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = 0,25x_1^2 + x_2^2 + \lambda\,(5 - x_1 - x_2) + \pi\,(x_1 + 0,2x_2 - 3)$$

- Condições de KKT:
  - Factibilidade dual ($\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{L}|_* = \mathbf{0}$):

$$\begin{aligned} 0,5x_1 - \lambda + \pi &= 0 \\ 2x_2 - \lambda + 0,2\pi &= 0 \end{aligned}$$

Exemplo Genérico Ilustrativo (2)

- Função Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = 0,25x_1^2 + x_2^2 + \lambda\,(5 - x_1 - x_2) + \pi\,(x_1 + 0,2x_2 - 3)$$

- Condições de KKT:
  - Factibilidade dual ($\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{L}|_* = \mathbf{0}$):

$$\begin{aligned} 0,5x_1 - \lambda + \pi &= 0 \\ 2x_2 - \lambda + 0,2\pi &= 0 \end{aligned}$$

  - Factibilidade Primal:

$$\begin{aligned} 5 - x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + 0,2x_2 - 3 &\leq 0 \end{aligned}$$

Exemplo Genérico Ilustrativo (2)

- Função Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = 0,25x_1^2 + x_2^2 + \lambda\,(5 - x_1 - x_2) + \pi\,(x_1 + 0,2x_2 - 3)$$

- Condições de KKT:
  - Factibilidade dual ($\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{L}|_* = \mathbf{0}$):

$$\begin{aligned} 0,5x_1 - \lambda + \pi &= 0 \\ 2x_2 - \lambda + 0,2\pi &= 0 \end{aligned}$$

  - Factibilidade Primal:

$$\begin{aligned} 5 - x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + 0,2x_2 - 3 &\leq 0 \end{aligned}$$

  - Folga complementar:

$$\begin{aligned} \pi\,(x_1 + 0,2x_2 - 3) &= 0 \\ \pi &\geq 0 \end{aligned}$$

Exemplo Genérico Ilustrativo (3)

Solução:

- Hipótese: A restrição de desigualdade é inativa na solução$\Rightarrow \pi = 0$:

Exemplo Genérico Ilustrativo (3)

Solução:

- Hipótese: A restrição de desigualdade é inativa na solução$\Rightarrow \pi = 0$:
  - Neste caso, resolve-se o sistema formado pelas conds. de otimalidade dadas por *equações*, com $\pi = 0$:

$$\begin{array}{rcl} 0,5x_1 - \lambda & = & 0 \\ 2x_2 - \lambda & = & 0 \\ 5 - x_1 - x_2 & = & 0 \end{array},$$

o que resulta em

$$x_1 = 4; \quad x_2 = 1; \quad \lambda = 2$$

Exemplo Genérico Ilustrativo (3)

Solução:

- Hipótese: A restrição de desigualdade é inativa na solução$\Rightarrow \pi = 0$:
  - Neste caso, resolve-se o sistema formado pelas conds. de otimalidade dadas por *equações*, com $\pi = 0$:

$$\begin{array}{rcl} 0,5x_1 - \lambda & = & 0 \\ 2x_2 - \lambda & = & 0 \\ 5 - x_1 - x_2 & = & 0 \end{array},$$

    o que resulta em

$$x_1 = 4; \quad x_2 = 1; \quad \lambda = 2$$

  - Esta candidata a solução é inviável, pois

$$x_1 + 0,2x_2 - 3 \quad \nleq \quad 0$$

Exemplo Genérico Ilustrativo (4)

- Conclui-se portanto que a hipótese anterior é incorreta. Logo, a restrição de desigualdade deve estar ativa na solução$\Rightarrow \pi > 0$;

Exemplo Genérico Ilustrativo (4)

- Conclui-se portanto que a hipótese anterior é incorreta. Logo, a restrição de desigualdade deve estar ativa na solução$\Rightarrow \pi > 0$;
- Como $\pi > 0 \Rightarrow g_i(\mathbf{x}^*) = 0$, devemos resolver agora o sistema formado por 4 equações e 4 incóginitas:

$$\begin{array}{rcl} 0,5x_1 - \lambda + \pi & = & 0 \\ 2x_2 - \lambda + 0,2\pi & = & 0 \\ 5 - x_1 - x_2 & = & 0 \\ x_1 + 0,2x_2 - 3 & = & 0 \end{array},$$

o que fornece

$$x_1^* = 2,5; \quad x_2^* = 2,5; \quad \lambda^* = 5,9375 \quad \pi^* = 4,6875$$

Exemplo Genérico Ilustrativo (4)

- Conclui-se portanto que a hipótese anterior é incorreta. Logo, a restrição de desigualdade deve estar ativa na solução$\Rightarrow \pi > 0$;
- Como $\pi > 0 \Rightarrow g_i(\mathbf{x}^*) = 0$, devemos resolver agora o sistema formado por 4 equações e 4 incóginitas:

$$\begin{array}{rcl} 0,5x_1 - \lambda + \pi & = & 0 \\ 2x_2 - \lambda + 0,2\pi & = & 0 \\ 5 - x_1 - x_2 & = & 0 \\ x_1 + 0,2x_2 - 3 & = & 0 \end{array},$$

o que fornece

$$x_1^* = 2,5; \quad x_2^* = 2,5; \quad \lambda^* = 5,9375 \quad \pi^* = 4,6875$$

- Como $\pi > 0$, esta solução é viável e portanto é a solução ótima.

Aplicação ao Problema de Despacho Econômico

Tratamento dos limites de geração

- Os limites inferior e superior de geração são expressos como:

$$\underline{P}_i \leq P_i \leq \overline{P}_i, i = 1, ..., N$$

Aplicação ao Problema de Despacho Econômico

Tratamento dos limites de geração

- Os limites inferior e superior de geração são expressos como:

$$\underline{P}_i \leq P_i \leq \overline{P}_i, i = 1, ..., N$$

- É fácil se concluir que cada uma destas restrições pode ser decomposta em duas restrições do tipo "menor ou igual":

$$\begin{aligned} P_i - \bar{P}_i &\leq 0 \\ -P_i + \underline{P}_i &\leq 0 \end{aligned}$$

Aplicação ao Problema de Despacho Econômico

- Consideraremos o problema composto por *duas* unidades geradoras:

$$
\begin{array}{ll}
\min & F_T(P_1, P_2) = F_1(P_1) + F_2(P_2) \\
\text{s.a.} & \\
& \begin{array}{rcl}
P_L - P_1 - P_2 & = & 0 \\
P_1 - \bar{P}_1 & \leq & 0 \\
-P_1 + \underline{P}_1 & \leq & 0 \\
P_2 - \bar{P}_2 & \leq & 0 \\
-P_2 + \underline{P}_2 & \leq & 0
\end{array}
\end{array}
$$

Aplicação ao Problema de Despacho Econômico

- Consideraremos o problema composto por *duas* unidades geradoras:

$$
\begin{array}{ll}
\min & F_T(P_1, P_2) = F_1(P_1) + F_2(P_2) \\
\text{s.a.} & \\
& \begin{array}{rcl}
P_L - P_1 - P_2 & = & 0 \\
P_1 - \bar{P}_1 & \leq & 0 \\
-P_1 + \underline{P}_1 & \leq & 0 \\
P_2 - \bar{P}_2 & \leq & 0 \\
-P_2 + \underline{P}_2 & \leq & 0
\end{array}
\end{array}
$$

- A função Lagrangeana correspondente é dada por:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{L}(P_1, P_2, \lambda, \bar{\pi}_1, \underline{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \underline{\pi}_2) & = & F_1(P_1) + F_2(P_2) + \\
& & \lambda(P_L - P_1 - P_2) + \\
& & \bar{\pi}_1(P_1 - \bar{P}_1) + \underline{\pi}_1(-P_1 + \underline{P}_1) + \\
& & \bar{\pi}_2(P_2 - \bar{P}_2) + \underline{\pi}_2(-P_2 + \underline{P}_2)
\end{array}
$$

Condições de KKT

a) Condições de factibilidade dual:

$$\begin{aligned} F_1'(P_1) - \lambda + \bar{\pi}_1 - \underline{\pi}_1 &= 0 \\ F_2'(P_2) - \lambda + \bar{\pi}_2 - \underline{\pi}_2 &= 0 \end{aligned}$$

b) Condições de factibilidade primal:

$$\begin{aligned} P_L - P_1 - P_2 &= 0 \\ P_1 - \bar{P}_1 &\leq 0 \\ -P_1 + \underline{P}_1 &\leq 0 \\ P_2 - \bar{P}_2 &\leq 0 \\ -P_2 + \underline{P}_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

c) Condições de folga complementar:

$$\begin{aligned} &\bar{\pi}_1(P_1 - \bar{P}_1) = 0, \quad \underline{\pi}_1(-P_1 + \underline{P}_1) = 0, \quad \bar{\pi}_1 \geq 0, \underline{\pi}_1 \geq 0 \\ &\bar{\pi}_2(P_2 - \bar{P}_2) = 0, \quad \underline{\pi}_2(-P_2 + \underline{P}_2) = 0, \quad \bar{\pi}_2 \geq 0, \underline{\pi}_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Caso 1: Nenhum limite de geração é atingido

- Não há restrição de desigualdade ativa $\Rightarrow \bar{\pi}_i = 0$ e $\underline{\pi}_i = 0$, $i = 1, 2$;

Caso 1: Nenhum limite de geração é atingido

- Não há restrição de desigualdade ativa $\Rightarrow \bar{\pi}_i = 0$ e $\underline{\pi}_i = 0$, $i = 1, 2$;
- As conds. de Factibilidade dual então fornecem:

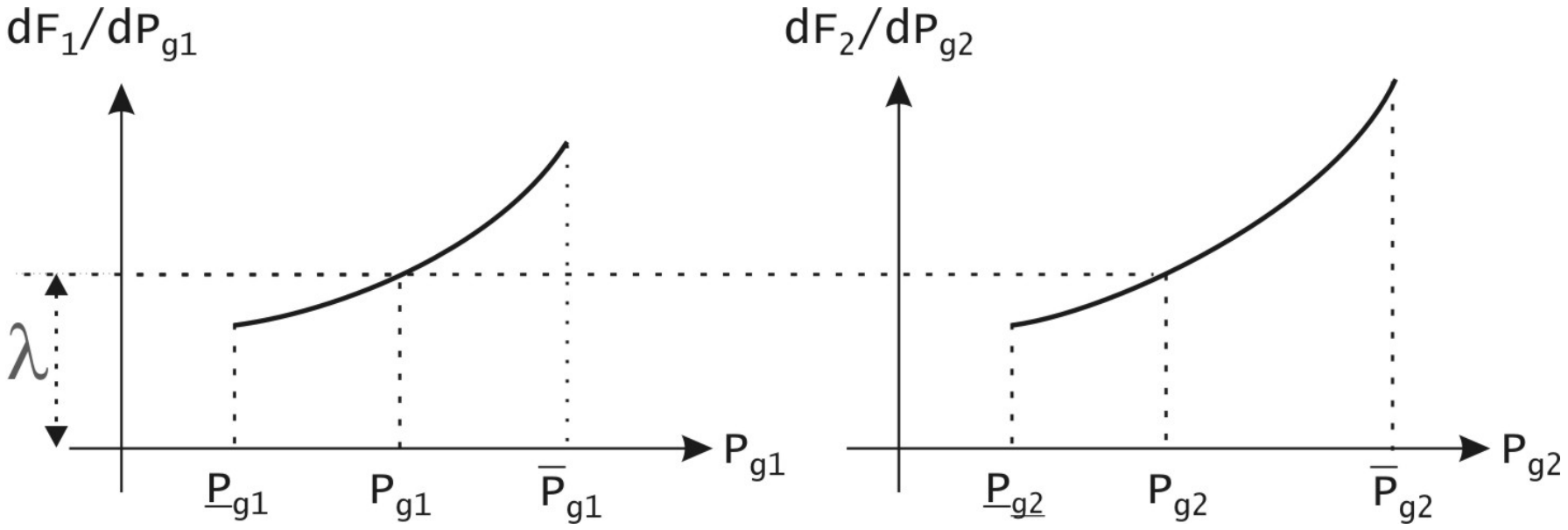
$$F'(P_1) = F_2'(P_2) = \lambda$$

Caso 1: Nenhum limite de geração é atingido

- Não há restrição de desigualdade ativa $\Rightarrow \bar{\pi}_i = 0$ e $\underline{\pi}_i = 0$, $i = 1, 2$;
- As conds. de Factibilidade dual então fornecem:

$$F'(P_1) = F_2'(P_2) = \lambda$$

- Logo, os custos incrementais das unidades devem ser iguais entre si:



Unidade 1 está no limite superior

- Nesta situação, as conds. de folga complem. preconizam que $\bar{\pi}_1 > 0$ (demais $\pi's = 0$);

Unidade 1 está no limite superior

- Nesta situação, as conds. de folga complem. preconizam que $\bar{\pi}_1 > 0$ (demais $\pi's = 0$);
- As conds. de Factibilidade dual então fornecem::

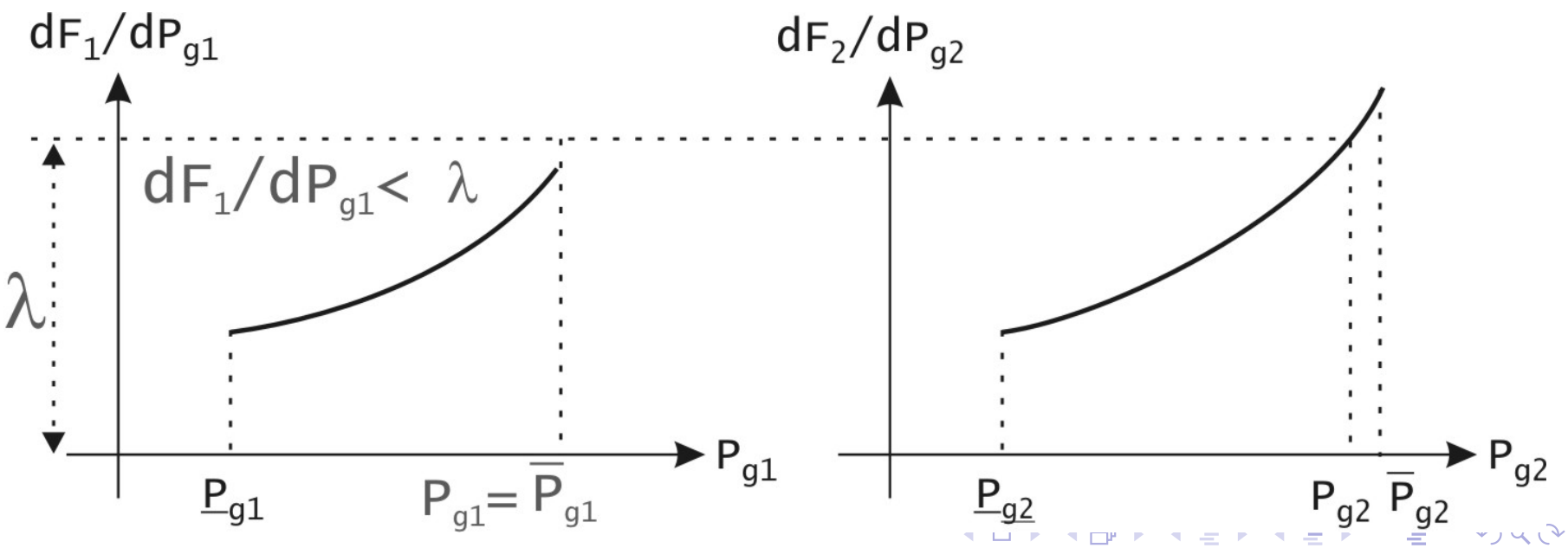
$$\begin{array}{rclcrcll} F_1'(P_1^*) - \lambda^* + \bar{\pi}_1^* & = & 0 & \Longrightarrow & F_1'(P_1) & = & \lambda^* - \bar{\pi}_1 & < \lambda \\ F_2'(P_2^*) - \lambda^* & = & 0 & \Longrightarrow & F_2'(P_2) & = & \lambda^* & \end{array}$$

Unidade 1 está no limite superior

- Nesta situação, as conds. de folga complem. preconizam que $\bar{\pi}_1 > 0$ (demais $\pi's = 0$);
- As conds. de Factibilidade dual então fornecem::

$$\begin{array}{rclcrcll} F_1'(P_1^*) - \lambda^* + \bar{\pi}_1^* & = & 0 & \Longrightarrow & F_1'(P_1) & = & \lambda^* - \bar{\pi}_1 & < \lambda \\ F_2'(P_2^*) - \lambda^* & = & 0 & \Longrightarrow & F_2'(P_2) & = & \lambda^* & \end{array}$$

- Logo, o custo incremental do gerador 1 será $< \lambda$, enquanto que o do gerador livre será igual a λ :



Unidade 1 está em seu limite inferior

- Neste caso, $\underline{\pi}_1 > 0$, e os demais π_i's são todos nulos. Portanto, teremos:

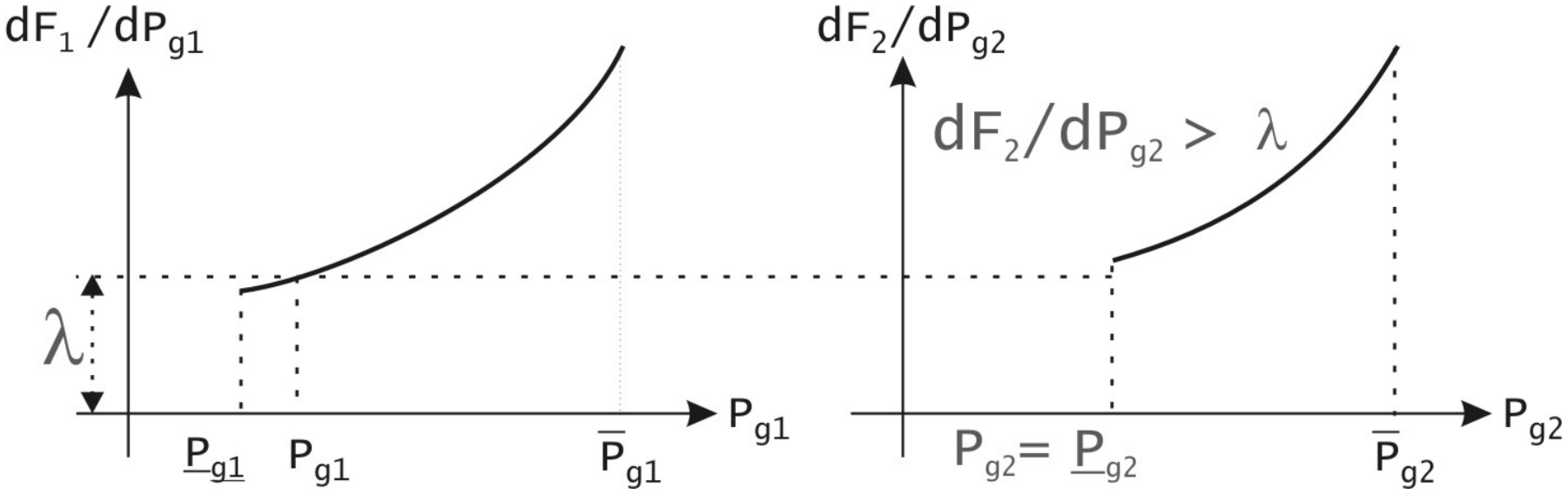
$$\begin{array}{rcccrcl} F_1'(P_1^*) - \lambda^* - \underline{\pi}_1 & = & 0 & \Longrightarrow & F_1'(P_1^*) & = & \lambda + \underline{\pi}_1 > \lambda \\ F_2'(P_2^*) - \lambda^* & = & 0 & \Longrightarrow & F_2'(P_2^*) & = & \lambda \end{array}$$

Unidade 1 está em seu limite inferior

- Neste caso, $\underline{\pi}_1 > 0$, e os demais π_i's são todos nulos. Portanto, teremos:

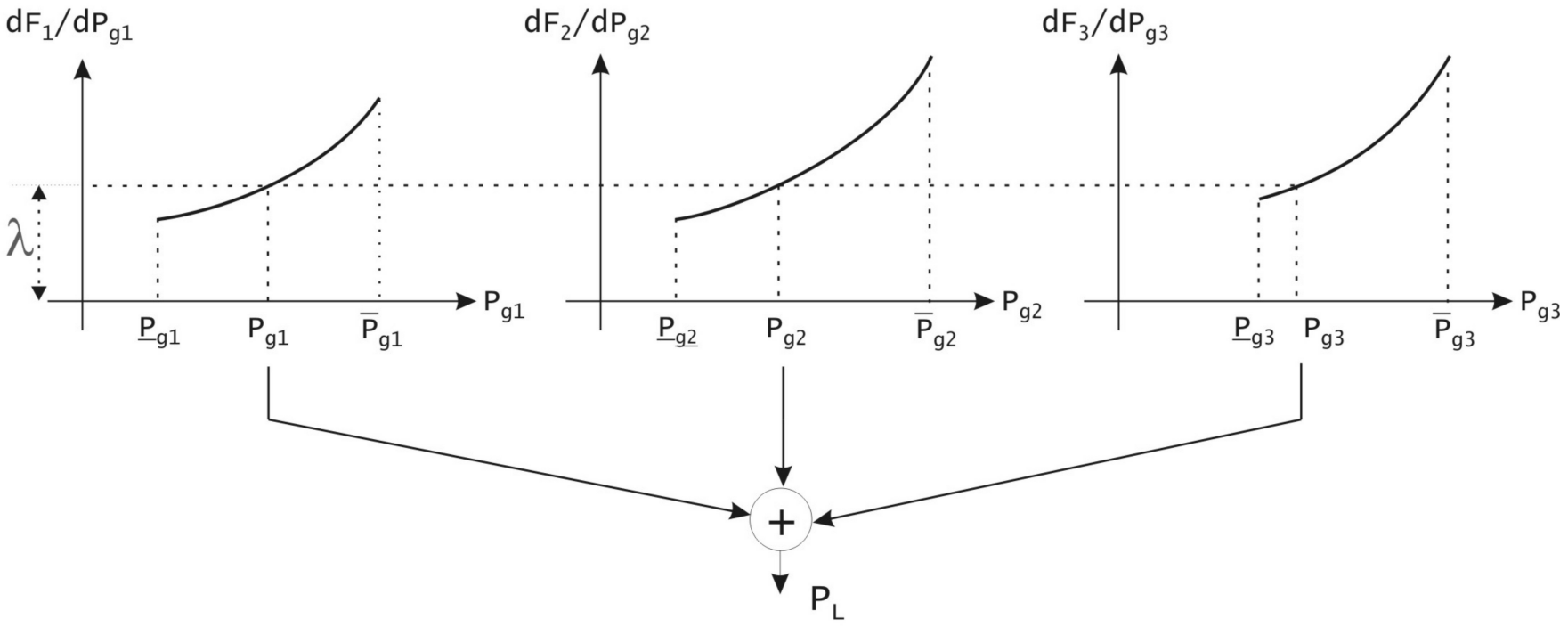
$$\begin{array}{rcccrcl} F_1'(P_1^*) - \lambda^* - \underline{\pi}_1 & = & 0 & \Longrightarrow & F_1'(P_1^*) & = & \lambda + \underline{\pi}_1 > \lambda \\ F_2'(P_2^*) - \lambda^* & = & 0 & \Longrightarrow & F_2'(P_2^*) & = & \lambda \end{array}$$

- Conclui-se que, quando um gerador atinge seu limite inferior, seu custo incremental será maior que λ :



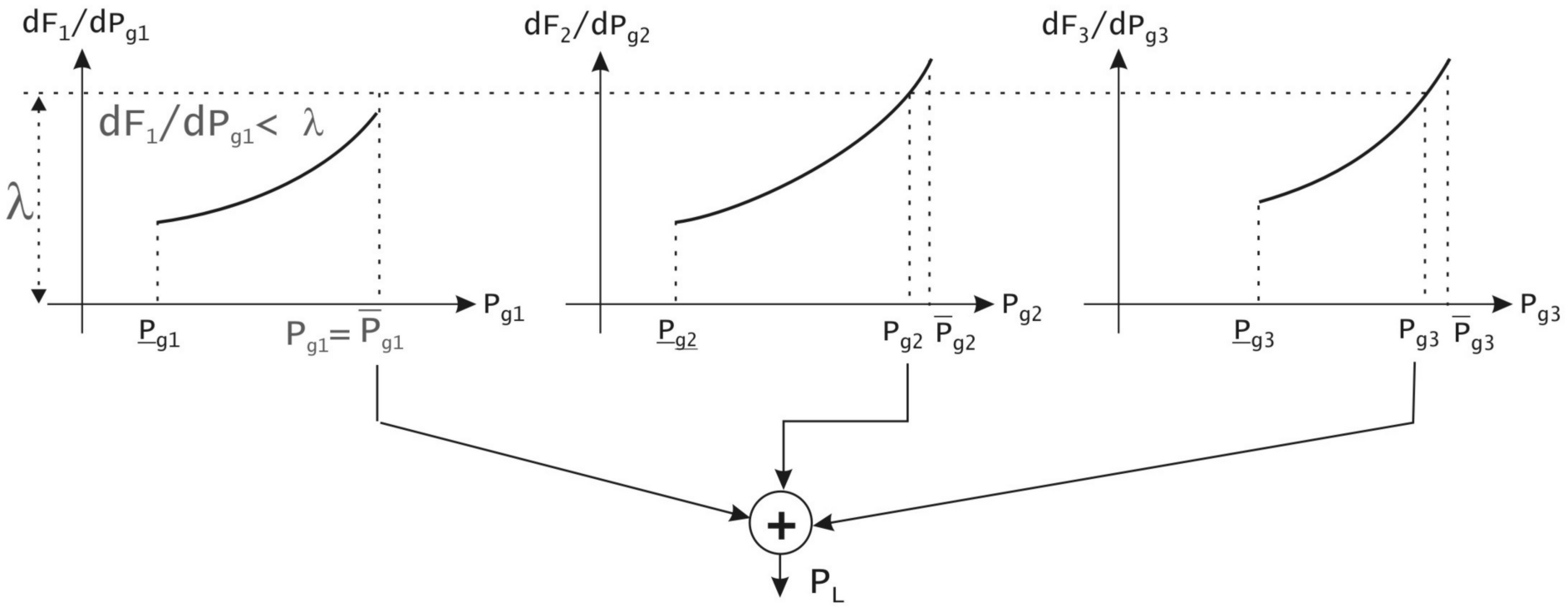
Generalização para Várias Unidades (1)

Todas as unidades livres



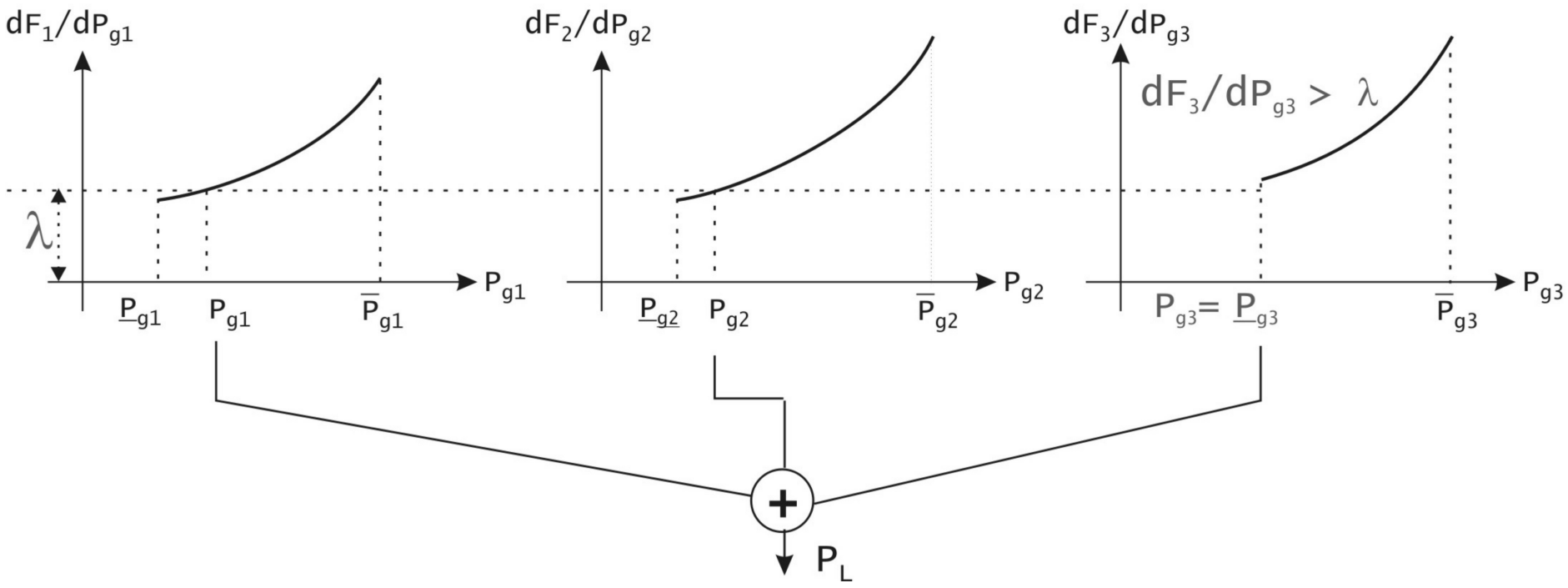
Generalização para Várias Unidades (2)

Unidade 1 atinge limite superior



Generalização para Várias Unidades (3)

Unidade 3 atinge limite inferior



Exemplo A (1)

- Dados das unidades geradoras:

Unidade 1:	$\underline{P}_1 = 150\ MW$	$\overline{P}_1 = 600\ MW$
(carvão)	$H_1(P_1) = 510 + 7,2\,P_1 + 0,00142\,P_1^2$	
Unidade 2:	$\underline{P}_2 = 100\ MW$	$\overline{P}_2 = 400\ MW$
(óleo)	$H_2(P_2) = 310 + 7,85\,P_2 + 0,00194\,P_2^2$	
Unidade 3:	$\underline{P}_3 = 50\ MW$	$\overline{P}_3 = 200\ MW$
(óleo)	$H_3(P_3) = 78 + 7,97\,P_3 + 0,00482\,P_3^2$	

Exemplo A (1)

- Dados das unidades geradoras:

Unidade 1:	$\underline{P}_1 = 150\ MW$	$\overline{P}_1 = 600\ MW$
(carvão)	$H_1(P_1) = 510 + 7,2\,P_1 + 0,00142\,P_1^2$	
Unidade 2:	$\underline{P}_2 = 100\ MW$	$\overline{P}_2 = 400\ MW$
(óleo)	$H_2(P_2) = 310 + 7,85\,P_2 + 0,00194\,P_2^2$	
Unidade 3:	$\underline{P}_3 = 50\ MW$	$\overline{P}_3 = 200\ MW$
(óleo)	$H_3(P_3) = 78 + 7,97\,P_3 + 0,00482\,P_3^2$	

- Custo dos combustíveis: $f_{carvão} = 1,10\ \$/MBtu$ e $f_{óleo} = 1,00\ \$/MBtu$;

Exemplo A (1)

- Dados das unidades geradoras:

Unidade 1:	$\underline{P}_1 = 150\ MW$	$\overline{P}_1 = 600\ MW$
(carvão)	$H_1(P_1) = 510 + 7,2\,P_1 + 0,00142\,P_1^2$	
Unidade 2:	$\underline{P}_2 = 100\ MW$	$\overline{P}_2 = 400\ MW$
(óleo)	$H_2(P_2) = 310 + 7,85\,P_2 + 0,00194\,P_2^2$	
Unidade 3:	$\underline{P}_3 = 50\ MW$	$\overline{P}_3 = 200\ MW$
(óleo)	$H_3(P_3) = 78 + 7,97\,P_3 + 0,00482\,P_3^2$	

- Custo dos combustíveis: $f_{carvão} = 1,10\ \$/MBtu$ e $f_{óleo} = 1,00\ \$/MBtu$;
- Carga:

$$P_L = 850\ MW$$

Exemplo A (2)

- Funções-custo:

Unidade 1:	$\underline{P}_1 = 150\ MW$	$\overline{P}_1 = 600\ MW$
(carvão)	$F_1(P_1) = 561 + 7,92\,P_1 + 0,001562\,P_1^2$	
Unidade 2:	$\underline{P}_2 = 100\ MW$	$\overline{P}_2 = 400\ MW$
(óleo)	$F_2(P_2) = 310 + 7,85\,P_2 + 0,00194\,P_2^2$	
Unidade 3:	$\underline{P}_3 = 50\ MW$	$\overline{P}_3 = 200\ MW$
(óleo)	$F_3(P_3) = 78 + 7,97\,P_3 + 0,00482\ P_3^2$	

Exemplo B:

- Supor agora que $f_{carvão} = 0,90\ \$/MBtu$;

Exemplo B:

- Supor agora que $f_{carvão} = 0,90\ \$/MBtu$;
- Neste caso, as funções-custo tornam-se:

Unidade 1:	$\underline{P}_1 = 150\ MW$	$\overline{P}_1 = 600\ MW$
(carvão)	$F1(P1) = 459 + 6,48P1 + 0,00128P_1^2$	
Unidade 2:	$\underline{P}_2 = 100\ MW$	$\overline{P}_2 = 400\ MW$
(óleo)	$F_2(P_2) = 310 + 7,85\,P_2 + 0,00194\,P_2^2$	
Unidade 3:	$\underline{P}_3 = 50\ MW$	$\overline{P}_3 = 200\ MW$
(óleo)	$F_3(P_3) = 78 + 7,97\,P_3 + 0,00482\ P_3^2$	

Exemplo B:

- Supor agora que $f_{carvão} = 0,90\ \$/MBtu$;
- Neste caso, as funções-custo tornam-se:

Unidade 1:	$\underline{P}_1 = 150\ MW$	$\overline{P}_1 = 600\ MW$
(carvão)	$F1(P1) = 459 + 6,48P1 + 0,00128P_1^2$	
Unidade 2:	$\underline{P}_2 = 100\ MW$	$\overline{P}_2 = 400\ MW$
(óleo)	$F_2(P_2) = 310 + 7,85\,P_2 + 0,00194\,P_2^2$	
Unidade 3:	$\underline{P}_3 = 50\ MW$	$\overline{P}_3 = 200\ MW$
(óleo)	$F_3(P_3) = 78 + 7,97\,P_3 + 0,00482\ P_3^2$	

- Resolver o problema de DE para o mesmo carregamento de 850 MW.

Despacho Econômico - Exemplo B (I)

- $1^{a.}$ **Hipótese:** três máquinas livres $\Longrightarrow$ custos incrementais iguais:

$$\begin{aligned} F_1'(P_1) &= 6,48 + 0,00256\ P_1 &= \lambda \qquad P_1 &= (\lambda - 6,48)/0,00256 \\ F_2'(P_2) &= 7,85 + 0,00388\ P_2 &= \lambda \qquad P_2 &= (\lambda - 7,85)/0,00388 \\ F_3'(P_3) &= 7,97 + 0,00964\ P_3 &= \lambda \qquad P_3 &= (\lambda - 7,97)/0,00964 \end{aligned}$$

- Equação de balanço de potência:

$$P_1 + P_2 + P_3 = 850$$

$$\frac{\lambda - 6,48}{0,00256} + \frac{\lambda - 7,85}{0,00388} + \frac{\lambda - 7,97}{0,00964} = 850 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 8,284\ \$/MWh$$

- Despacho:

$$P_1 = 704,6\ MW \qquad P_2 = 111,8\ MW \qquad P_3 = 32,6\ MW$$

- Inviável, porque $P_1 > \overline{P}_1$ e $P_3 < \underline{P}_3$.

Despacho Econômico - Exemplo B (II)

- **2$^{a.}$ Hipótese:** $P_1 = \overline{P}_1$ e $P_3 = \underline{P}_3$. Neste caso:

$$P_1 = 600\ MW, \quad P_3 = 50\ MW, \quad P_2 = 850 - (600 + 50) = 200\ MW$$

- Solução é ótima? É necessário testar condições de otimalidade:

$$\begin{array}{rcl} F_1'(P_1) & < & \lambda \\ F_3'(P_3) & > & \lambda \end{array}$$

- λ é igual ao custo incremental da unidade livre:

$$\lambda = F_2'(P_2) = 7,85 + 0,00388 \times 200 = 8,626\ \$/MWh$$

$$\begin{array}{rclcl} F_1'(\overline{P}_1) & = & 6,48 + 0,00256 \times 600 & = & 8,016\ \$/MWh \\ F_3'(\underline{P}_3) & = & 7,97 + 0,00964 \times 50 & = & 8,452\ \$/MWh \end{array}$$

- Portanto:

$$F_1'(\overline{P}_1) < \lambda \quad \checkmark \quad \text{mas} \quad F_3'(\underline{P}_3) \not> \lambda \quad \times \quad \Rightarrow \quad \text{Solução não é ótima!}$$

Despacho Econômico - Exemplo B (III)

- $F_1'(P_1) < \lambda$ indica que hipótese $P_1 = \overline{P}_1$ é *válida*, enquanto que $F_3'(P_3) \not> \lambda$ indica que hipótese $P_3 = \underline{P}_3$ está *incorreta*, e portanto esta última tem que ser revista. Consequentemente:

Despacho Econômico - Exemplo B (III)

- $F_1'(P_1) < \lambda$ indica que hipótese $P_1 = \overline{P}_1$ é *válida*, enquanto que $F_3'(P_3) \not> \lambda$ indica que hipótese $P_3 = \underline{P}_3$ está *incorreta*, e portanto esta última tem que ser revista. Consequentemente:
- **3$^{a.}$ Hipótese:** $P_1 = \overline{P}_1$; P_2 e P_3 ambas livres, ou seja:

$$P_1 = 600\ MW \text{ e } \quad P_2 + P_3 = 850 - 600 = 250\ MW$$

$$\frac{\lambda - 7{,}85}{0{,}00388} + \frac{\lambda - 7{,}97}{0{,}00964} = 250 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 8,576\ \$/MWh$$

Despacho Econômico - Exemplo B (III)

- $F_1'(P_1) < \lambda$ indica que hipótese $P_1 = \overline{P}_1$ é *válida*, enquanto que $F_3'(P_3) \not> \lambda$ indica que hipótese $P_3 = \underline{P}_3$ está *incorreta*, e portanto esta última tem que ser revista. Consequentemente:
- **3$^{a.}$ Hipótese:** $P_1 = \overline{P}_1$; P_2 e P_3 ambas livres, ou seja:

$$P_1 = 600\ MW \text{ e } \quad P_2 + P_3 = 850 - 600 = 250\ MW$$

$$\frac{\lambda - 7{,}85}{0{,}00388} + \frac{\lambda - 7{,}97}{0{,}00964} = 250 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 8,576\ \$/MWh$$

- Despacho correspondente:

$$P_1 = 600\ MW \qquad P_2 = 187,1\ MW \qquad P_3 = 62,9\ MW, \qquad (\bigstar)$$

que é viável. Mas será ótimo?

Despacho Econômico - Exemplo B (III)

- $F_1'(P_1) < \lambda$ indica que hipótese $P_1 = \overline{P}_1$ é *válida*, enquanto que $F_3'(P_3) \not> \lambda$ indica que hipótese $P_3 = \underline{P}_3$ está *incorreta*, e portanto esta última tem que ser revista. Consequentemente:
- **3$^{a.}$ Hipótese:** $P_1 = \overline{P}_1$; P_2 e P_3 ambas livres, ou seja:

$$P_1 = 600\ MW \text{ e } \quad P_2 + P_3 = 850 - 600 = 250\ MW$$

$$\frac{\lambda - 7{,}85}{0{,}00388} + \frac{\lambda - 7{,}97}{0{,}00964} = 250 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 8,576\ \$/MWh$$

- Despacho correspondente:

$$P_1 = 600\ MW \qquad P_2 = 187,1\ MW \qquad P_3 = 62,9\ MW, \qquad (\bigstar)$$

que é viável. Mas será ótimo?

- Para responder, verificar se $F_1'(P_1) < \lambda$. Como

$$F_1'(\overline{P}_1) = 8,016\ \$/MWh \quad \text{e} \quad \lambda = 8,576\ \$/MWh$$

a condição é cumprida e o despacho $(\bigstar)$ é ótimo!

Despacho Econômico - Exemplo B (IV)

Comprovação:

- Para comprovar a otimalidade do despacho anterior, vamos comparar os custos totais de produção dos dois despachos viáveis correspondentes às hipóteses 2 e 3:

Despacho Econômico - Exemplo B (IV)

Comprovação:

- Para comprovar a otimalidade do despacho anterior, vamos comparar os custos totais de produção dos dois despachos viáveis correspondentes às hipóteses 2 e 3:
- Custo total de produção do despacho da hipótese 2:

$$F_{T,H2} = F_1(600) + F_2(200) + F_3(50) = 7254 \ \$/h$$

Despacho Econômico - Exemplo B (IV)

Comprovação:

- Para comprovar a otimalidade do despacho anterior, vamos comparar os custos totais de produção dos dois despachos viáveis correspondentes às hipóteses 2 e 3:
- Custo total de produção do despacho da hipótese 2:

$$F_{T,H2} = F_1(600) + F_2(200) + F_3(50) = 7254 \ \$/h$$

- Custo total de produção do despacho da hipótese 3:

$$F_{T,H3} = F_1(600) + F_2(187,1) + F_3(62,9) = 7252,8 \ \$/h$$

Despacho Econômico - Exemplo B (IV)

Comprovação:

- Para comprovar a otimalidade do despacho anterior, vamos comparar os custos totais de produção dos dois despachos viáveis correspondentes às hipóteses 2 e 3:
- Custo total de produção do despacho da hipótese 2:

$$F_{T,H2} = F_1(600) + F_2(200) + F_3(50) = 7254 \ \$/h$$

- Custo total de produção do despacho da hipótese 3:

$$F_{T,H3} = F_1(600) + F_2(187,1) + F_3(62,9) = 7252,8 \ \$/h$$

- Verifica-se portanto que, conforme se esperava,

$$F_{T,H3} < F_{T,H2}$$