EEL 7100
Despacho Econômico de Unidades Térmicas
Parte 3

Consideração das Perdas de Transmissão

Antonio Simões Costa

UFSC - LABSPOT

Despacho Econômico e Perdas de Transmissão

- Até agora, os métodos de DE apresentados têm ignorado as *perdas de transmissão*;

Despacho Econômico e Perdas de Transmissão

- Até agora, os métodos de DE apresentados têm ignorado as *perdas de transmissão*;
- Perdas podem ter efeito significativo no despacho ótimo, pois:

Despacho Econômico e Perdas de Transmissão

- Até agora, os métodos de DE apresentados têm ignorado as *perdas de transmissão*;
- Perdas podem ter efeito significativo no despacho ótimo, pois:
  - geradores diferentes têm impactos distintos sobre as perdas de transmissão;

Despacho Econômico e Perdas de Transmissão

- Até agora, os métodos de DE apresentados têm ignorado as *perdas de transmissão*;
- Perdas podem ter efeito significativo no despacho ótimo, pois:
  - geradores diferentes têm impactos distintos sobre as perdas de transmissão;
  - isto ocorre em função da localização dos geradores na rede.

Despacho Econômico e Perdas de Transmissão

- Até agora, os métodos de DE apresentados têm ignorado as *perdas de transmissão*;
- Perdas podem ter efeito significativo no despacho ótimo, pois:
  - geradores diferentes têm impactos distintos sobre as perdas de transmissão;
  - isto ocorre em função da localização dos geradores na rede.
- É portanto importante estender os métodos de DE para incluir as perdas de transmissão.

Consideração das Perdas no Despacho Econômico

- Forma aproximada de se investigar o efeito das perdas: representá-las como uma função das potências geradas

$$P_{perdas} = P_{perdas}(P_1, P_2, \ldots, P_N)$$

Consideração das Perdas no Despacho Econômico

- Forma aproximada de se investigar o efeito das perdas: representá-las como uma função das potências geradas

$$P_{perdas} = P_{perdas}(P_1, P_2, \ldots, P_N)$$

- Se esta função está disponível, não há necessidade de representar explicitamente a rede nem as variáveis nodais;

Consideração das Perdas no Despacho Econômico

- Forma aproximada de se investigar o efeito das perdas: representá-las como uma função das potências geradas

$$P_{perdas} = P_{perdas}(P_1, P_2, \ldots, P_N)$$

- Se esta função está disponível, não há necessidade de representar explicitamente a rede nem as variáveis nodais;
- Estudo pode ser conduzido com base em um modelo de barra única;

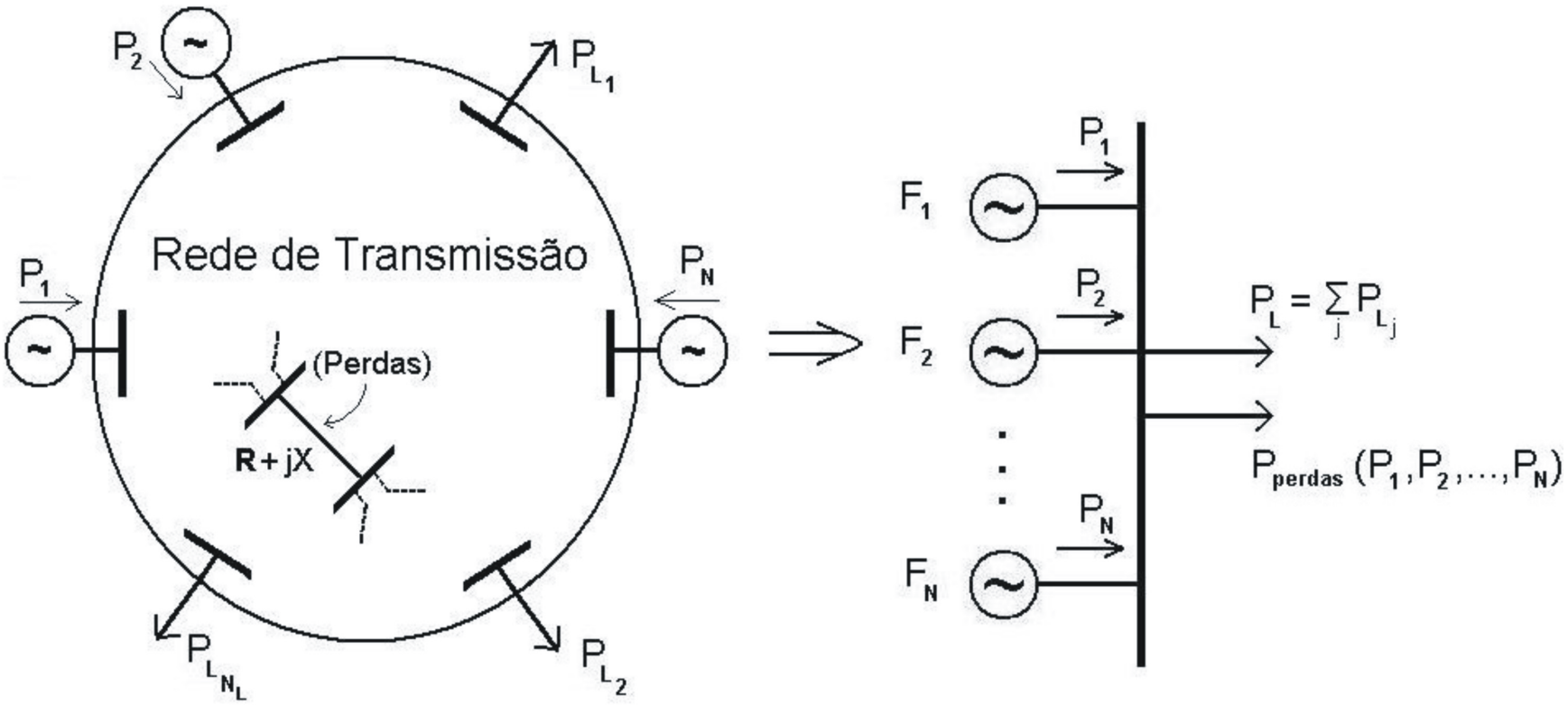
Consideração das Perdas no Despacho Econômico

- Forma aproximada de se investigar o efeito das perdas: representá-las como uma função das potências geradas

$$P_{perdas} = P_{perdas}(P_1, P_2, \ldots, P_N)$$

- Se esta função está disponível, não há necessidade de representar explicitamente a rede nem as variáveis nodais;
- Estudo pode ser conduzido com base em um modelo de barra única;
- *Conclusão:* DE *com perdas* é tratado como extensão do DE clássico que ignora as perdas.

Modelo em Barra Única com Representação das Perdas

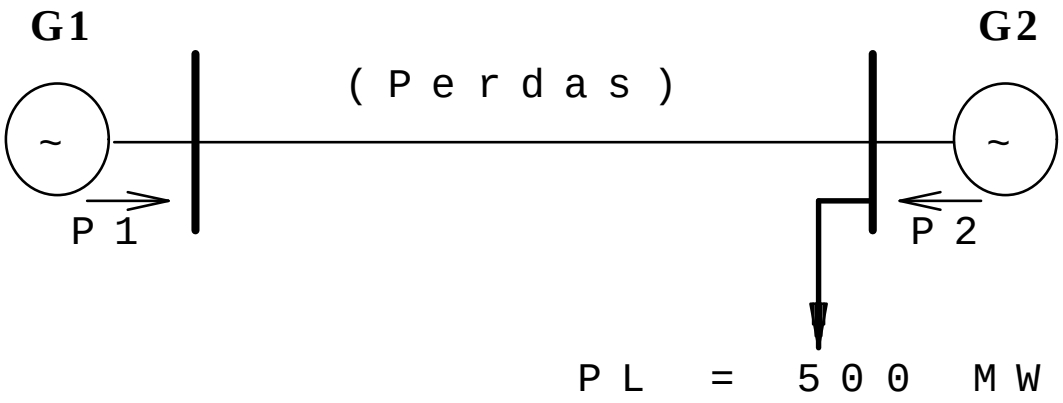


Sistema Real

Modelo em Barra Única

Exemplo Introdutório

Seja o sistema de duas barras:



Os geradores **G1** e **G2** tem limites e funções-custo iguais, isto é:

$$F_1(P_1) = F_2(P_2) = F(P)$$

$$F(P) = 400 + 7,0\ P + 0,002\ P^2 \ \ \$\ /\ h, \quad \underline{P} = 70\ MW, \quad \overline{P} = 400\ MW$$

As perdas na linha de transmissão são dadas por

$$P_{perdas} = 2 \times 10^{-4}\ P_1^2.$$

Encontre despachos para as duas unidades geradoras sob as diversas condições indicadas a seguir.

Solução do Exemplo (I)

a) Ignorando as perdas

- Como os geradores são iguais, esta solução fornece:

$$P_1 = P_2 \quad = \quad 250\ MW$$

Solução do Exemplo (I)

a) Ignorando as perdas

- Como os geradores são iguais, esta solução fornece:

$$P_1 = P_2 \quad = \quad 250\ MW$$

- Porém este valor de P_1 na verdade provoca perdas iguais a

$$P_{perdas} = (2 \times 10^{-4}) \times 250^2 = 12,5\ MW$$

Solução do Exemplo (I)

a) Ignorando as perdas

- Como os geradores são iguais, esta solução fornece:

$$P_1 = P_2 \quad = \quad 250\ MW$$

- Porém este valor de P_1 na verdade provoca perdas iguais a

$$P_{perdas} = (2 \times 10^{-4}) \times 250^2 = 12,5\ MW$$

- Logo, a potência que chega à carga é

$$P_d = 487,5\ MW < 500 MW$$

Solução do Exemplo (I)

a) Ignorando as perdas

- Como os geradores são iguais, esta solução fornece:

$$P_1 = P_2 \quad = \quad 250\ MW$$

- Porém este valor de P_1 na verdade provoca perdas iguais a

$$P_{perdas} = (2 \times 10^{-4}) \times 250^2 = 12,5\ MW$$

- Logo, a potência que chega à carga é

$$P_d = 487,5\ MW < 500 MW$$

- Conclui-se portanto que a carga não é atendida.

Solução do Exemplo (II)

(b) Ignorando a influência econômica das perdas

- *Estratégia:* A partir do despacho determinado do item anterior, carregar a unidade 1 até que as perdas sejam supridas, e

Solução do Exemplo (II)

(b) Ignorando a influência econômica das perdas

- *Estratégia:* A partir do despacho determinado do item anterior, carregar a unidade 1 até que as perdas sejam supridas, e
- Unidade 2 é mantida no valor ótimo ignorando as perdas.

Solução do Exemplo (II)

(b) Ignorando a influência econômica das perdas

- *Estratégia:* A partir do despacho determinado do item anterior, carregar a unidade 1 até que as perdas sejam supridas, e
- Unidade 2 é mantida no valor ótimo ignorando as perdas.
- Isto implica em $P_2 = 250\ MW$ e

$$P_1 = 250 + 0,0002\ P_1^2$$

Solução do Exemplo (II)

(b) Ignorando a influência econômica das perdas

- *Estratégia:* A partir do despacho determinado do item anterior, carregar a unidade 1 até que as perdas sejam supridas, e
- Unidade 2 é mantida no valor ótimo ignorando as perdas.
- Isto implica em $P_2 = 250\ MW$ e

$$P_1 = 250 + 0,0002\ P_1^2$$

- Resolvendo para P_1 e escolhendo a solução que atende os limites, temos

$$P_1 = 263,932\ MW$$

Solução do Exemplo (II)

(b) Ignorando a influência econômica das perdas

- *Estratégia:* A partir do despacho determinado do item anterior, carregar a unidade 1 até que as perdas sejam supridas, e
- Unidade 2 é mantida no valor ótimo ignorando as perdas.
- Isto implica em $P_2 = 250\ MW$ e

$$P_1 = 250 + 0,0002\ P_1^2$$

- Resolvendo para P_1 e escolhendo a solução que atende os limites, temos

$$P_1 = 263,932\ MW$$

- Consequentemente:

$$\begin{aligned} P_{perdas} &= 13,932\ MW \\ \text{Custo de Produção} &= F_1(P_1) + F_2(P_2) \quad = \quad 4661,84\ \$/h \end{aligned}$$

Solução do Exemplo (III)

(c) Minimizando o custo total de geração (i)

- O problema é formulado como:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & F_T(P_1, P_2) = F_1(P_1) + F_2(P_2) \\
\text{s.a.} \quad & \\
& P_L + P_{perdas} - P_1 - P_2 \quad = \quad 0
\end{aligned}
$$

Solução do Exemplo (III)

(c) Minimizando o custo total de geração (i)

- O problema é formulado como:

$$\begin{aligned} \min \quad & F_T(P_1, P_2) = F_1(P_1) + F_2(P_2) \\ \text{s.a.} \quad & \\ & P_L + P_{perdas} - P_1 - P_2 \quad = \quad 0 \end{aligned}$$

- A função Lagrangeana correspondente é:

$$\mathcal{L} \quad = \quad F_1(P_1) + F_2(P_2) + \lambda(P_L + P_{perdas} - P_1 - P_2)$$

Solução do Exemplo (III)

(c) Minimizando o custo total de geração (i)

- O problema é formulado como:

$$\begin{array}{ll} \min & F_T(P_1, P_2) = F_1(P_1) + F_2(P_2) \\ \text{s.a.} & \\ & P_L + P_{perdas} - P_1 - P_2 \quad = \quad 0 \end{array}$$

- A função Lagrangeana correspondente é:

$$\mathcal{L} \quad = \quad F_1(P_1) + F_2(P_2) + \lambda(P_L + P_{perdas} - P_1 - P_2)$$

- Portanto, as condições de otimalidade fornecem:

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_1} & = & F_1'(P_1) - \lambda(1 - \frac{\partial P_{perdas}}{\partial P_1}) \quad = \quad 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_2} & = & F_2'(P_2) - \lambda(1 - \frac{\partial P_{perdas}}{\partial P_2}) \quad = \quad 0 \\ & & \underline{P}_1 + P_2 - \underline{P}_L - \underline{P}_{perdas} \quad = \quad 0 \end{array}$$

Solução do Exemplo (IV)

(c) Minimizando o custo total de geração (ii)

- Substituindo os valores numéricos:

$$\begin{aligned} 7,0 + 0,004P_1 - \lambda(1 - 0,0004P_1) &= 0 \\ 7,0 + 0,004P_2 - \lambda &= 0 \\ P_1 + P_2 - 500 - 0,0002P_1^2 &= 0 \end{aligned}$$

Solução do Exemplo (IV)

(c) Minimizando o custo total de geração (ii)

- Substituindo os valores numéricos:

$$\begin{aligned} 7,0 + 0,004P_1 - \lambda(1 - 0,0004P_1) &= 0 \\ 7,0 + 0,004P_2 - \lambda &= 0 \\ P_1 + P_2 - 500 - 0,0002P_1^2 &= 0 \end{aligned}$$

- Sistema de equações é *não-linear.* A solução via método iterativo apropriado fornece:

$$\begin{aligned} P_1 &= 178,882\ MW \\ P_2 &= 327,496\ MW \\ P_{perdas} &= 6,378\ MW\ (= 178,882 + 327,496 - 500,0) \\ \text{Custo de Produção} &= 4623,15\ \$/h \end{aligned}$$

Solução do Exemplo (IV)

(c) Minimizando o custo total de geração (ii)

- Substituindo os valores numéricos:

$$\begin{aligned} 7,0 + 0,004P_1 - \lambda(1 - 0,0004P_1) &= 0 \\ 7,0 + 0,004P_2 - \lambda &= 0 \\ P_1 + P_2 - 500 - 0,0002P_1^2 &= 0 \end{aligned}$$

- Sistema de equações é *não-linear.* A solução via método iterativo apropriado fornece:

$$\begin{aligned} P_1 &= 178,882\ MW \\ P_2 &= 327,496\ MW \\ P_{perdas} &= 6,378\ MW\ (= 178,882 + 327,496 - 500,0) \\ \text{Custo de Produção} &= 4623,15\ \$/h \end{aligned}$$

- *Conclusão:* Solução de mínimo custo de geração tende a suprir as perdas a partir da geração próxima à carga, já que as perdas não dependem de P_2.

Solução do Exemplo (IV)

(d) Minimizando as perdas

- Neste caso, minimizar as perdas implica em carregar ao máximo a unidade 2 e gerar o mínimo possível na unidade 1. Logo, $P_2 = \overline{P}_2$ e

$$P_1 = 100 + 0,0002\ P_1^2$$

Solução do Exemplo (IV)

(d) Minimizando as perdas

- Neste caso, minimizar as perdas implica em carregar ao máximo a unidade 2 e gerar o mínimo possível na unidade 1. Logo, $P_2 = \overline{P}_2$ e

$$P_1 = 100 + 0,0002\ P_1^2$$

- Isto fornece:

$$\begin{aligned} P_2 &= 400\ MW \\ P_1 &= 102,084 MW \\ \text{perdas} &= 2,084 MW\ (\text{mínimo!}) \\ \text{Custo de produção} &= F_1(102,084) + F_2(400) \quad = \quad 4655,43\ \$/h \end{aligned}$$

Conclusões sobre o exemplo

- O custo de geração do *Despacho Econômico* é efetivamente o menor dentre as três soluções viáveis, porém não minimiza as perdas;

Conclusões sobre o exemplo

- O custo de geração do *Despacho Econômico* é efetivamente o menor dentre as três soluções viáveis, porém não minimiza as perdas;
- De maneira similar, o valor das perdas obtido na última estratégia é o mínimo entre todos os casos, porém não minimiza o custo de produção;

Conclusões sobre o exemplo

- O custo de geração do *Despacho Econômico* é efetivamente o menor dentre as três soluções viáveis, porém não minimiza as perdas;
- De maneira similar, o valor das perdas obtido na última estratégia é o mínimo entre todos os casos, porém não minimiza o custo de produção;
- Logo, despacho mais econômico não necessariamente implica na minimização das perdas;

Conclusões sobre o exemplo

- O custo de geração do *Despacho Econômico* é efetivamente o menor dentre as três soluções viáveis, porém não minimiza as perdas;
- De maneira similar, o valor das perdas obtido na última estratégia é o mínimo entre todos os casos, porém não minimiza o custo de produção;
- Logo, despacho mais econômico não necessariamente implica na minimização das perdas;
- Observe que, no caso da solução via Despacho Econômico, as perdas correspondem a apenas $1,3$ % da carga, porém provocam um desvio significativo em relação ao caso sem perdas.

Despacho Econômico na Presença de Perdas de Transmissão

- *Objetivo:* avaliar a influência das perdas de transmissão no despacho que minimiza os custos da geração térmica;

Despacho Econômico na Presença de Perdas de Transmissão

- *Objetivo:* avaliar a influência das perdas de transmissão no despacho que minimiza os custos da geração térmica;

- Formulação do problema:

$$\begin{aligned} \min \qquad F_T &= \sum_{i=1}^{N} F_i(P_i) \\ s.a \\ \Phi(P_1, ..., P_N) &= P_L + P_{perdas}(P_1, ...P_N) - \sum_{i=1}^{N} P_i = 0 \end{aligned}$$

Lagrangeana e Condições de Otimalidade

- Função Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = F_T + \lambda \left(P_L + P_{perdas}(P_1, ...P_N) - \sum_{i=1}^{N} P_i \right)$$

Lagrangeana e Condições de Otimalidade

- Função Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = F_T + \lambda \left(P_L + P_{perdas}(P_1, ...P_N) - \sum_{i=1}^{N} P_i \right)$$

- Condições de otimalidade:

Lagrangeana e Condições de Otimalidade

- Função Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = F_T + \lambda \left(P_L + P_{perdas}(P_1, ...P_N) - \sum_{i=1}^{N} P_i \right)$$

- Condições de otimalidade:
  - A condição de *factibilidade dual* $\nabla_P \mathcal{L} = 0$ fornece:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_i} = \frac{dF_i}{dP_i} - \lambda \left(1 - \frac{\partial P_{perdas}}{\partial P_i} \right) = 0$$

Lagrangeana e Condições de Otimalidade

- Função Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = F_T + \lambda \left(P_L + P_{perdas}(P_1, ...P_N) - \sum_{i=1}^{N} P_i \right)$$

- Condições de otimalidade:
  - A condição de *factibilidade dual* $\nabla_P \mathcal{L} = 0$ fornece:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_i} = \frac{dF_i}{dP_i} - \lambda \left(1 - \frac{\partial P_{perdas}}{\partial P_i} \right) = 0$$

  - A condição de *factibilidade primal* $\nabla_\lambda \mathcal{L} = 0$ fornece:

$$P_L + P_{perdas}(P_1, ...P_N) - \sum_{i=1}^{N} P_i = 0$$

Equação de Coordenação das Perdas

- Re-examinemos a condição de factibilidade dual, dada por:

$$\frac{dF_i}{dP_i} = \lambda \left(1 - \frac{\partial P_{perdas}}{\partial P_i}\right)$$

Equação de Coordenação das Perdas

- Re-examinemos a condição de factibilidade dual, dada por:

$$\frac{dF_i}{dP_i} = \lambda \left(1 - \frac{\partial P_{perdas}}{\partial P_i}\right)$$

- que pode ser reescrita como:

$$\left(\frac{1}{1 - \frac{\partial P_{perdas}}{\partial P_i}}\right) \times \frac{dF_i(P_i)}{dP_i} = \lambda \qquad (*)$$

Equação de Coordenação das Perdas

- Re-examinemos a condição de factibilidade dual, dada por:

$$\frac{dF_i}{dP_i} = \lambda \left(1 - \frac{\partial P_{perdas}}{\partial P_i}\right)$$

- que pode ser reescrita como:

$$\left(\frac{1}{1 - \frac{\partial P_{perdas}}{\partial P_i}}\right) \times \frac{dF_i(P_i)}{dP_i} = \lambda \qquad (*)$$

- Definindo:

$$\begin{aligned} \textit{Perdas incrementais para gerador } i: \quad PIT_i &\triangleq \frac{\partial P_{perdas}}{\partial P_i} \\ \textit{Fator de Penalidade para gerador } i: \quad FP_i &\triangleq \frac{1}{1 - \frac{\partial P_{perdas}}{\partial P_i}} \end{aligned}$$

podemos re-escrever a Eq. $(*)$ na forma mais compacta:

Equação de Coordenação das Perdas

- Re-examinemos a condição de factibilidade dual, dada por:

$$\frac{dF_i}{dP_i} = \lambda \left(1 - \frac{\partial P_{perdas}}{\partial P_i}\right)$$

- que pode ser reescrita como:

$$\left(\frac{1}{1 - \frac{\partial P_{perdas}}{\partial P_i}}\right) \times \frac{dF_i(P_i)}{dP_i} = \lambda \qquad (*)$$

- Definindo:

$$\begin{aligned} \textit{Perdas incrementais para gerador } i: \quad PIT_i &\triangleq \frac{\partial P_{perdas}}{\partial P_i} \\ \textit{Fator de Penalidade para gerador } i: \quad FP_i &\triangleq \frac{1}{1 - \frac{\partial P_{perdas}}{\partial P_i}} \end{aligned}$$

podemos re-escrever a Eq. $(*)$ na forma mais compacta:

$$FP_i \times \frac{dF_i(P_i)}{P_i} = \lambda$$

Comparação com Caso Sem Perdas

Caso sem perdas

$$\frac{dF_i(P_i)}{dP_i} = \lambda$$

Caso com perdas

$$FP_i \times \frac{dF_i(P_i)}{P_i} = \lambda$$

- Sem a consideração das perdas, a condição de otimalidade preconiza que os custos incrementais devem ser todos iguais a λ;

Comparação com Caso Sem Perdas

Caso sem perdas

$$\frac{dF_i(P_i)}{dP_i} = \lambda$$

Caso com perdas

$$FP_i \times \frac{dF_i(P_i)}{P_i} = \lambda$$

- Sem a consideração das perdas, a condição de otimalidade preconiza que os custos incrementais devem ser todos iguais a λ;
- Na presença das perdas, entretanto, os custos incrementais devem ser agora *ponderados pelos respectivos fatores de penalidade* antes de serem igualados a λ;

Comparação com Caso Sem Perdas

Caso sem perdas

$$\frac{dF_i(P_i)}{dP_i} = \lambda$$

Caso com perdas

$$FP_i \times \frac{dF_i(P_i)}{P_i} = \lambda$$

- Sem a consideração das perdas, a condição de otimalidade preconiza que os custos incrementais devem ser todos iguais a λ;
- Na presença das perdas, entretanto, os custos incrementais devem ser agora *ponderados pelos respectivos fatores de penalidade* antes de serem igualados a λ;
- Esta ponderação permite que a a contribuição de cada unidade geradora individual às perdas se reflita sobre a solução ótima.

Interpretação Analítica dos Fatores de Penalidade

Fator de Penalidade da Unidade i

$$FP_i = \frac{1}{1 - \frac{\partial P_{perdas}}{\partial P_i}}$$

- Supor que $P_i \nearrow \Rightarrow P_{perdas} \nearrow$. Logo, $(\partial perdas / \partial P_i) > 0$. Como $|\partial perdas / \partial P_i| \ll 1$, então $FP_i > 1$, e portanto:

$$FP_i \, \frac{dF_i(P_i)}{dP_i} > \frac{dF_i(P_i)}{dP_i}$$

Interpretação Analítica dos Fatores de Penalidade

Fator de Penalidade da Unidade i

$$FP_i = \frac{1}{1 - \frac{\partial P_{perdas}}{\partial P_i}}$$

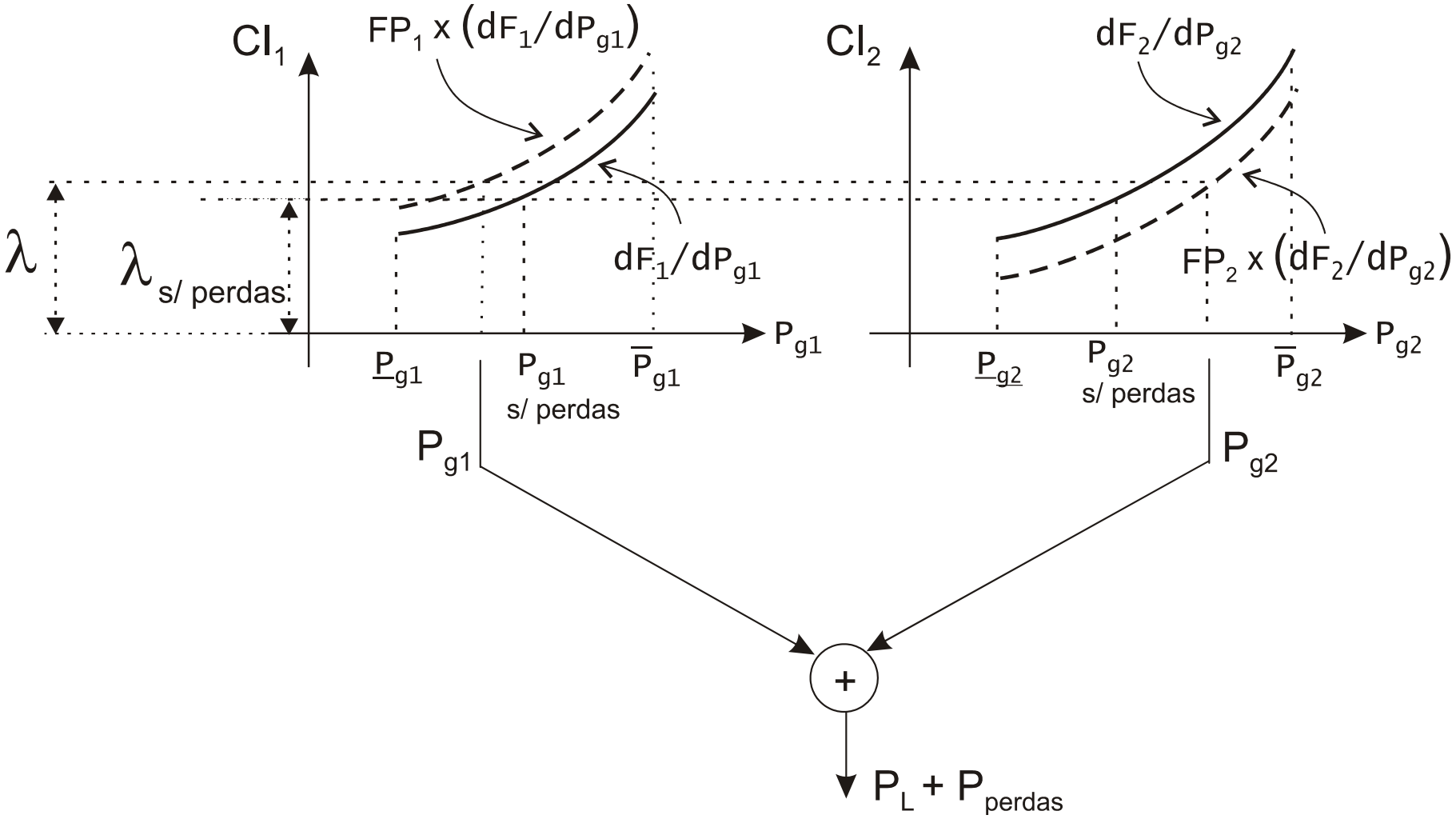
- Supor que $P_i \nearrow \Rightarrow P_{perdas} \nearrow$. Logo, $(\partial perdas / \partial P_i) > 0$. Como $|\partial perdas / \partial P_i| \ll 1$, então $FP_i > 1$, e portanto:

$$FP_i \; \frac{dF_i(P_i)}{dP_i} > \frac{dF_i(P_i)}{dP_i}$$

- Se $P_i \nearrow \Rightarrow P_{Perdas} \searrow$, então $(\partial perdas / \partial P_i) < 0$ e portanto $FP_i < 1$, de modo que

$$FP_i \; \frac{dF_i(P_i)}{dP_i} < \frac{dF_i(P_i)}{dP_i}$$

Interpretação Gráfica dos Fatores de Penalidade



Fórmula Geral das Perdas

- Conforme já visto, as perdas de transmissão em estudos de DE são expressas como uma função das potências geradas;

Fórmula Geral das Perdas

- Conforme já visto, as perdas de transmissão em estudos de DE são expressas como uma função das potências geradas;
- A forma mais usual de expressar esta dependência é através da *Fórmula Geral das Perdas (FGP);*

Fórmula Geral das Perdas

- Conforme já visto, as perdas de transmissão em estudos de DE são expressas como uma função das potências geradas;
- A forma mais usual de expressar esta dependência é através da *Fórmula Geral das Perdas (FGP);*
- Na *FGP, as perdas* são consideradas como uma função quadrática das potências geradas, isto é:

$$P_{perdas} = b_o + \sum_{i=1}^{N} b_i \; P_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} B_{ij} \; P_i \; P_j$$

ou, na forma matricial,

$$P_{perdas} = b_o + b^T P + P^T B P$$

onde $P \triangleq [P_1 ... P_N]^T$, com todas as potências expressas em *pu*;

Coeficientes da FGP

Fórmula Geral das Perdas

$$P_{perdas} = b_o + b^T P + P^T B P$$

- B é simétrica, isto é, $B_{ij} = B_{ji}$;

Coeficientes da FGP

Fórmula Geral das Perdas

$$P_{perdas} = b_o + b^T P + P^T B P$$

- B é simétrica, isto é, $B_{ij} = B_{ji}$;
- $B_{ii} > 0$, porém B_{ij} pode ser ≥ 0 ou < 0;

Coeficientes da FGP

Fórmula Geral das Perdas

$$P_{perdas} = b_o + b^T P + P^T B P$$

- B é simétrica, isto é, $B_{ij} = B_{ji}$;
- $B_{ii} > 0$, porém B_{ij} pode ser ≥ 0 ou < 0;
- Os coeficientes do termo linear, b_i, $i = 1, \ldots, N$ podem ser ≥ 0 ou < 0;

Coeficientes da FGP

Fórmula Geral das Perdas

$$P_{perdas} = b_o + b^T P + P^T B P$$

- B é simétrica, isto é, $B_{ij} = B_{ji}$;
- $B_{ii} > 0$, porém B_{ij} pode ser ≥ 0 ou < 0;
- Os coeficientes do termo linear, b_i, $i = 1, \ldots, N$ podem ser ≥ 0 ou < 0;
- O termo constante b_o pode ser ≥ 0 ou < 0.

Perdas Incrementais e Fatores de Penalidade a partir da FGP

Fórmula Geral das Perdas

$$P_{perdas} = b_o + \sum_{i=1}^{N} b_i P_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} B_{ij} P_i P_j$$

- Perdas Incrementais para unidade i :

$$\frac{dP_{perdas}}{dP_i} = b_i + 2\sum_{j=1}^{N} B_{ij}\ P_j$$

Perdas Incrementais e Fatores de Penalidade a partir da FGP

Fórmula Geral das Perdas

$$P_{perdas} = b_o + \sum_{i=1}^{N} b_i P_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} B_{ij} P_i P_j$$

- Perdas Incrementais para unidade i :

$$\frac{dP_{perdas}}{dP_i} = b_i + 2\sum_{j=1}^{N} B_{ij}\ P_j$$

- Fator de penalidade para unidade i :

$$FP_i = \frac{1}{1 - \left(b_i + 2\sum_{j=1}^{N} B_{ij}\ P_j \right)}$$

Perdas Incrementais e Fatores de Penalidade a partir da FGP

Fórmula Geral das Perdas

$$P_{perdas} = b_o + \sum_{i=1}^{N} b_i P_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} B_{ij} P_i P_j$$

- Perdas Incrementais para unidade i :

$$\frac{dP_{perdas}}{dP_i} = b_i + 2\sum_{j=1}^{N} B_{ij}\ P_j$$

- Fator de penalidade para unidade i :

$$FP_i = \frac{1}{1 - \left(b_i + 2\sum_{j=1}^{N} B_{ij}\ P_j \right)}$$

- As perdas incrementais acoplam as equações de coordenação $\Rightarrow$ fator complicador para a solução do DE com consideração das perdas.

Algoritmo para DE com Perdas de Transmissão

1. Fornecer valores iniciais $P_i^0,\ i = 1, \ldots, N$;

Algoritmo para DE com Perdas de Transmissão

1. Fornecer valores iniciais $P_i^0,\ i = 1, \ldots, N$;
2. $k = 0$;

Algoritmo para DE com Perdas de Transmissão

1. Fornecer valores iniciais $P_i^0,\ i = 1, \ldots, N$;
2. $k = 0$;
3. Calcular $P_{perdas}^k = P_{perdas}(P_1^k, P_2^k, \ldots, P_N^k)$ usando a FGP;

Algoritmo para DE com Perdas de Transmissão

1. Fornecer valores iniciais $P_i^0,\ i = 1, \ldots, N$;
2. $k = 0$;
3. Calcular $P_{perdas}^k = P_{perdas}(P_1^k, P_2^k, \ldots, P_N^k)$ usando a FGP;
4. Calcular os fatores de penalidade:

$$FP_i^k = \frac{1}{1 - 2\sum B_{ij}\, P_j^k - b_i}\ ,\ i = 1, \ldots, N$$

Algoritmo para DE com Perdas de Transmissão

1. Fornecer valores iniciais $P_i^0,\ i = 1, \ldots, N$;
2. $k = 0$;
3. Calcular $P_{perdas}^k = P_{perdas}(P_1^k, P_2^k, \ldots, P_N^k)$ usando a FGP;
4. Calcular os fatores de penalidade:

$$FP_i^k = \frac{1}{1 - 2\sum B_{ij}\, P_j^k - b_i}\ ,\ i = 1, \ldots, N$$

5. Resolver sist. de eqs. lineares para obter P_i^{k+1} e λ^{k+1} :

$$\begin{cases} FP_i^k\ \frac{dF_i(P_i^{k+1})}{dP_i} & = & \lambda^{k+1}, & i = 1, \ldots, N \\ \sum_{i=1}^{N} P_i^{k+1} & = & P_L + & P_{perdas}^k \end{cases}$$

Algoritmo para DE com Perdas de Transmissão

1. Fornecer valores iniciais $P_i^0,\ i = 1, \ldots, N$;
2. $k = 0$;
3. Calcular $P_{perdas}^k = P_{perdas}(P_1^k, P_2^k, \ldots, P_N^k)$ usando a FGP;
4. Calcular os fatores de penalidade:

$$FP_i^k = \frac{1}{1 - 2\sum B_{ij}\, P_j^k - b_i}\ ,\ i = 1, \ldots, N$$

5. Resolver sist. de eqs. lineares para obter P_i^{k+1} e λ^{k+1} :

$$\begin{cases} FP_i^k\ \dfrac{dF_i(P_i^{k+1})}{dP_i} & = & \lambda^{k+1}, & i = 1, \ldots, N \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} P_i^{k+1} & = & P_L + & P_{perdas}^k \end{cases}$$

6. Calcular

$$\|\Delta P\| = \max \left| P_i^{(k+1)} - P_i^{(k)} \right|,\ i = 1, \ldots, N.$$

Algoritmo para DE com Perdas de Transmissão

1. Fornecer valores iniciais $P_i^0,\ i = 1, \ldots, N$;
2. $k = 0$;
3. Calcular $P_{perdas}^k = P_{perdas}(P_1^k, P_2^k, \ldots, P_N^k)$ usando a FGP;
4. Calcular os fatores de penalidade:

$$FP_i^k = \frac{1}{1 - 2\sum B_{ij}\, P_j^k - b_i}\ ,\ i = 1, \ldots, N$$

5. Resolver sist. de eqs. lineares para obter P_i^{k+1} e λ^{k+1} :

$$\begin{cases} FP_i^k\ \dfrac{dF_i(P_i^{k+1})}{dP_i} & = & \lambda^{k+1}, & i = 1, \ldots, N \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} P_i^{k+1} & = & P_L + & P_{perdas}^k \end{cases}$$

6. Calcular

$$\|\Delta P\| = \max \left| P_i^{(k+1)} - P_i^{(k)} \right|,\ i = 1, \ldots, N.$$

7. Se $\|\Delta P\| < \delta$, **Fim**. Se não,fazer $k \leftarrow k + 1$ e voltar ao passo 3.

Exemplo

Para o sistema do Exemplo A, cujos dados das UGs são:

Unidade 1:	$\underline{P}_1 = 150\ MW$	$\overline{P}_1 = 600\ MW$
(carvão)	$F_1(P_1) = 561 + 7,92\,P_1 + 0,001562\,P_1^2$	
Unidade 2:	$\underline{P}_2 = 100\ MW$	$\overline{P}_2 = 400\ MW$
(óleo)	$F_2(P_2) = 310 + 7,85\,P_2 + 0,00194\,P_2^2$	
Unidade 3:	$\underline{P}_3 = 50\ MW$	$\overline{P}_3 = 200\ MW$
(óleo)	$F_3(P_3) = 78 + 7,97\,P_3 + 0,00482\ P_3^2$	

considere agora que as perdas de transmissão devem ser levadas em conta, sendo dadas por:

$$P_{perdas} \quad = \quad 3 \times 10^{-5} P_1^2 + 9 \times 10^{-5} P_2^2 + 12 \times 10^{-5} P_3^2$$

Sendo a carga a ser suprida igual a 850 MW, use o algoritmo anterior para resolver o problema de DE.

Solução do Exemplo e comparação com o caso sem perdas

Com Perdas (Convergência para $\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$)	**Sem Perdas**
$P_1 = 435,2$	$P_1 = 393,2$
$P_2 = 300,0$	$P_2 = 334,6$
$P_3 = 130,7$	$P_3 = 122,2$
$P_{perdas} = 15,83$	$P_{perdas} = 0$
$\lambda = 9,52\ \$/MWh$	$\lambda = 9,148\ \$/MWh$

- Apesar das perdas somarem menos de 2% da carga, o despacho obtido é significativamente diferente do despacho do caso sem perdas.

- A Fórmula Geral das Perdas é dada por

$$P_{perdas} = b_0 + \mathbf{b}^T \ \mathbf{P} + \mathbf{P}^T \ \mathbf{B} \ \mathbf{P}$$

- Considerando que a matriz B é simétrica $(B_{ij} = B_{ji})$,então o número de parâmetros a determinar é dado por

$$N_b = 1 + N + \frac{1}{2} \ N \ (N + 1)$$

Perdas para Condição de Operação Genérica em Função das Perdas do Caso Base (I)

- Considera-se que a solução de um caso-base está disponível;

Perdas para Condição de Operação Genérica em Função das Perdas do Caso Base (I)

- Considera-se que a solução de um caso-base está disponível;
- Grandezas associadas ao caso base denotadas pelo superescrito "0";

Perdas para Condição de Operação Genérica em Função das Perdas do Caso Base (I)

- Considera-se que a solução de um caso-base está disponível;
- Grandezas associadas ao caso base denotadas pelo superescrito "0";
- Deseja-se determinar as perdas para um novo caso k, obtido do caso-base através de perturbações nas potências geradas;

Perdas para Condição de Operação Genérica em Função das Perdas do Caso Base (I)

- Considera-se que a solução de um caso-base está disponível;
- Grandezas associadas ao caso base denotadas pelo superescrito "0";
- Deseja-se determinar as perdas para um novo caso k, obtido do caso-base através de perturbações nas potências geradas;
- Expandindo-se P^k_{perdas} em série de Taylor em torno de P^0_{perdas} até os termos de 2a. ordem, tem-se:

$$P^k_{perdas} \approx P^0_{perdas} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial P_{perdas}}{\partial P_i} \right)_0 \Delta P^k_i +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial^2 P_{perdas}}{\partial P_i \, \partial P_j} \right)_0 \Delta P^k_i \, \Delta P^k_j$$

Perdas para Condição de Operação Genérica em Função das Perdas do Caso Base (II)

- Na expansão anterior, supõe-se a função exata das perdas P_{perdas} é conhecida. Além disso:

$$\Delta P_i^k \stackrel{\Delta}{=} P_i^k - P_i^0$$

Perdas para Condição de Operação Genérica em Função das Perdas do Caso Base (II)

- Na expansão anterior, supõe-se a função exata das perdas P_{perdas} é conhecida. Além disso:

$$\Delta P_i^k \triangleq P_i^k - P_i^0$$

- Se definirmos:

$$g_i \triangleq \left(\frac{\partial P_{perdas}}{\partial P_i}\right)_0 \quad \text{e} \quad H_{ij} \triangleq \left(\frac{\partial^2 P_{perdas}}{\partial P_i \, \partial P_j}\right)_0,$$

Perdas para Condição de Operação Genérica em Função das Perdas do Caso Base (II)

- Na expansão anterior, supõe-se a função exata das perdas P_{perdas} é conhecida. Além disso:

$$\Delta P_i^k \stackrel{\Delta}{=} P_i^k - P_i^0$$

- Se definirmos:

$$g_i \stackrel{\Delta}{=} \left(\frac{\partial P_{perdas}}{\partial P_i}\right)_0 \quad \text{e} \quad H_{ij} \stackrel{\Delta}{=} \left(\frac{\partial^2 P_{perdas}}{\partial P_i \, \partial P_j}\right)_0,$$

- podemos expressar a expansão anterior como:

$$P_{perdas}^k = P_{perdas}^0 + \sum_{i=1}^{N} g_i \; \Delta P_i^k + \frac{1}{2} \; \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} H_{ij} \; \Delta P_i^k \; \Delta P_j^k$$

Perdas para Condição de Operação Genérica em Função das Perdas do Caso Base (III)

$$P^k_{perdas} = P^0_{perdas} + \sum_{i=1}^{N} g_i \; \Delta P^k_i + \frac{1}{2} \; \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} H_{ij} \; \Delta P^k_i \; \Delta P^k_j$$

- Note que, por construção dos casos de fluxo de potência, as quantidades

Perdas para Condição de Operação Genérica em Função das Perdas do Caso Base (III)

$$P^k_{perdas} = P^0_{perdas} + \sum_{i=1}^{N} g_i \; \Delta P^k_i + \frac{1}{2} \; \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} H_{ij} \; \Delta P^k_i \; \Delta P^k_j$$

- Note que, por construção dos casos de fluxo de potência, as quantidades
  - P^k_{perdas}, P^0_{perdas} ΔP^k_i e ΔP^k_j são conhecidas, e

Perdas para Condição de Operação Genérica em Função das Perdas do Caso Base (III)

$$P^k_{perdas} = P^0_{perdas} + \sum_{i=1}^{N} g_i \; \Delta P^k_i + \frac{1}{2} \; \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} H_{ij} \; \Delta P^k_i \; \Delta P^k_j$$

- Note que, por construção dos casos de fluxo de potência, as quantidades
  - P^k_{perdas}, P^0_{perdas} ΔP^k_i e ΔP^k_j são conhecidas, e
  - as derivadas parciais g_i e H_{ij} são as incógnitas do problema.

Perdas para Condição de Operação Genérica em Função das Perdas do Caso Base (III)

$$P^k_{perdas} = P^0_{perdas} + \sum_{i=1}^{N} g_i \; \Delta P^k_i + \frac{1}{2} \; \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} H_{ij} \; \Delta P^k_i \; \Delta P^k_j$$

- Note que, por construção dos casos de fluxo de potência, as quantidades
  - P^k_{perdas}, P^0_{perdas} ΔP^k_i e ΔP^k_j são conhecidas, e
  - as derivadas parciais g_i e H_{ij} são as incógnitas do problema.
- Para simplicar adicionalmente a notação, defina

$$\begin{aligned} \delta^k_i &\stackrel{\Delta}{=} \Delta P^k_i \\ \Delta^k_{ij} &\stackrel{\Delta}{=} \Delta P^k_i \; \Delta P^k_j \end{aligned}$$

e

$$y_k \stackrel{\Delta}{=} P^k_{perdas} - P^0_{perdas}$$

Perdas para Condição de Operação Genérica em Função das Perdas do Caso Base (IV)

- Considerando as novas definições, temos

$$y_k = \sum_{i=1}^{N} g_i \; \delta_i^k + \frac{1}{2} \; \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} H_{ij} \; \Delta_{ij}^k$$

onde:

Perdas para Condição de Operação Genérica em Função das Perdas do Caso Base (IV)

- Considerando as novas definições, temos

$$y_k = \sum_{i=1}^{N} g_i \; \delta_i^k + \frac{1}{2} \; \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} H_{ij} \; \Delta_{ij}^k$$

onde:

- os valores de δ_i^k, Δ_{ij}^k e y^k serão tratados como parâmetros conhecidos, e

Perdas para Condição de Operação Genérica em Função das Perdas do Caso Base (IV)

- Considerando as novas definições, temos

$$y_k = \sum_{i=1}^{N} g_i \; \delta_i^k + \frac{1}{2} \; \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} H_{ij} \; \Delta_{ij}^k$$

onde:

- os valores de δ_i^k, Δ_{ij}^k e y^k serão tratados como parâmetros conhecidos, e
- g_i e H_{ij} são as incógnitas.

Perdas para Condição de Operação Genérica em Função das Perdas do Caso Base (V)

- Observe que o lado direito da equação

$$y_k = \sum_{i=1}^{N} g_i \; \delta_i^k + \frac{1}{2} \; \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} H_{ij} \; \Delta_{ij}^k$$

é linear nas incógnitas g_i e H_{ij};

Perdas para Condição de Operação Genérica em Função das Perdas do Caso Base (V)

- Observe que o lado direito da equação

$$y_k = \sum_{i=1}^{N} g_i \; \delta_i^k + \frac{1}{2} \; \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} H_{ij} \; \Delta_{ij}^k$$

é linear nas incógnitas g_i e H_{ij};

- Definiremos o vetor de incógnitas como

$$\mathbf{x} \triangleq \left[\begin{array}{cccccccc} g_1 & g_2 & \dots & g_N & H_{11} & H_{12} & \dots & H_{NN} \end{array} \right]^T$$

e o vetor-linha de quantidades conhecidas $\mathbf{a}_k$ como

$$\mathbf{a}_k \triangleq \left[\begin{array}{cccccccc} \delta_1^k & \delta_2^k & \dots & \delta_N^k & \Delta_{11}^k & \Delta_{12}^k & \dots & \Delta_{NN}^k \end{array} \right]$$

Perdas para Condição de Operação Genérica em Função das Perdas do Caso Base (VI)

- Com as definições de $\mathbf{a}_k$ e $\mathbf{x}$, as perdas y_k referidas ao caso-base

$$y_k = \sum_{i=1}^{N} g_i \; \delta_i^k + \frac{1}{2} \; \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} H_{ij} \; \Delta_{ij}^k$$

Perdas para Condição de Operação Genérica em Função das Perdas do Caso Base (VI)

- Com as definições de $\mathbf{a}_k$ e $\mathbf{x}$, as perdas y_k referidas ao caso-base

$$y_k = \sum_{i=1}^{N} g_i \; \delta_i^k + \frac{1}{2} \; \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} H_{ij} \; \Delta_{ij}^k$$

podem ser re-escritas como

$$y_k = \mathbf{a}_k \; \mathbf{x}$$

Generalização para diversas condições de operação

- O procedimento apresentado permite obter uma relação linear entre as perdas de um caso genérico k referidas ao caso base e as incógnitas do vetor $\mathbf{x}$;

Generalização para diversas condições de operação

- O procedimento apresentado permite obter uma relação linear entre as perdas de um caso genérico k referidas ao caso base e as incógnitas do vetor $\mathbf{x}$;
- É possível gerar diversos casos de fluxo de potência alterando as condições de operação do sistema, sendo que cada novo caso gerará uma equação do tipo $y_k = \mathbf{a}_k \ \mathbf{x}$;

Generalização para diversas condições de operação

- O procedimento apresentado permite obter uma relação linear entre as perdas de um caso genérico k referidas ao caso base e as incógnitas do vetor $\mathbf{x}$;
- É possível gerar diversos casos de fluxo de potência alterando as condições de operação do sistema, sendo que cada novo caso gerará uma equação do tipo $y_k = \mathbf{a}_k\ \mathbf{x}$;
- Supondo que tenham sido gerados N_c casos, $N_c > N_b$, podemos estender a equação $y_k = \mathbf{a}_k\ \mathbf{x}$ da seguinte forma:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\ \mathbf{x}$$

onde o vetor $\mathbf{y}$ $(N_c \times 1)$ e a matriz $\mathbf{A}$ $(N_c \times N_b)$ são definidos como:

$$\mathbf{y} \triangleq \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N_c} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{N_c} \end{bmatrix}$$

Solução pelo método dos Mínimos Quadrados

- Se um número suficiente N_c de casos foi utilizado, $N_c > N_b$, o sistema de quações lineares

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\ \mathbf{x}$$

é sobredeterminado, pois a matriz $\mathbf{A}$ é $N_c \times N_b$;

Solução pelo método dos Mínimos Quadrados

- Se um número suficiente N_c de casos foi utilizado, $N_c > N_b$, o sistema de quações lineares

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\ \mathbf{x}$$

  é sobredeterminado, pois a matriz $\mathbf{A}$ é $N_c \times N_b$;
- O problema então se configura como um problema de Regressão Linear;

Solução pelo método dos Mínimos Quadrados

- Se um número suficiente N_c de casos foi utilizado, $N_c > N_b$, o sistema de quações lineares

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\ \mathbf{x}$$

  é sobredeterminado, pois a matriz $\mathbf{A}$ é $N_c \times N_b$;
- O problema então se configura como um problema de Regressão Linear;
- A solução de problemas de regressão linear como o acima pode ser obtida pelo Método dos Mínimos Quadrados , que fornece como resultado:

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{A})\ \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T\ \mathbf{y}$$

Solução pelo método dos Mínimos Quadrados

- Se um número suficiente N_c de casos foi utilizado, $N_c > N_b$, o sistema de quações lineares

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\ \mathbf{x}$$

é sobredeterminado, pois a matriz $\mathbf{A}$ é $N_c \times N_b$;
- O problema então se configura como um problema de Regressão Linear;
- A solução de problemas de regressão linear como o acima pode ser obtida pelo Método dos Mínimos Quadrados , que fornece como resultado:

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{A})\ \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T\ \mathbf{y}$$

- Ou, definindo-se a matriz pseudo-inversa de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\ \mathbf{A}^T$$

então

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+\ \mathbf{y}$$

Diretrizes para gerar casos independentes de Fluxo de Potência

- Fazer variar aleatoriamente as gerações (usando distribuição uniforme, por exemplo) em relação às do caso base;

Diretrizes para gerar casos independentes de Fluxo de Potência

- Fazer variar aleatoriamente as gerações (usando distribuição uniforme, por exemplo) em relação às do caso base;
- Verificar se a carga resultante é coerente com carregamentos reais do sistema;

Diretrizes para gerar casos independentes de Fluxo de Potência

- Fazer variar aleatoriamente as gerações (usando distribuição uniforme, por exemplo) em relação às do caso base;
- Verificar se a carga resultante é coerente com carregamentos reais do sistema;
- A partir das duas observações acima, selecionar casos em número suficiente, N_c, isto é, $N_c > N_b$;

Diretrizes para gerar casos independentes de Fluxo de Potência

- Fazer variar aleatoriamente as gerações (usando distribuição uniforme, por exemplo) em relação às do caso base;
- Verificar se a carga resultante é coerente com carregamentos reais do sistema;
- A partir das duas observações acima, selecionar casos em número suficiente, N_c, isto é, $N_c > N_b$;
- Executar os fluxos de potência correspondentes aos casos selecionados e calcular as perdas respectivas;

Diretrizes para gerar casos independentes de Fluxo de Potência

- Fazer variar aleatoriamente as gerações (usando distribuição uniforme, por exemplo) em relação às do caso base;
- Verificar se a carga resultante é coerente com carregamentos reais do sistema;
- A partir das duas observações acima, selecionar casos em número suficiente, N_c, isto é, $N_c > N_b$;
- Executar os fluxos de potência correspondentes aos casos selecionados e calcular as perdas respectivas;
- Aplicar uma técnica de regressão linear para calcular as derivadas parciais da expansão em série de Taylor.

Determinação dos parâmetros da FGP (I)

- Para determinar os os parâmetros da FGP, re-examinemos a equação das perdas do caso k, agora escrita na forma matricial:

$$P^k_{perdas} = P^0_{perdas} + \mathbf{g}^T \left(\mathbf{P} - \mathbf{P}^0 \right) + \frac{1}{2} \left(\mathbf{P} - \mathbf{P}^0 \right)^T \mathbf{H} \left(\mathbf{P} - \mathbf{P}^0 \right)$$

Determinação dos parâmetros da FGP (I)

- Para determinar os os parâmetros da FGP, re-examinemos a equação das perdas do caso k, agora escrita na forma matricial:

$$P^k_{perdas} = P^0_{perdas} + \mathbf{g}^T \left(\mathbf{P} - \mathbf{P}^0 \right) + \frac{1}{2} \left(\mathbf{P} - \mathbf{P}^0 \right)^T \mathbf{H} \left(\mathbf{P} - \mathbf{P}^0 \right)$$

- Reduzindo os termos semelhantes (constantes, lineares e quadráticos), temos:

$$\begin{aligned} P^k_{perdas} \quad = \quad & \left(P^0_{perdas} - \mathbf{g}^T \, \mathbf{P}^0 + \tfrac{1}{2} \, \mathbf{P}^{0\,T} \, \mathbf{H} \, \mathbf{P}^0 \right) + \\ & \left(\mathbf{g}^T - \left(\mathbf{P}^0 \right)^T \, \mathbf{H} \right) \, \mathbf{P} + \\ & \mathbf{P}^T \, \left(\tfrac{1}{2} \, \mathbf{H} \right) \, \mathbf{P} \end{aligned}$$

Determinação dos Parâmetros da FGP (II)

- Comparando-se a equação anterior

$$
\begin{aligned}
P^k_{perdas} \quad = \quad & \left(P^0_{perdas} - \mathbf{g}^T \ \mathbf{P}^0 + \tfrac{1}{2} \ \mathbf{P}^{0\,T} \ \mathbf{H} \ \mathbf{P}^0 \right) + \\
& \left(\mathbf{g}^T - \left(\mathbf{P}^0 \right)^T \ \mathbf{H} \right) \ \mathbf{P} + \mathbf{P}^T \ \left(\tfrac{1}{2} \ \mathbf{H} \right) \ \mathbf{P}
\end{aligned}
$$

Determinação dos Parâmetros da FGP (II)

- Comparando-se a equação anterior

$$
\begin{aligned}
P^k_{perdas} \quad = \quad & \left(P^0_{perdas} - \mathbf{g}^T \ \mathbf{P}^0 + \tfrac{1}{2} \ \mathbf{P}^{0\,T} \ \mathbf{H} \ \mathbf{P}^0 \right) + \\
& \left(\mathbf{g}^T - \left(\mathbf{P}^0 \right)^T \ \mathbf{H} \right) \ \mathbf{P} + \mathbf{P}^T \ \left(\tfrac{1}{2} \ \mathbf{H} \right) \ \mathbf{P}
\end{aligned}
$$

e a FGP:

$$
P_{perdas} = b_0 + \mathbf{b}^T \ \mathbf{P} + \mathbf{P}^T \ \mathbf{B} \ \mathbf{P}
$$

Determinação dos Parâmetros da FGP (II)

- Comparando-se a equação anterior

$$
\begin{aligned}
P^k_{perdas} &= \left(P^0_{perdas} - \mathbf{g}^T\ \mathbf{P}^0 + \tfrac{1}{2}\ \mathbf{P}^{0\,T}\ \mathbf{H}\ \mathbf{P}^0\right) + \\
&\quad \left(\mathbf{g}^T - \left(\mathbf{P}^0\right)^T\ \mathbf{H}\right)\ \mathbf{P} + \mathbf{P}^T\ \left(\tfrac{1}{2}\ \mathbf{H}\right)\ \mathbf{P}
\end{aligned}
$$

e a FGP:

$$
P_{perdas} = b_0 + \mathbf{b}^T\ \mathbf{P} + \mathbf{P}^T\ \mathbf{B}\ \mathbf{P}
$$

concluimos que

$$
\begin{aligned}
b_0 &= P^0_{perdas} - \mathbf{g}^T\ \mathbf{P}^0 + \tfrac{1}{2}\ \mathbf{P}^{0\,T}\ \mathbf{H}\ \mathbf{P}^0 \\
b^T &= \mathbf{g}^T - \left(\mathbf{P}^0\right)^T\ \mathbf{H} \\
B &= \tfrac{1}{2}\ \mathbf{H}
\end{aligned}
$$