Métodos Computacionais para Solução do FPO
Parte 1/2
Métodos de Barreira Logarítmica

Antonio Simões Costa

GSP - Labspot

Métodos disponíveis para a solução de problemas de FPO:

- *Métodos do tipo Lagrange-Newton:* utilizam o método de Newton para resolver as condições de KKT obtidas a partir da função Lagrangeana. Podem ser de dois tipos:

Métodos disponíveis para a solução de problemas de FPO:

- *Métodos do tipo Lagrange-Newton:* utilizam o método de Newton para resolver as condições de KKT obtidas a partir da função Lagrangeana. Podem ser de dois tipos:
  - *Métodos que utilizam Função-Barreira;*

Métodos disponíveis para a solução de problemas de FPO:

- *Métodos do tipo Lagrange-Newton:* utilizam o método de Newton para resolver as condições de KKT obtidas a partir da função Lagrangeana. Podem ser de dois tipos:
  - *Métodos que utilizam Função-Barreira;*
  - *Métodos baseados em funções de penalidades;*

Métodos disponíveis para a solução de problemas de FPO:

- *Métodos do tipo Lagrange-Newton:* utilizam o método de Newton para resolver as condições de KKT obtidas a partir da função Lagrangeana. Podem ser de dois tipos:
  - *Métodos que utilizam Função-Barreira;*
  - *Métodos baseados em funções de penalidades;*
- *Métodos baseados em Programação Linear Sucessiva:* empregam linearização iterativa do problema de otimização e técnicas de Programação Linear (PL) para resolver o problema linearizado;

Métodos disponíveis para a solução de problemas de FPO:

- *Métodos do tipo Lagrange-Newton:* utilizam o método de Newton para resolver as condições de KKT obtidas a partir da função Lagrangeana. Podem ser de dois tipos:
  - *Métodos que utilizam Função-Barreira;*
  - *Métodos baseados em funções de penalidades;*
- *Métodos baseados em Programação Linear Sucessiva:* empregam linearização iterativa do problema de otimização e técnicas de Programação Linear (PL) para resolver o problema linearizado;
- *Metodos de Programação Quadrática Seqüencial:* utilizam linearização iterativa das restrições, aproximação do Lagrangeano de problema como uma função quadráica e técnicas de Programação Quadrática (PQ).

- As quatro etapas principais destes métodos são:

Métodos que utilizam Função Barreira Logaritmica

- As quatro etapas principais destes métodos são:
    1. Cálculo da direção de Newton;

Métodos que utilizam Função Barreira Logaritmica

- As quatro etapas principais destes métodos são:
  1. Cálculo da direção de Newton;
  2. Escolha do tamanho do passo para o método de Newton;

Métodos que utilizam Função Barreira Logaritmica

- As quatro etapas principais destes métodos são:
  1. Cálculo da direção de Newton;
  2. Escolha do tamanho do passo para o método de Newton;
  3. Ajuste do parâmetro de barreira a cada iteração, e

Métodos que utilizam Função Barreira Logaritmica

- As quatro etapas principais destes métodos são:
  1. Cálculo da direção de Newton;
  2. Escolha do tamanho do passo para o método de Newton;
  3. Ajuste do parâmetro de barreira a cada iteração, e
  4. Teste de convergência baseado na verificação das condições de Karush-Kuhn-Tucker.

Métodos que utilizam Função Barreira Logaritmica

- As quatro etapas principais destes métodos são:
  1. Cálculo da direção de Newton;
  2. Escolha do tamanho do passo para o método de Newton;
  3. Ajuste do parâmetro de barreira a cada iteração, e
  4. Teste de convergência baseado na verificação das condições de Karush-Kuhn-Tucker.
- Etapas 2 a 4 coincidem com as etapas similares da aplicação do método primal-dual de pontos interiores ao problema de Despacho Econômico;

Métodos que utilizam Função Barreira Logaritmica

- As quatro etapas principais destes métodos são:
  1. Cálculo da direção de Newton;
  2. Escolha do tamanho do passo para o método de Newton;
  3. Ajuste do parâmetro de barreira a cada iteração, e
  4. Teste de convergência baseado na verificação das condições de Karush-Kuhn-Tucker.
- Etapas 2 a 4 coincidem com as etapas similares da aplicação do método primal-dual de pontos interiores ao problema de Despacho Econômico;
- Etapa 1 é significativamente diferente e será tratada em detalhes a seguir, considerando:

Métodos que utilizam Função Barreira Logaritmica

- As quatro etapas principais destes métodos são:
  1. Cálculo da direção de Newton;
  2. Escolha do tamanho do passo para o método de Newton;
  3. Ajuste do parâmetro de barreira a cada iteração, e
  4. Teste de convergência baseado na verificação das condições de Karush-Kuhn-Tucker.
- Etapas 2 a 4 coincidem com as etapas similares da aplicação do método primal-dual de pontos interiores ao problema de Despacho Econômico;
- Etapa 1 é significativamente diferente e será tratada em detalhes a seguir, considerando:
  - Modelo linearizado ("DC") para a rede, e

Métodos que utilizam Função Barreira Logaritmica

- As quatro etapas principais destes métodos são:
  1. Cálculo da direção de Newton;
  2. Escolha do tamanho do passo para o método de Newton;
  3. Ajuste do parâmetro de barreira a cada iteração, e
  4. Teste de convergência baseado na verificação das condições de Karush-Kuhn-Tucker.
- Etapas 2 a 4 coincidem com as etapas similares da aplicação do método primal-dual de pontos interiores ao problema de Despacho Econômico;
- Etapa 1 é significativamente diferente e será tratada em detalhes a seguir, considerando:
  - Modelo linearizado ("DC") para a rede, e
  - Modelo não-linear para a rede.

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & \multicolumn{3}{l}{c(\theta, \mathbf{p}_g) = c_0 + c^T \mathbf{p}_g + \frac{1}{2} \mathbf{p}_g^T \, Q \, \mathbf{p}_g} \\[2ex]
\text{s. a:} & -\hat{\mathbf{B}} \, \hat{\theta} + \mathbf{A_g} \, \mathbf{p_g} & = & \mathbf{p}_L \\
 & \mathbf{p_g} + \overline{\mathbf{s}}_g & = & \overline{\mathbf{p}}_g \\
 & -\mathbf{p_g} + \underline{\mathbf{s}}_g & = & -\underline{\mathbf{p}}_g \\
 & \mathbf{T} \, \mathbf{A} \, \hat{\theta} + \overline{\mathbf{s}}_t & = & \overline{\mathbf{t}} \\
 & -\mathbf{T} \, \mathbf{A} \, \hat{\theta} + \underline{\mathbf{s}}_t & = & -\underline{\mathbf{t}}
\end{array}
$$

Método da Função Barreira Logarítmica - Modelo "DC" para a Rede (II)

Função Lagrangeana aumentada pela adição das funções barreira logarítmica

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\theta, \mathbf{u}, \lambda, \pi) = \quad & c_0 + c^T p_g + \tfrac{1}{2} p_g^T \, Q \, p_g + \lambda^T (p_L + B\,\theta - A_g\, p_g) \\
& + \bar{\pi}_g^T \,(p_g + \bar{s}_g - \bar{p}_g) + \underline{\pi}_g^T (-p_g + \underline{s}_g + \underline{p}_g) \\
& + \bar{\pi}_t^T (T\,A\,\theta + \bar{s}_t - \bar{t}) + \underline{\pi}_t^T \,(-T\,A\,\theta + \underline{s}_t + \underline{t}) \\
& - \mu \sum_{i=1}^{n_g} (\ln\, \bar{s}_{gi} + \ln\, \underline{s}_{gi}) - \mu \sum_{i=1}^{n_l} (\ln\, \bar{s}_{ti} + \ln\, \underline{s}_{ti})
\end{aligned}
$$

Método da Função Barreira Logarítmica - Modelo "DC" para a Rede (III)

Agrupando os $\pi's$ e variáveis de folga:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\; & c_0 + c^T p_g + \tfrac{1}{2} p_g^T \, Q \, p_g + \lambda^T (p_L + B\,\theta - A_g \, p_g) + \\
& + \left[\bar{\pi}_g^T \;\; \underline{\pi}_g^T \;\; \bar{\pi}_t^T \;\; \bar{\pi}_t^T \right] \times \\
& \times \left\{ \begin{bmatrix} I & & I & & & \\ -I & & & I & & \\ & TA & & & I & \\ & -TA & & & & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_g \\ \theta \\ \bar{s}_g \\ \underline{s}_g \\ \bar{s}_t \\ \underline{s}_t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{p}_g \\ -\underline{p}_g \\ \bar{t} \\ -\underline{t} \end{bmatrix} \right\} \\
& - \mu \sum_{i=1}^{n_g} (\ln \, \bar{s}_{gi} + \ln \, \underline{s}_{gi}) - \mu \sum_{i=1}^{n_l} (\ln \, \bar{s}_{ti} + \ln \, \underline{s}_{ti})
\end{aligned}
$$

Método da Função Barreira Logarítmica - Modelo "DC" para a Rede (IV)

Definindo-se:

$$
\begin{aligned}
s &= [\,\bar{s}_g^T \ \ \underline{s}_g^T \ \ \bar{s}_t^T \ \ \underline{s}_t^T\,]^T \\
\pi &= [\bar{\pi}_g^T \ \ \underline{\pi}_g^T \ \ \bar{\pi}_t^T \ \ \underline{\pi}_t^T\,]^T \\
F_u &= \begin{bmatrix} I_{n_g} \\ -I_{n_g} \\ 0_{2n_l \times \, n_g} \end{bmatrix} \\
F_\theta &= \begin{bmatrix} 0_{2n_g \times \, n_l} \\ TA \\ -TA \end{bmatrix} \\
L &= \begin{bmatrix} \bar{p}_g & -\underline{p}_g & \bar{t} & -\underline{t} \end{bmatrix}^T
\end{aligned}
$$

Método da Função Barreira Logarítmica - Modelo "DC" para a Rede (V)

A função Lagrangeana pode então ser re-escrita como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\theta, \mathbf{u}, \lambda, \pi) \quad = \quad & c_0 + c^T p_g + \tfrac{1}{2} p_g^T \, Q \, p_g + \lambda^T (p_L + B\,\theta - A_g \, p_g) \\
& + \pi^T \left\{ [F_u \;\; F_\theta \;\; I] \begin{bmatrix} p_g \\ \theta \\ s \end{bmatrix} - L \right\} - \mu \sum_{i=1}^{n_g} (\ln \, \bar{s}_{gi} + \ln \, \underline{s}_{gi}) \\
& - \mu \sum_{i=1}^{n_l} (\ln \, \bar{s}_{ti} + \ln \, \underline{s}_{ti})
\end{aligned}$$

Método da Função Barreira Logarítmica - Modelo "DC" para a Rede (VI)

Condições de KKT:

$$
\begin{aligned}
\nabla_u \mathcal{L} &= c + Q\, p_g - A_g^T\, \lambda + F_u^T\, \pi &= 0 \\
\nabla_\theta \mathcal{L} &= B^T\, \lambda + F_\theta^T\, \pi &= 0 \\
\nabla_\lambda \mathcal{L} &= p_L + B\, \theta - A_g\, p_g &= 0 \\
\nabla_\pi \mathcal{L} &= [F_u \;\; F_\theta \;\; I] \begin{bmatrix} p_g \\ \theta \\ s \end{bmatrix} - L &= 0 \\
& S\, \pi &= \mu\, e
\end{aligned}
$$

Método da Função Barreira Logarítmica - Modelo "DC" para a Rede (VII)

Método de Newton aplicado às condições de KKT:

$$
\begin{aligned}
Q\,\Delta p_g - A_g^T\,\Delta\lambda + F_u^T\,\Delta\pi &= b_u^{(k)} \\
B^T\,\Delta\lambda + F_\theta^T\,\Delta\pi &= b_\theta^{(k)} \\
B\,\Delta\theta - A_g\,\Delta p_g &= b_\lambda^{(k)} \\
F_u\,\Delta p_g + F_\theta\Delta\theta + \Delta s &= b_\pi^{(k)} \\
S\,\Delta\pi + \Pi\,\Delta s &= b_s^{(k)}
\end{aligned}
$$

Método da Função Barreira Logarítmica - Modelo "DC" para a Rede (VIII)

Elementos do vetor do lado direito:

$$
\begin{aligned}
b_u^{(k)} &= -c - Q\,p_g^{(k)} + A_g^T\,\lambda^{(k)} - F_u^T\,\pi^{(k)} \\
b_\theta^{(k)} &= -B^T\,\lambda^{(k)} - F_\theta^T\,\pi^{(k)} \\
b_\lambda^{(k)} &= -p_L - B\,\theta^{(k)} + A_g\,p_g^{(k)}
\end{aligned}
$$

$$
b_\pi^{(k)} = -\left[F_u\ F_\theta\ I\right]\begin{bmatrix} p_g^{(k)} \\ \theta^{(k)} \\ s^{(k)} \end{bmatrix} + L = \begin{bmatrix} -p_g^{(k)} - \bar{s}_g^{(k)} + \bar{p}_g \\ p_g^{(k)} - \underline{s}_g^{(k)} - \underline{p}_g \\ -\Gamma\,A\,\theta^{(k)} - \bar{s}_t^{(k)} + \bar{t} \\ \Gamma\,A\,\theta^{(k)} - \underline{s}_t^{(k)} - \underline{t} \end{bmatrix}
$$

$$
b_s^{(k)} = \mu\,e - S^{(k)}\pi^{(k)}
$$

Método da Função Barreira Logarítmica - Modelo "DC" para a Rede (IX)

Sistema linear na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} Q & 0 & -A_g^T & F_u^T & 0 \\ 0 & 0 & B^T & F_\theta^T & 0 \\ -A_g & B & 0 & 0 & 0 \\ F_u & F_\theta & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & S & \Pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p_g \\ \Delta\theta \\ \Delta\lambda \\ \Delta\pi \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_u^{(k)} \\ b_\theta^{(k)} \\ b_\lambda^{(k)} \\ b_\pi^{(k)} \\ b_s^{(k)} \end{bmatrix}$$

Método da Função Barreira Logarítmica - Modelo "DC" para a Rede (X)

Observações finais:

- Variáveis "não-nodais" Δp_g, $\Delta\pi$ e Δs podem ser eliminadas, o que é facilitado pelo fato de que as matrizes Q, S e Π são diagonais;

- Variáveis "não-nodais" Δp_g, $\Delta\pi$ e Δs podem ser eliminadas, o que é facilitado pelo fato de que as matrizes Q, S e Π são diagonais;
- Sistema resultante envolverá apenas variáveis nodais, $\Delta\theta$ e $\Delta\lambda$;

Método da Função Barreira Logarítmica - Modelo "DC" para a Rede (X)

Observações finais:

- Variáveis "não-nodais" Δp_g, $\Delta\pi$ e Δs podem ser eliminadas, o que é facilitado pelo fato de que as matrizes Q, S e Π são diagonais;
- Sistema resultante envolverá apenas variáveis nodais, $\Delta\theta$ e $\Delta\lambda$;
- Matriz resultante pode ter suas linhas e colunas re-ordenadas por barra:

$$\left[\begin{array}{cccc} \Delta\theta_1, \Delta\lambda_1 & \Delta\theta_2, \Delta\lambda_2 & \ldots & \Delta\theta_N, \Delta\lambda_N \end{array} \right]^T$$

Método da Função Barreira Logarítmica - Modelo "DC" para a Rede (X)

Observações finais:

- Variáveis "não-nodais" Δp_g, $\Delta\pi$ e Δs podem ser eliminadas, o que é facilitado pelo fato de que as matrizes Q, S e Π são diagonais;
- Sistema resultante envolverá apenas variáveis nodais, $\Delta\theta$ e $\Delta\lambda$;
- Matriz resultante pode ter suas linhas e colunas re-ordenadas por barra:

$$\left[\begin{array}{cccc} \Delta\theta_1, \Delta\lambda_1 & \Delta\theta_2, \Delta\lambda_2 & \ldots & \Delta\theta_N, \Delta\lambda_N \end{array} \right]^T$$

- Matriz Hessiana assim reordenada terá mesma estrutura que a matriz $\mathbf{Y}_{Barra}$ da rede, desde que se considere cada bloco 2×2 associado a uma barra como um macro-elemento.

Método da Função Barreira Logarítmica - Modelo Não-Linear para a Rede (I)

Formulação generalizada para o problema:

$$\min \quad c(\mathbf{x},\mathbf{u}) - \mu \sum_{i=1}^{n_f} \ln s_i$$

$$\text{sujeito a:} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = 0$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}) + \mathbf{s} = 0$$

Método da Função Barreira Logarítmica - Modelo Não-Linear para a Rede (II)

Função Lagrangeana:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda, \pi) = \; & c(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \mu \sum_{i=1}^{n_f} \ln\, s_i \\ & + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\pi}^T (\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{s})\end{aligned}$$

Método da Função Barreira Logarítmica - Modelo Não-Linear para a Rede (III)

- Condições de KKT:

$$
\begin{aligned}
\nabla_u \mathcal{L} &= \nabla_u\, c(\mathbf{x},\mathbf{u}) + G_u^T\,\boldsymbol{\lambda} + F_u^T\,\boldsymbol{\pi} &= 0 \\
\nabla_x \mathcal{L} &= \nabla_x\, c(\mathbf{x},\mathbf{u}) + G_x^T\,\boldsymbol{\lambda} + F_x^T\,\pi &= 0 \\
& \qquad\qquad\qquad \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{u}) &= 0 \\
& \qquad\qquad\qquad \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}) + \mathbf{s} &= 0 \\
\nabla_{s_i} \mathcal{L} &= \qquad\qquad -\mu/s_i + \pi_i &= 0,\; i = 1,\ldots,n_f
\end{aligned}
$$

Método da Função Barreira Logarítmica - Modelo Não-Linear para a Rede (III)

- Condições de KKT:

$$
\begin{aligned}
\nabla_u \mathcal{L} &= \nabla_u\, c(\mathbf{x},\mathbf{u}) + G_u^T\, \boldsymbol{\lambda} + F_u^T\, \boldsymbol{\pi} &= 0 \\
\nabla_x \mathcal{L} &= \nabla_x\, c(\mathbf{x},\mathbf{u}) + G_x^T\, \boldsymbol{\lambda} + F_x^T\, \pi &= 0 \\
& \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{u}) &= 0 \\
& \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}) + \mathbf{s} &= 0 \\
\nabla_{s_i} \mathcal{L} &= -\mu / s_i + \pi_i &= 0,\ i = 1, \ldots, n_f
\end{aligned}
$$

- Última equação pode ser re-escrita como:

$$\Pi\, S\, e = \mu\, e$$

Método da Função Barreira Logarítmica - Modelo Não-Linear para a Rede (IV)

- As matrizes Jacobianas que aparecem nas condições de KKT são definidas como:

$$G_u \triangleq \nabla_u \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \qquad F_u \triangleq \nabla_u \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

$$G_x \triangleq \nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \qquad F_x \triangleq \nabla_x \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

Método da Função Barreira Logarítmica - Modelo Não-Linear para a Rede (IV)

- As matrizes Jacobianas que aparecem nas condições de KKT são definidas como:

$$G_u \triangleq \nabla_u \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \qquad F_u \triangleq \nabla_u \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

$$G_x \triangleq \nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \qquad F_x \triangleq \nabla_x \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

- Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ são vetores $n \times 1$, $\mathbf{u}$ é $n_u \times 1$, e $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ é $n_f \times 1$, então as condições de KKT formam um conjunto de $(2\ n + n_u + 2\ n_f)$ equações envolvendo o mesmo número de incógnitas.

Método da Função Barreira Logarítmica - Modelo Não-Linear para a Rede (V)

- Aplicando-se o método de Newton às condições de KKT, obtém-se:
-

$$
\begin{aligned}
W_{uu}\,\Delta u + W_{ux}\,\Delta x + G_u^T\,\Delta\lambda + F_u^T\,\Delta\pi &= b_u^{(k)} \\
W_{xu}\,\Delta u + W_{xx}\,\Delta x + G_x^T\,\Delta\lambda + F_x^T\,\Delta\pi &= b_x^{(k)} \\
G_u\,\Delta u + G_x\,\Delta x &= b_\lambda^{(k)} \\
F_u\,\Delta u + F_x\Delta x + \Delta s &= b_\pi^{(k)} \\
S\,\Delta\pi + \Pi\,\Delta s &= b_s^{(k)}
\end{aligned}
$$

Método da Função Barreira Logarítmica - Modelo Não-Linear para a Rede (VII)

- Matrizes W são definidas como:

$$
\begin{aligned}
W_{uu} &= \nabla^2_{uu}\, c(\mathbf{x},\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 g_{pi}}{\partial u^2}\, \lambda_{pi} + \frac{\partial^2 g_{qi}}{\partial u^2} \lambda_{qi} \right) + \sum_{i=1}^{n_f} \frac{\partial^2 f_i}{\partial u^2}\, \pi_i \\
W_{ux} &= \nabla^2_{ux}\, c(\mathbf{x},\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 g_{pi}}{\partial u \partial x}\, \lambda_{pi} + \frac{\partial^2 g_{qi}}{\partial u \partial x} \lambda_{qi} \right) + \sum_{i=1}^{n_f} \frac{\partial^2 f_i}{\partial u \partial x}\, \pi_i \\
W_{xu} &= W_{ux}^T \\
W_{xx} &= \nabla^2_{xx}\, c(\mathbf{x},\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 g_{pi}}{\partial x^2}\, \lambda_{pi} + \frac{\partial^2 g_{qi}}{\partial x^2} \lambda_{qi} \right) + \sum_{i=1}^{n_f} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}\, \pi_i
\end{aligned}
$$

Método da Função Barreira Logarítmica - Modelo Não-Linear para a Rede (VIII)

- Componentes do vetor do lado direito:

$$
\begin{aligned}
b_u^{(k)} &= -\nabla_u\, c(x^{(k)}, u^{(k)}) - G_u^T\, \lambda^{(k)} - F_u^T\, \pi^{(k)} \\
b_x^{(k)} &= -\nabla_x\, c(x^{(k)}, u^{(k)}) - G_x^T\, \lambda^{(k)} - F_x^T\, \pi^{(k)} \\
b_\lambda^{(k)} &= -g(x^{(k)}, u^{(k)}) \\
b_\pi^{(k)} &= -f\,(x^{(k)}, u^{(k)}) - s^{(k)} \\
b_s^{(k)} &= \mu\, e - \Pi\, S\, e
\end{aligned}
$$

Método da Função Barreira Logarítmica - Modelo Não-Linear para a Rede (IX)

Sistema linear na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} W_{uu} & W_{ux} & G_u^T & F_u^T & 0 \\ W_{ux}^T & W_{xx} & G_x^T & F_x^T & 0 \\ G_u & G_x & 0 & 0 & 0 \\ F_u & F_x & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & S & \Pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta x \\ \Delta \lambda \\ \Delta \pi \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_u^{(k)} \\ b_x^{(k)} \\ b_\lambda^{(k)} \\ b_\pi^{(k)} \\ b_s^{(k)} \end{bmatrix}$$

- As variáveis incrementais de folga podem ser eliminadas do problema, a partir da última equação do sistema linear, que fornece:

$$\Delta s = \Pi^{-1} \left(b_s^{(k)} - S \, \Delta \pi \right)$$

- O sistema reduzido torna-se:

$$\begin{bmatrix} W_{uu} & W_{ux} & G_u^T & F_u^T \\ W_{ux}^T & W_{xx} & G_x^T & F_x^T \\ G_u & G_x & 0 & 0 \\ F_u & F_x & 0 & -\Pi^{-1} S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta x \\ \Delta \lambda \\ \Delta \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_u^{(k)} \\ b_x^{(k)} \\ b_\lambda^{(k)} \\ \widehat{b}_\pi^{(k)} \end{bmatrix}$$

onde

$$\widehat{b}_\pi^{(k)} = b_\pi^{(k)} - \Pi^{-1} \, b_s^{(k)}$$

- O sistema linear pode ainda sofrer redução através da eliminação de $\Delta\pi$, obtido da equação:

$$\Delta\pi = -S^{-1}\Pi\,(\,\widehat{b}_{\pi}^{(k)} - F_u\,\Delta u - F_x\Delta x)$$

Esta última redução fornece finalmente o sistema reduzido:

$$\begin{bmatrix} \widehat{W}_{uu} & \widehat{W}_{ux} & G_u^T \\ \widehat{W}_{ux}^T & \widehat{W}_{xx} & G_x^T \\ G_u & G_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta x \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{b}_u^{(k)} \\ \widehat{b}_x^{(k)} \\ b_\lambda^{(k)} \end{bmatrix}$$

onde:

$$\begin{aligned} \widehat{W}_{uu} &= W_{uu} + F_u^T\,S^{-1}\Pi\,F_u \\ \widehat{W}_{ux} &= F_u^T\,S^{-1}\Pi\,F_x + W_{ux} \\ \widehat{W}_{xx} &= W_{xx} + F_x^T\,S^{-1}\Pi\,F_x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \widehat{b}_u^{(k)} &= b_u^{(k)} + F_u^T\,S^{-1}\Pi\,\widehat{b}_\pi^{(k)} \\ \widehat{b}_x^{(k)} &= b_x^{(k)} + F_x^T\,S^{-1}\Pi\,\widehat{b}_\pi^{(k)} \end{aligned}$$

- Variáveis de controle Δu poderiam igualmente ser eliminadas;

Método da Função Barreira Logarítmica - Modelo Não-Linear para a Rede (X)

Redução do Sistema (3)

- Variáveis de controle Δu poderiam igualmente ser eliminadas;
- Sistema resultante envolverá apenas variáveis nodais, Δx e $\Delta \lambda$;

- Variáveis de controle Δu poderiam igualmente ser eliminadas;
- Sistema resultante envolverá apenas variáveis nodais, Δx e $\Delta\lambda$;
- Matriz resultante pode ter suas linhas e colunas re-ordenadas por barra:

$$\left[\ \Delta\theta_1, \Delta V_1, \Delta\lambda_{P_1}, \Delta\lambda_{Q_1} \quad \Delta\theta_2, \Delta V_2, \Delta\lambda_{P_2}, \Delta\lambda_{Q_2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \Delta\theta_N, \Delta V_N, \Delta\lambda_{P_N}, \Delta\lambda_{Q_N}\ \right]^T$$

- Variáveis de controle Δu poderiam igualmente ser eliminadas;
- Sistema resultante envolverá apenas variáveis nodais, Δx e $\Delta\lambda$;
- Matriz resultante pode ter suas linhas e colunas re-ordenadas por barra:

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta_1, \Delta V_1, \Delta\lambda_{P_1}, \Delta\lambda_{Q_1} & \Delta\theta_2, \Delta V_2, \Delta\lambda_{P_2}, \Delta\lambda_{Q_2} & \ldots \\ & \ldots & \Delta\theta_N, \Delta V_N, \Delta\lambda_{P_N}, \Delta\lambda_{Q_N} \end{bmatrix}^T$$

- Matriz Hessiana assim reordenada terá mesma estrutura que a matriz $\mathbf{Y}_{Barra}$ da rede, desde que se considere cada bloco 4×4 associado a uma barra como um macro-elemento.