

Métodos Computacionais para Solução do FPO

Parte 2/2

PLS, PQS e Funções de Penalidade

Antonio Simões Costa

GSP - Labspot

Programação Linear Sucessiva (I)

- Método de otimização para problemas não-lineares em que o problema original é inicialmente linearizado em um laço iterativo externo;

Programação Linear Sucessiva (I)

- Método de otimização para problemas não-lineares em que o problema original é inicialmente linearizado em um laço iterativo externo;
- O problema de otimização linearizado é resolvido em um laço interno através do uso de técnicas de Programação Linear (PL);

Programação Linear Sucessiva (I)

- Método de otimização para problemas não-lineares em que o problema original é inicialmente linearizado em um laço iterativo externo;
- O problema de otimização linearizado é resolvido em um laço interno através do uso de técnicas de Programação Linear (PL);
- No caso do FPO, as equações correspondentes são linearizadas aproximando-se

Programação Linear Sucessiva (I)

- Método de otimização para problemas não-lineares em que o problema original é inicialmente linearizado em um laço iterativo externo;
- O problema de otimização linearizado é resolvido em um laço interno através do uso de técnicas de Programação Linear (PL);
- No caso do FPO, as equações correspondentes são linearizadas aproximando-se
 - a função-objetivo,

Programação Linear Sucessiva (I)

- Método de otimização para problemas não-lineares em que o problema original é inicialmente linearizado em um laço iterativo externo;
- O problema de otimização linearizado é resolvido em um laço interno através do uso de técnicas de Programação Linear (PL);
- No caso do FPO, as equações correspondentes são linearizadas aproximando-se
 - a função-objetivo,
 - as restrições de igualdade, e

Programação Linear Sucessiva (I)

- Método de otimização para problemas não-lineares em que o problema original é inicialmente linearizado em um laço iterativo externo;
- O problema de otimização linearizado é resolvido em um laço interno através do uso de técnicas de Programação Linear (PL);
- No caso do FPO, as equações correspondentes são linearizadas aproximando-se
 - a função-objetivo,
 - as restrições de igualdade, e
 - as restrições de desigualdade

Programação Linear Sucessiva (I)

- Método de otimização para problemas não-lineares em que o problema original é inicialmente linearizado em um laço iterativo externo;
- O problema de otimização linearizado é resolvido em um laço interno através do uso de técnicas de Programação Linear (PL);
- No caso do FPO, as equações correspondentes são linearizadas aproximando-se
 - a função-objetivo,
 - as restrições de igualdade, e
 - as restrições de desigualdade

por expansões em série de Taylor até os termos de primeira ordem, em torno dos valores das variáveis na iteração corrente.

Programação Linear Sucessiva (II)

Linearização do problema

- Primeiro passo para a aplicação de PL sucessiva: linearizar o problema mediante aproximações por série de Taylor de primeira ordem para $c(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, e $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$:

$$\begin{aligned}c(\mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(k)} + \Delta\mathbf{u}) &\approx c(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}) + \mathbf{c}_u^T \Delta\mathbf{u} + \mathbf{c}_x^T \Delta\mathbf{x} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(k)} + \Delta\mathbf{u}) &\approx \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}) + \mathbf{G}_u \Delta\mathbf{u} + \mathbf{G}_x \Delta\mathbf{x} \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(k)} + \Delta\mathbf{u}) &\approx \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}) + \mathbf{F}_u \Delta\mathbf{u} + \mathbf{F}_x \Delta\mathbf{x}\end{aligned}$$

Programação Linear Sucessiva (II)

Problema linearizado

- Resultado da linearização:

$$\begin{array}{ll}\min & \mathbf{c}_u^T \Delta \mathbf{u} + \mathbf{c}_x^T \Delta \mathbf{x} \\ \text{sujeito a:} & \mathbf{G}_u \Delta \mathbf{u} + \mathbf{G}_x \Delta \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{F}_u \Delta \mathbf{u} + \mathbf{F}_x \Delta \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}) \leq \mathbf{0}\end{array}$$

Programação Linear Sucessiva (II)

Problema linearizado

- Resultado da linearização:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}_u^T \Delta \mathbf{u} + \mathbf{c}_x^T \Delta \mathbf{x} \\ \text{sujeito a:} \quad & \mathbf{G}_u \Delta \mathbf{u} + \mathbf{G}_x \Delta \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{F}_u \Delta \mathbf{u} + \mathbf{F}_x \Delta \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}) \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

- Problema de otimização de grande porte e esparsos;

Programação Linear Sucessiva (II)

Problema linearizado

- Resultado da linearização:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}_u^T \Delta \mathbf{u} + \mathbf{c}_x^T \Delta \mathbf{x} \\ \text{sujeito a:} \quad & \mathbf{G}_u \Delta \mathbf{u} + \mathbf{G}_x \Delta \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{F}_u \Delta \mathbf{u} + \mathbf{F}_x \Delta \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}) \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

- Problema de otimização de grande porte e esparsos;
- Ao invés de tentar resolvê-lo na forma acima, eliminaremos $\Delta \mathbf{x}$ utilizando as restrições de igualdade.

Programação Linear Sucessiva (III)

Redução de variáveis

- As restrições de igualdade

$$\mathbf{G}_u \Delta \mathbf{u} + \mathbf{G}_x \Delta \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}) = \mathbf{0}$$

representam equações de balanço de potência real e reativa em todas as barras da rede elétrica;

Programação Linear Sucessiva (III)

Redução de variáveis

- As restrições de igualdade

$$\mathbf{G}_u \Delta \mathbf{u} + \mathbf{G}_x \Delta \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}) = \mathbf{0}$$

representam equações de balanço de potência real e reativa em todas as barras da rede elétrica;

- Explicitando a equação relativa à barra de referência, temos

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{G}}_u \Delta \mathbf{u} + \bar{\mathbf{G}}_x \Delta \mathbf{x} + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{ru} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{G}_{rx} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{g}_r(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}) &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Programação Linear Sucessiva (III)

Redução de variáveis

- As restrições de igualdade

$$\mathbf{G}_u \Delta \mathbf{u} + \mathbf{G}_x \Delta \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}) = \mathbf{0}$$

representam equações de balanço de potência real e reativa em todas as barras da rede elétrica;

- Explicitando a equação relativa à barra de referência, temos

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{G}}_u \Delta \mathbf{u} + \overline{\mathbf{G}}_x \Delta \mathbf{x} + \overline{\mathbf{g}}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{ru} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{G}_{rx} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{g}_r(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}) &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

- A restrição de igualdade na barra de folga será retida no problema e as restantes serão usadas para eliminar $\Delta \mathbf{x}$:

$$\Delta \mathbf{x} = -\overline{\mathbf{G}}_x^{-1} \left[\overline{\mathbf{G}}_u \Delta \mathbf{u} + \overline{\mathbf{g}}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}) \right]$$

Programação Linear Sucessiva (IV)

Problema reduzido

- Eliminando-se $\Delta \mathbf{x}$ do problema linearizado, obtém-se:

$$\begin{aligned} \min \quad & \tilde{\mathbf{c}}^T \Delta \mathbf{u} \\ \text{sujeito a:} \quad & \mathbf{G} \Delta \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{g}} \\ & \overline{\mathbf{F}} \Delta \mathbf{u} \leq \tilde{\mathbf{f}} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{c}} &= \mathbf{c}_u - \overline{\mathbf{G}}_u^T \overline{\mathbf{G}}_x^{-T} \mathbf{c}_x \\ \overline{\mathbf{F}} &= \mathbf{F}_u - \mathbf{F}_x \overline{\mathbf{G}}_x^{-T} \overline{\mathbf{G}}_u \\ \tilde{\mathbf{f}} &= -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}) + \mathbf{F}_x \overline{\mathbf{G}}_x^{-1} \overline{\mathbf{g}}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}) \\ \mathbf{G} &= \mathbf{G}_{ru} - \mathbf{G}_{rx} \overline{\mathbf{G}}_x^{-1} \overline{\mathbf{G}}_u \\ \tilde{\mathbf{g}} &= \mathbf{g}_r(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}) - \mathbf{G}_{rx} \overline{\mathbf{G}}_x^{-1} \overline{\mathbf{g}}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}) \end{aligned}$$

Programação Linear Sucessiva (IV)

Problema reduzido

- Eliminando-se $\Delta \mathbf{x}$ do problema linearizado, obtém-se:

$$\begin{aligned} \min \quad & \tilde{\mathbf{c}}^T \Delta \mathbf{u} \\ \text{sujeito a:} \quad & \mathbf{G} \Delta \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{g}} \\ & \overline{\mathbf{F}} \Delta \mathbf{u} \leq \tilde{\mathbf{f}} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{c}} &= \mathbf{c}_u - \overline{\mathbf{G}}_u^T \overline{\mathbf{G}}_x^{-T} \mathbf{c}_x \\ \overline{\mathbf{F}} &= \mathbf{F}_u - \mathbf{F}_x \overline{\mathbf{G}}_x^{-T} \overline{\mathbf{G}}_u \\ \tilde{\mathbf{f}} &= -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}) + \mathbf{F}_x \overline{\mathbf{G}}_x^{-1} \overline{\mathbf{g}}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}) \\ \mathbf{G} &= \mathbf{G}_{ru} - \mathbf{G}_{rx} \overline{\mathbf{G}}_x^{-1} \overline{\mathbf{G}}_u \\ \tilde{\mathbf{g}} &= \mathbf{g}_r(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}) - \mathbf{G}_{rx} \overline{\mathbf{G}}_x^{-1} \overline{\mathbf{g}}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}) \end{aligned}$$

- O problema reduzido é denso, pois a matriz $\overline{\mathbf{G}}_x^{-1}$ é uma matriz densa. Em compensação, é de dimensão substancialmente menor do que o problema original.

Programação Linear Sucessiva (IV)

Algoritmo

- 1 Inicializar as variáveis de controle em $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)}$ e resolver o problema de fluxo de potência;

Programação Linear Sucessiva (IV)

Algoritmo

- 1 Inicializar as variáveis de controle em $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)}$ e resolver o problema de fluxo de potência;
- 2 Calcular as matrizes Jacobianas $\mathbf{F}_u$, $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{G}_u$ e $\mathbf{G}_x$ (esta última já disponível da solução do fluxo de potência);

Programação Linear Sucessiva (IV)

Algoritmo

- 1 Inicializar as variáveis de controle em $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)}$ e resolver o problema de fluxo de potência;
- 2 Calcular as matrizes Jacobianas $\mathbf{F}_u$, $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{G}_u$ e $\mathbf{G}_x$ (esta última já disponível da solução do fluxo de potência);
- 3 Calcular $\tilde{\mathbf{c}}$, $\bar{\mathbf{F}}$ e $\tilde{\mathbf{f}}$;

Programação Linear Sucessiva (IV)

Algoritmo

- 1 Inicializar as variáveis de controle em $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)}$ e resolver o problema de fluxo de potência;
- 2 Calcular as matrizes Jacobianas $\mathbf{F}_u$, $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{G}_u$ e $\mathbf{G}_x$ (esta última já disponível da solução do fluxo de potência);
- 3 Calcular $\tilde{\mathbf{c}}$, $\bar{\mathbf{F}}$ e $\tilde{\mathbf{f}}$;
- 4 Resolver o problema de FPO linearizado reduzido via PL e assim obter $\Delta \mathbf{u}$;

Programação Linear Sucessiva (IV)

Algoritmo

- 1 Inicializar as variáveis de controle em $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)}$ e resolver o problema de fluxo de potência;
- 2 Calcular as matrizes Jacobianas $\mathbf{F}_u$, $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{G}_u$ e $\mathbf{G}_x$ (esta última já disponível da solução do fluxo de potência);
- 3 Calcular $\tilde{\mathbf{c}}$, $\bar{\mathbf{F}}$ e $\tilde{\mathbf{f}}$;
- 4 Resolver o problema de FPO linearizado reduzido via PL e assim obter $\Delta \mathbf{u}$;
- 5 Atualizar as variáveis de controle: $\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \Delta \mathbf{u}$;

Programação Linear Sucessiva (IV)

Algoritmo

- 1 Inicializar as variáveis de controle em $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)}$ e resolver o problema de fluxo de potência;
- 2 Calcular as matrizes Jacobianas $\mathbf{F}_u$, $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{G}_u$ e $\mathbf{G}_x$ (esta última já disponível da solução do fluxo de potência);
- 3 Calcular $\tilde{\mathbf{c}}$, $\bar{\mathbf{F}}$ e $\tilde{\mathbf{f}}$;
- 4 Resolver o problema de FPO linearizado reduzido via PL e assim obter $\Delta \mathbf{u}$;
- 5 Atualizar as variáveis de controle: $\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \Delta \mathbf{u}$;
- 6 Resolver o problema de fluxo de potência usando $\mathbf{u}^{(k+1)}$;

Programação Linear Sucessiva (IV)

Algoritmo

- 1 Inicializar as variáveis de controle em $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)}$ e resolver o problema de fluxo de potência;
- 2 Calcular as matrizes Jacobianas $\mathbf{F}_u$, $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{G}_u$ e $\mathbf{G}_x$ (esta última já disponível da solução do fluxo de potência);
- 3 Calcular $\tilde{\mathbf{c}}$, $\bar{\mathbf{F}}$ e $\tilde{\mathbf{f}}$;
- 4 Resolver o problema de FPO linearizado reduzido via PL e assim obter $\Delta\mathbf{u}$;
- 5 Atualizar as variáveis de controle: $\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \Delta\mathbf{u}$;
- 6 Resolver o problema de fluxo de potência usando $\mathbf{u}^{(k+1)}$;
- 7 Se $\|\Delta\mathbf{u}\| \leq \varepsilon$, Fim. Em caso contrário, retornar ao passo 2.

Programação Linear Sucessiva (V)

Tratamento de Funções-Objetivo não-lineares

- As funções-objeto para o FPO são geralmente funções não-lineares separáveis das variáveis de controle;

Programação Linear Sucessiva (V)

Tratamento de Funções-Objetivo não-lineares

- As funções-objeto para o FPO são geralmente funções não-lineares separáveis das variáveis de controle;
- A linearização pura e simples em torno da solução mais recente pode não fornecer uma aproximação aceitável, se as excursões das variáveis de decisão são grandes;

Programação Linear Sucessiva (V)

Tratamento de Funções-Objetivo não-lineares

- As funções-objeto para o FPO são geralmente funções não-lineares separáveis das variáveis de controle;
- A linearização pura e simples em torno da solução mais recente pode não fornecer uma aproximação aceitável, se as excursões das variáveis de decisão são grandes;
- Solução: utilizar aproximação *linear por partes* para a função-objeto.

Programação Linear Sucessiva (VI)

Aproximação linear por partes

- Considere que a função-objetivo é da forma:

$$c(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n_u} c_i(u_i)$$

Programação Linear Sucessiva (VI)

Aproximação linear por partes

- Considere que a função-objetivo é da forma:

$$c(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n_u} c_i(u_i)$$

- A função não-linear $c_i(u_i)$ pode ser aproximada com um nível arbitrário de precisão por uma função linear por partes:

$$c_i(u_i) = c_i(u_i^{j-1}) + c_{ij} (u_i - u_i^{j-1}), \quad u_i^{j-1} \leq u_i \leq u_i^j, \quad j = 1, \dots, n_i$$

onde:

Programação Linear Sucessiva (VI)

Aproximação linear por partes

- Considere que a função-objetivo é da forma:

$$c(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n_u} c_i(u_i)$$

- A função não-linear $c_i(u_i)$ pode ser aproximada com um nível arbitrário de precisão por uma função linear por partes:

$$c_i(u_i) = c_i(u_i^{j-1}) + c_{ij} (u_i - u_i^{j-1}), \quad u_i^{j-1} \leq u_i \leq u_i^j, \quad j = 1, \dots, n_i$$

onde:

- n_i é o número de segmentos lineares na aproximação, e

Programação Linear Sucessiva (VI)

Aproximação linear por partes

- Considere que a função-objetivo é da forma:

$$c(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n_u} c_i(u_i)$$

- A função não-linear $c_i(u_i)$ pode ser aproximada com um nível arbitrário de precisão por uma função linear por partes:

$$c_i(u_i) = c_i(u_i^{j-1}) + c_{ij} (u_i - u_i^{j-1}), \quad u_i^{j-1} \leq u_i \leq u_i^j, \quad j = 1, \dots, n_i$$

onde:

- n_i é o número de segmentos lineares na aproximação, e
- c_{ij} é a inclinação do segmento j .

Programação Linear Sucessiva (VI)

Aproximação linear por partes

- Considere que a função-objetivo é da forma:

$$c(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n_u} c_i(u_i)$$

- A função não-linear $c_i(u_i)$ pode ser aproximada com um nível arbitrário de precisão por uma função linear por partes:

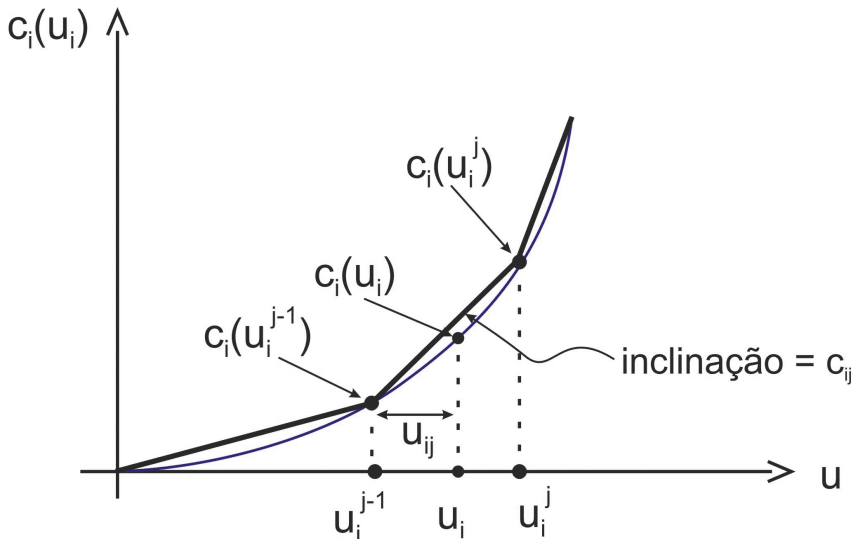
$$c_i(u_i) = c_i(u_i^{j-1}) + c_{ij} (u_i - u_i^{j-1}), \quad u_i^{j-1} \leq u_i \leq u_i^j, \quad j = 1, \dots, n_i$$

onde:

- n_i é o número de segmentos lineares na aproximação, e
- c_{ij} é a inclinação do segmento j .
- Cada segmento linear pode ser modelado como um dispositivo de controle independente: ao segmento j , corresponde a variável de controle $u_{ij} = u_i - u_i^{j-1}$ (ver figura).

Programação Linear Sucessiva (VII)

Ilustração da aproximação linear por partes



Programação Linear Sucessiva (VIII)

Função-objetivo aproximada

- Como os termos constantes não afetam o processo de otimização, podemos então escrever $c_i(u_i)$ como:

$$c_i(u_i) = \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij} u_{ij}$$

Programação Linear Sucessiva (VIII)

Função-objetivo aproximada

- Como os termos constantes não afetam o processo de otimização, podemos então escrever $c_i(u_i)$ como:

$$c_i(u_i) = \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij} u_{ij}$$

- Portanto a função-objetivo original

$$c(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n_u} c_i(u_i)$$

torna-se

$$c(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n_u} \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij} u_{ij}$$

Programação Linear Sucessiva (VIII)

Função-objetivo aproximada

- Como os termos constantes não afetam o processo de otimização, podemos então escrever $c_i(u_i)$ como:

$$c_i(u_i) = \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij} u_{ij}$$

- Portanto a função-objetivo original

$$c(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n_u} c_i(u_i)$$

torna-se

$$c(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n_u} \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij} u_{ij}$$

- A técnica de representar cada segmento por uma variável de controle pode se tornar ineficiente quando o número de segmentos é grande.

Programação Quadrática Sequencial (I)

- O problema de *Programação Quadrática* (PQ) é definido como:

$$\begin{array}{ll}\text{Min} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \\ \text{sujeito a:} & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{F} \mathbf{x} \leq \mathbf{d}\end{array}$$

Programação Quadrática Sequencial (I)

- O problema de *Programação Quadrática* (PQ) é definido como:

$$\begin{array}{ll}\text{Min} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \\ \text{sujeito a:} & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{F} \mathbf{x} \leq \mathbf{d}\end{array}$$

- Funções-objetivo de vários problemas de FPO são bem aproximadas por funções quadráticas $\implies$ interesse em se estender o procedimento da PLS de modo a usar melhores aproximações para a função-objetivo no laço externo;

Programação Quadrática Sequencial (I)

- O problema de *Programação Quadrática* (PQ) é definido como:

$$\begin{array}{ll}\text{Min} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \\ \text{sujeito a:} & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{F} \mathbf{x} \leq \mathbf{d}\end{array}$$

- Funções-objetivo de vários problemas de FPO são bem aproximadas por funções quadráticas $\implies$ interesse em se estender o procedimento da PLS de modo a usar melhores aproximações para a função-objetivo no laço externo;
- *Procedimento*: utilizar função-objetivo quadrática e restrições linearizadas no laço externo, seguido da solução de uma PQ no laço interno;

Programação Quadrática Sequencial (I)

- O problema de *Programação Quadrática* (PQ) é definido como:

$$\begin{array}{ll}\text{Min} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \\ \text{sujeito a:} & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{F} \mathbf{x} \leq \mathbf{d}\end{array}$$

- Funções-objetivo de vários problemas de FPO são bem aproximadas por funções quadráticas $\implies$ interesse em se estender o procedimento da PLS de modo a usar melhores aproximações para a função-objetivo no laço externo;
- *Procedimento*: utilizar função-objetivo quadrática e restrições linearizadas no laço externo, seguido da solução de uma PQ no laço interno;
- O método resultante é referido como *Programação Quadrática Sequencial*.

Programação Quadrática Sequencial (II)

Aproximação Quadrática para a Função-Objetivo

- Problema original:

$$\begin{array}{ll}\text{Min} & c(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a:} & g(\mathbf{x}) = 0 \\ & f(\mathbf{x}) \leq 0\end{array}$$

Programação Quadrática Sequencial (II)

Aproximação Quadrática para a Função-Objetivo

- Problema original:

$$\begin{array}{ll}\text{Min} & c(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a:} & g(\mathbf{x}) = 0 \\ & f(\mathbf{x}) \leq 0\end{array}$$

- Aproximação quadrática mais natural para $c(\mathbf{x})$: expansão em série de Taylor em torno de $\mathbf{x}^k$ até termo de 2ª. ordem:

$$\nabla^T c(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \nabla^2 c(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x}$$

Programação Quadrática Sequencial (II)

Aproximação Quadrática para a Função-Objetivo

- Problema original:

$$\begin{array}{ll}\text{Min} & c(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a:} & g(\mathbf{x}) = 0 \\ & f(\mathbf{x}) \leq 0\end{array}$$

- Aproximação quadrática mais natural para $c(\mathbf{x})$: expansão em série de Taylor em torno de $\mathbf{x}^k$ até termo de 2ª. ordem:

$$\nabla^T c(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \nabla^2 c(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x}$$

- Porém a aproximação acima não leva em conta a curvatura das restrições de igualdade $\implies$ dificuldades de convergência.

Programação Quadrática Sequencial (III)

Uso da Hessiana da função Lagrangeana

- Solução: utilizar a Hessiana da função Lagrangeana

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}^k) = c(\mathbf{x}^k) + (\boldsymbol{\lambda}^k)^T \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)$$

ao invés de $\nabla^2 c(\mathbf{x}^k)$ (desconsidera-se por enqto as restr. de desig.);

Programação Quadrática Sequencial (III)

Uso da Hessiana da função Lagrangeana

- Solução: utilizar a Hessiana da função Lagrangeana

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}^k) = c(\mathbf{x}^k) + (\boldsymbol{\lambda}^k)^T \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)$$

ao invés de $\nabla^2 c(\mathbf{x}^k)$ (desconsidera-se por enquanto as restr. de desigual.);

- Função-objetivo do problema quadrático passa a ser:

$$\nabla^T c(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \nabla_{\mathbf{xx}}^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k) \Delta \mathbf{x}$$

Programação Quadrática Sequencial (III)

Uso da Hessiana da função Lagrangeana

- Solução: utilizar a Hessiana da função Lagrangeana

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}^k) = c(\mathbf{x}^k) + (\boldsymbol{\lambda}^k)^T g(\mathbf{x}^k)$$

ao invés de $\nabla^2 c(\mathbf{x}^k)$ (desconsidera-se por enquanto as restr. de desigual.);

- Função-objetivo do problema quadrático passa a ser:

$$\nabla^T c(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \nabla_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k) \Delta \mathbf{x}$$

- Subprob. de otimização da PQS após linearizar restr. igualdade:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \nabla^T c(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k) \Delta \mathbf{x} \\ \text{sujeito a:} & \mathbf{G}_x(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x} + g(\mathbf{x}^k) = \mathbf{0} \end{array}$$

$\mathbf{G}_x(\mathbf{x}^k)$: Jacobiana das restrições de igualdade calculada em $\mathbf{x}^k$.

Programação Quadrática Sequencial (IV)

Propriedades da solução

1 O problema PQS

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \nabla^T c(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}^k, \lambda^k) \Delta \mathbf{x} \\ \text{sujeito a:} & \mathbf{G}_x(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{0} \end{array}$$

goza das seguintes propriedades:

Programação Quadrática Sequencial (IV)

Propriedades da solução

1 O problema PQS

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \nabla^T c(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}^k, \lambda^k) \Delta \mathbf{x} \\ \text{sujeito a:} & \mathbf{G}_x(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{0} \end{array}$$

goza das seguintes propriedades:

- 2 Quando $\Delta \mathbf{x} \approx \mathbf{0}$ (isto é, quando nenhuma correção adicional puder ser encontrada), então o mínimo do problema original foi encontrado;

Programação Quadrática Sequencial (IV)

Propriedades da solução

1 O problema PQS

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \nabla^T c(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}^k, \lambda^k) \Delta \mathbf{x} \\ \text{sujeito a:} & \mathbf{G}_x(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{0} \end{array}$$

goza das seguintes propriedades:

- 2 Quando $\Delta \mathbf{x} \approx \mathbf{0}$ (isto é, quando nenhuma correção adicional puder ser encontrada), então o mínimo do problema original foi encontrado;
- 3 Os λ' s da iteração k são boas estimativas para os λ' s da iteração $k + 1$;

Programação Quadrática Sequencial (IV)

Propriedades da solução

1 O problema PQS

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \nabla^T c(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}^k, \lambda^k) \Delta \mathbf{x} \\ \text{sujeito a:} & \mathbf{G}_x(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{0} \end{array}$$

goza das seguintes propriedades:

- 2 Quando $\Delta \mathbf{x} \approx \mathbf{0}$ (isto é, quando nenhuma correção adicional puder ser encontrada), então o mínimo do problema original foi encontrado;
- 3 Os λ' s da iteração k são boas estimativas para os λ' s da iteração $k + 1$;
- 4 Nas proximidades da solução, a função-objetivo quadrática tende a ser positiva definida, e o subproblema PQ pode ser facilmente resolvido.

Métodos Baseados em Programação Quadrática Sequencial (V)

Solução do Problema com Restrições de Igualdade e Desigualdade (I)

- Seja o problema completo:

$$\begin{array}{ll}\text{Min} & c(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a:} & g(\mathbf{x}) = 0 \\ & f(\mathbf{x}) \leq 0\end{array}$$

Métodos Baseados em Programação Quadrática Sequencial (V)

Solução do Problema com Restrições de Igualdade e Desigualdade (I)

- Seja o problema completo:

$$\begin{array}{ll}\text{Min} & c(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a:} & g(\mathbf{x}) = 0 \\ & f(\mathbf{x}) \leq 0\end{array}$$

- A função Lagrangeana correspondente é:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}^k) = c(\mathbf{x}) + \lambda^T g(\mathbf{x}^k) + \pi^T f(\mathbf{x})$$

Programação Quadrática Sequencial (VI)

Solução do Problema com Restrições de Igualdade e Desigualdade (II)

- Para um dado ponto $\mathbf{x}^k$ o subproblema PQ torna-se:

$$\begin{array}{ll}\text{Min} & \nabla^T \mathbf{c}(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k) \Delta \mathbf{x} \\ \text{sujeito a:} & \mathbf{G}_x(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{c}_x(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) \leq \mathbf{0}\end{array}$$

Programação Quadrática Sequencial (VI)

Solução do Problema com Restrições de Igualdade e Desigualdade (II)

- Para um dado ponto $\mathbf{x}^k$ o subproblema PQ torna-se:

$$\begin{array}{ll}\text{Min} & \nabla^T \mathbf{c}(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k) \Delta \mathbf{x} \\ \text{sujeito a:} & \mathbf{G}_x(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{c}_x(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) \leq \mathbf{0}\end{array}$$

- $\mathbf{F}_x(\mathbf{x}^k)$: matriz Jacobiana das restrições de desigualdade.

Programação Quadrática Sequencial (VII)

Algoritmo

- 1 Fornecer estimativas iniciais $\mathbf{x}^0$, λ^0 e π^0 , formular o problema de PQ aproximado com restrs. de igualdade e desigualdade;
- 2 Resolver o Problema PQ;
- 3 Atualizar variáveis: $\mathbf{x}^{k+1} \leftarrow \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}$;
- 4 Se $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| \leq \epsilon$, para um ϵ suficientemente pequeno, **FIM**;
- 5 Se não, continuar no próximo passo;
- 6 Retornar ao passo 2, utilizando λ^k e π^k como estimativas para os multiplicadores de Lagrange do passo $k + 1$.

Aplicação de PQS ao Fluxo de Potência Ótimo (I)

Seja o problema de FPO:

$$\text{Min} \quad c(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

$$\text{sujeito a: } \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{s} = \mathbf{0}$$

Aplicação de PQS ao Fluxo de Potência Ótimo (II)

As condições de KKT correspondentes são:

$$\nabla_x c(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{G}_x^T \lambda + \mathbf{F}_x^T \pi = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

$$\nabla_u c(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{G}_u^T \lambda + \mathbf{F}_u^T \pi = \mathbf{0}$$

$$\Pi \mathbf{s} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{s} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{s}, \pi \geq \mathbf{0}$$

Aplicação de PQS ao Fluxo de Potência Ótimo (III)

A linearização destas condições de KKT com respeito a $\mathbf{x}$ e $\mathbf{u}$ apenas fornece:

$$\nabla_{\mathbf{x}} c(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{W}_{xx} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{W}_{xu} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{G}_x^T \Delta \lambda + \mathbf{F}_x^T \Delta \pi = \mathbf{b}_x^{(k)}$$

$$\mathbf{G}_x \Delta \mathbf{x} + \mathbf{G}_u \Delta \mathbf{u} = \mathbf{b}_\lambda^{(k)}$$

$$\nabla_{\mathbf{u}} c(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{W}_{xu}^T \Delta \mathbf{x} + \mathbf{W}_{uu} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{G}_u^T \Delta \lambda + \mathbf{F}_u^T \Delta \pi = \mathbf{b}_u^{(k)}$$

$$\Pi \mathbf{s} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{F}_x \Delta \mathbf{x} + \mathbf{F}_u \Delta \mathbf{u} + \mathbf{s} = \mathbf{b}_\pi^{(k)}$$

Aplicação de PQS ao Fluxo de Potência Ótimo (IV)

Estas *condições de KKT linearizadas* podem ser interpretadas com as condições de KKT para o seguinte problema de PQ:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \begin{bmatrix} \mathbf{c}_x & \mathbf{c}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{u} \end{bmatrix} \\ & + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} & \Delta \mathbf{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xu} \\ W_{xu}^T & W_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{u} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Sujeito a: } \mathbf{G}_x \Delta \mathbf{x} + \mathbf{G}_u \Delta \mathbf{u} = \mathbf{b}_\lambda^{(k)}$$

$$\mathbf{F}_x \Delta \mathbf{x} + \mathbf{F}_u \Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{b}_\pi^{(k)}$$

Aplicação de PQS ao Fluxo de Potência Ótimo (V)

- Como foi feito para a *PLS*, $\Delta \mathbf{x}$ pode ser eliminado, o que reduz o problema à forma:

$$\begin{array}{ll}\text{Min} & \mathbf{c}^T \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{Q} \Delta \mathbf{u} \\ \text{sujeito a:} & \mathbf{a}^T \Delta \mathbf{u} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{D} \Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{d}\end{array}$$

Aplicação de PQS ao Fluxo de Potência Ótimo (V)

- Como foi feito para a *PLS*, $\Delta \mathbf{x}$ pode ser eliminado, o que reduz o problema à forma:

$$\begin{array}{ll}\text{Min} & \mathbf{c}^T \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{Q} \Delta \mathbf{u} \\ \text{sujeito a:} & \mathbf{a}^T \Delta \mathbf{u} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{D} \Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{d}\end{array}$$

- Observações:

Aplicação de PQS ao Fluxo de Potência Ótimo (V)

- Como foi feito para a *PLS*, $\Delta \mathbf{x}$ pode ser eliminado, o que reduz o problema à forma:

$$\begin{array}{ll}\text{Min} & \mathbf{c}^T \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{Q} \Delta \mathbf{u} \\ \text{sujeito a:} & \mathbf{a}^T \Delta \mathbf{u} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{D} \Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{d}\end{array}$$

- Observações:
 - Como na *PLS*, a formulação acima configura um *problema denso*;

Aplicação de PQS ao Fluxo de Potência Ótimo (V)

- Como foi feito para a *PLS*, $\Delta \mathbf{x}$ pode ser eliminado, o que reduz o problema à forma:

$$\begin{array}{ll}\text{Min} & \mathbf{c}^T \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{Q} \Delta \mathbf{u} \\ \text{sujeito a:} & \mathbf{a}^T \Delta \mathbf{u} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{D} \Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{d}\end{array}$$

- Observações:
 - Como na *PLS*, a formulação acima configura um *problema denso*;
 - No caso do FPO, é o problema acima que deve ser resolvido na etapa 2 do algoritmo *PQS* (laço mais interno);

Aplicação de PQS ao Fluxo de Potência Ótimo (V)

- Como foi feito para a *PLS*, $\Delta \mathbf{x}$ pode ser eliminado, o que reduz o problema à forma:

$$\begin{array}{ll}\text{Min} & \mathbf{c}^T \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{Q} \Delta \mathbf{u} \\ \text{sujeito a:} & \mathbf{a}^T \Delta \mathbf{u} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{D} \Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{d}\end{array}$$

- Observações:
 - Como na *PLS*, a formulação acima configura um *problema denso*;
 - No caso do FPO, é o problema acima que deve ser resolvido na etapa 2 do algoritmo *PQS* (laço mais interno);
 - Como na *PLS*, resultados do Fluxo de Potência devem ser utilizados para calcular $\mathbf{x}$ a partir dos valores da iteração corrente de $\mathbf{u}$.

Métodos Baseados em Funções de Penalidade (I)

- Métodos de *pontos exteriores*: durante o processo iterativo, admite-se violação de restrições de desigualdade;

Métodos Baseados em Funções de Penalidade (I)

- Métodos de *pontos exteriores*: durante o processo iterativo, admite-se violação de restrições de desigualdade;
- São também do tipo *Lagrangeano aumentado*: função Lagrangeana modificada pela adição da função de penalidade.

Métodos Baseados em Funções de Penalidade (I)

- Métodos de *pontos exteriores*: durante o processo iterativo, admite-se violação de restrições de desigualdade;
- São também do tipo *Lagrangeano aumentado*: função Lagrangeana modificada pela adição da função de penalidade.
- Função de Penalidade para uma restrição de desigualdade:

Métodos Baseados em Funções de Penalidade (I)

- Métodos de *pontos exteriores*: durante o processo iterativo, admite-se violação de restrições de desigualdade;
- São também do tipo *Lagrangeano aumentado*: função Lagrangeana modificada pela adição da função de penalidade.
- Função de Penalidade para uma restrição de desigualdade:
 - zero quando a desigualdade é satisfeita, e

Métodos Baseados em Funções de Penalidade (I)

- Métodos de *pontos exteriores*: durante o processo iterativo, admite-se violação de restrições de desigualdade;
- São também do tipo *Lagrangeano aumentado*: função Lagrangeana modificada pela adição da função de penalidade.
- Função de Penalidade para uma restrição de desigualdade:
 - *zero* quando a desigualdade é satisfeita, e
 - *positiva* em caso contrário.

Métodos Baseados em Funções de Penalidade (II)

- Restrições de desigualdade com a introdução de variáveis de folga:

$$\left. \begin{array}{lcl} f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + s_i & = & 0 \\ s_i & \geq & 0 \end{array} \right\} i = 1, \dots, p$$

Métodos Baseados em Funções de Penalidade (II)

- Restrições de desigualdade com a introdução de variáveis de folga:

$$\left. \begin{array}{rcl} f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + s_i & = & 0 \\ s_i & \geq & 0 \end{array} \right\} i = 1, \dots, p$$

- Função de penalidade quadrática:

$$p_i(\rho, s_i) = \begin{cases} 0, & s_i \geq 0 \\ \frac{\rho}{2} s_i^2, & s_i < 0 \end{cases}$$

Métodos Baseados em Funções de Penalidade (III)

- Problema modificado (FPO_ρ):

$$FPO_\rho : \left\{ \begin{array}{ll} \text{Min} & c(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{n_f} p_i(\rho, s_i) \\ \text{sujeito a:} & \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0 \\ & \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{s} = 0 \end{array} \right.$$

Métodos Baseados em Funções de Penalidade (III)

- Problema modificado (FPO_ρ):

$$FPO_\rho : \begin{cases} \text{Min} & c(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{n_f} p_i(\rho, s_i) \\ \text{sujeito a:} & \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0 \\ & \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{s} = 0 \end{cases}$$

- Existe um $\mathbf{x}^*(\rho)$, solução do problema FPO_ρ , para o qual:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \mathbf{x}^*(\rho) = \mathbf{x}^*$$

$\mathbf{x}^*$: solução desejada do problema FPO .

Métodos Baseados em Funções de Penalidade (III)

- Problema modificado (FPO_{ρ}):

$$FPO_{\rho} : \begin{cases} \text{Min} & c(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{n_f} p_i(\rho, s_i) \\ \text{sujeito a:} & \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0 \\ & \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{s} = 0 \end{cases}$$

- Existe um $\mathbf{x}^*(\rho)$, solução do problema FPO_{ρ} , para o qual:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \mathbf{x}^*(\rho) = \mathbf{x}^*$$

$\mathbf{x}^*$: solução desejada do problema FPO .

- Função Lagrangeana para o problema FPO_{ρ} :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda, \pi) = & c(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{n_f} p_i(\rho, s_i) + \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ & + \pi^T (\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{s}) \end{aligned}$$

Métodos Baseados em Funções de Penalidade (IV)

- Condições necessárias de KKT:

$$\nabla_u \mathcal{L} = \nabla_u c(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + G_u^T \boldsymbol{\lambda} + F_u^T \boldsymbol{\pi} = 0$$

$$\nabla_x \mathcal{L} = \nabla_x c(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + G_x^T \boldsymbol{\lambda} + F_x^T \boldsymbol{\pi} = 0$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{s} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_i} = \frac{\partial p_i(\rho, s_i)}{\partial s_i} + \pi_i = 0$$

Métodos Baseados em Funções de Penalidade (IV)

- Condições necessárias de KKT:

$$\nabla_u \mathcal{L} = \nabla_u c(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + G_u^T \boldsymbol{\lambda} + F_u^T \boldsymbol{\pi} = 0$$

$$\nabla_x \mathcal{L} = \nabla_x c(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + G_x^T \boldsymbol{\lambda} + F_x^T \boldsymbol{\pi} = 0$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{s} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_i} = \frac{\partial p_i(\rho, s_i)}{\partial s_i} + \pi_i = 0$$

onde

$$\frac{\partial p_i(\rho, s_i)}{\partial s_i} = \begin{cases} \rho s_i, & s_i < 0 \\ 0, & s_i \geq 0 \end{cases}$$

- Condição $(\partial \mathcal{L} / \partial s_i) = 0$ re-escrita como:

$$\mathbf{D} \mathbf{s} + \boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$$

onde $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_{n_f}\}$ e

$$d_i = \begin{cases} \rho, & s_i < 0 \\ 0, & s_i \geq 0 \end{cases}$$

Métodos Baseados em Funções de Penalidade (VI)

- Método de Newton pode então ser aplicado para resolver as condições de KKT.modificadas:

$$\nabla_u c(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + G_u^T \boldsymbol{\lambda} + F_u^T \boldsymbol{\pi} = 0$$

$$\nabla_x c(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + G_x^T \boldsymbol{\lambda} + F_x^T \boldsymbol{\pi} = 0$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{s} = 0$$

$$\mathbf{D} \mathbf{s} + \boldsymbol{\pi} = 0$$