

# Programação Hidrotérmica de Curto Prazo

Antonio Simões Costa

Grupo de Sistemas de Potência - UFSC

- Neste caso, capacidade hidráulica  $<$  potência da carga  $\Rightarrow$  térmicas devem operar durante todo o horizonte de tempo;

- Neste caso, capacidade hidráulica  $<$  potência da carga  $\Rightarrow$  térmicas devem operar durante todo o horizonte de tempo;
- Volume d'água disponível para a UHE utilizado para minimizar custo térmico;

- Neste caso, capacidade hidráulica  $<$  potência da carga  $\Rightarrow$  térmicas devem operar durante todo o horizonte de tempo;
- Volume d'água disponível para a UHE utilizado para minimizar custo térmico;
- Hipóteses:

- Neste caso, capacidade hidráulica  $<$  potência da carga  $\Rightarrow$  térmicas devem operar durante todo o horizonte de tempo;
- Volume d'água disponível para a UHE utilizado para minimizar custo térmico;
- Hipóteses:
  - ausência de vertimento;

- Neste caso, capacidade hidráulica  $<$  potência da carga  $\Rightarrow$  térmicas devem operar durante todo o horizonte de tempo;
- Volume d'água disponível para a UHE utilizado para minimizar custo térmico;
- Hipóteses:
  - ausência de vertimento;
  - altura de queda  $\approx$  constante  $\Rightarrow$  potência gerada pela UHE depende apenas da vazão turbinada ou, equivalentemente,  $q = f(P_H)$ .

# Formulação do Problema:

- *Considerações adicionais:*

# Formulação do Problema:

- *Considerações adicionais:*
  - $V_{tot}$ : volume disponível para ser turbinado durante o horizonte de  $T_{max}$  horas;

# Formulação do Problema:

- *Considerações adicionais:*

- $V_{tot}$ : volume disponível para ser turbinado durante o horizonte de  $T_{max}$  horas;
- horizonte discretizado em  $j_{max}$  intervalos, e intervalo  $j$  com duração de  $h_j$  horas,

# Formulação do Problema:

- *Considerações adicionais:*

- $V_{tot}$ : volume disponível para ser turbinado durante o horizonte de  $T_{max}$  horas;
- horizonte discretizado em  $j_{max}$  intervalos, e intervalo  $j$  com duração de  $h_j$  horas,
- carga constante ao longo de cada intervalo,

# Formulação do Problema:

- *Considerações adicionais:*
  - $V_{tot}$ : volume disponível para ser turbinado durante o horizonte de  $T_{max}$  horas;
  - horizonte discretizado em  $j_{max}$  intervalos, e intervalo  $j$  com duração de  $h_j$  horas,
  - carga constante ao longo de cada intervalo,
- Formulação da **Programação H-T de Curto Prazo:**

$$\min F_T(\mathbf{P}_T) = \sum_{j=1}^{j_{max}} F(P_{T,j}) h_j$$

s.a

$$\sum_{j=1}^{j_{max}} h_j q(P_{H,j}) = V_{tot}$$

$$P_{L,j} + P_{perdas,j} = P_{H,j} + P_{T,j}, \quad j = 1, \dots, j_{max}$$

# Função Lagrangeana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{P}_T, \mathbf{P}_H, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = & \sum_{j=1}^{j_{\max}} F(P_{T,j}) h_j + \\ & \sum_{j=1}^{j_{\max}} [\lambda_j (P_{L,j} + P_{perdas,j} - P_{H,j} - P_{T,j})] + \\ & \gamma \left( \sum_{j=1}^{j_{\max}} h_j q(P_{H,j}) - V_{tot} \right) \end{aligned}$$

onde

- $\lambda_j, j = 1, \dots, j_{\max}$ : mult. de Lagrange das restr. de balanço de potência;

# Função Lagrangeana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{P}_T, \mathbf{P}_H, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = & \sum_{j=1}^{j_{\max}} F(P_{T,j}) h_j + \\ & \sum_{j=1}^{j_{\max}} [\lambda_j (P_{L,j} + P_{\text{perdas},j} - P_{H,j} - P_{T,j})] + \\ & \gamma \left( \sum_{j=1}^{j_{\max}} h_j q(P_{H,j}) - V_{\text{tot}} \right) \end{aligned}$$

onde

- $\lambda_j, j = 1, \dots, j_{\max}$ : mult. de Lagrange das restr. de balanço de potência;
- $\gamma$ : mult. de Lagrange da restrição de volume;

# Função Lagrangeana:

$$\mathcal{L}(\mathbf{P}_T, \mathbf{P}_H, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = \sum_{j=1}^{j_{\max}} F(P_{T,j}) h_j + \sum_{j=1}^{j_{\max}} [\lambda_j (P_{L,j} + P_{perdas,j} - P_{H,j} - P_{T,j})] + \gamma \left( \sum_{j=1}^{j_{\max}} h_j q(P_{H,j}) - V_{tot} \right)$$

onde

- $\lambda_j, j = 1, \dots, j_{\max}$ : mult. de Lagrange das restr. de balanço de potência;
- $\gamma$ : mult. de Lagrange da restrição de volume;
- Restrição de volume é uma só, *mas envolve as potências geradas na UHE em cada intervalo de tempo  $j$  (restrição intertemporal)*.

# Condições de Otimalidade:

- *Equações de coordenação hidrotérmica* para um dado intervalo  $k$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{T,k}} = h_k \frac{dF(P_{T,k})}{dP_{T,k}} - \lambda_k \left( 1 - \frac{\partial P_{perdas,k}}{\partial P_{T,k}} \right) = 0, \quad k = 1, \dots, j_{\max}$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{H,k}} = h_k \gamma \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} - \lambda_k \left( 1 - \frac{\partial P_{perdas,k}}{\partial P_{H,k}} \right) = 0, \quad k = 1, \dots, j_{\max}$$

# Condições de Otimalidade:

- *Equações de coordenação hidrotérmica* para um dado intervalo  $k$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{T,k}} = h_k \frac{dF(P_{T,k})}{dP_{T,k}} - \lambda_k \left( 1 - \frac{\partial P_{perdas,k}}{\partial P_{T,k}} \right) = 0, \quad k = 1, \dots, j_{\max}$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{H,k}} = h_k \gamma \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} - \lambda_k \left( 1 - \frac{\partial P_{perdas,k}}{\partial P_{H,k}} \right) = 0, \quad k = 1, \dots, j_{\max}$$

- Podem ser re-escritas como:

$$\left( \frac{1}{1 - \frac{\partial P_{perdas,k}}{\partial P_{T,k}}} \right) h_k \frac{dF(P_{T,k})}{dP_{T,k}} = \lambda_k, \quad k = 1, \dots, j_{\max}$$

e

$$\left( \frac{1}{1 - \frac{\partial P_{perdas,k}}{\partial P_{H,k}}} \right) h_k \gamma \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} = \lambda_k, \quad k = 1, \dots, j_{\max}$$

# Perdas de Transmissão Desconsideradas - I:

Considere agora que:

- Perdas de transmissão podem ser desprezadas, ou seja

$$P_{perdas,j} = 0, \quad j = 1, \dots, j_{\max}$$

# Perdas de Transmissão Desconsideradas - I:

Considere agora que:

- Perdas de transmissão podem ser desprezadas, ou seja

$$P_{perdas,j} = 0, \quad j = 1, \dots, j_{\max}$$

- Intervalos de tempo são de igual duração, isto é

$$h_j = h, \quad j = 1, \dots, j_{\max}$$

# Perdas de Transmissão Desconsideradas - I:

Considere agora que:

- Perdas de transmissão podem ser desprezadas, ou seja

$$P_{perdas,j} = 0, \quad j = 1, \dots, j_{\max}$$

- Intervalos de tempo são de igual duração, isto é

$$h_j = h, \quad j = 1, \dots, j_{\max}$$

As equações de coordenação tornam-se:

$$\left. \begin{aligned} h \frac{dF(P_{T,k})}{dP_{T,k}} &= \lambda_k \\ h \gamma \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} &= \lambda_k \end{aligned} \right\}, \quad k = 1, \dots, j_{\max}$$

## Perdas de Transmissão Desconsideradas - II:

Se considerarmos  $q(P_{H,j}) = \beta_0 + \beta_1 P_{H,j}$  em

$$h \frac{dF(P_{T,k})}{dP_{T,k}} = \lambda_k$$

$$h \gamma \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} = \lambda_k$$

veremos que:

- $\lambda_k$  será constante sobre todos os intervalos;

## Perdas de Transmissão Desconsideradas - II:

Se considerarmos  $q(P_{H,j}) = \beta_0 + \beta_1 P_{H,j}$  em

$$h \frac{dF(P_{T,k})}{dP_{T,k}} = \lambda_k$$

$$h \gamma \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} = \lambda_k$$

veremos que:

- $\lambda_k$  será constante sobre todos os intervalos;
- térmicas devem operar com custos incrementais constantes, e

## Perdas de Transmissão Desconsideradas - II:

Se considerarmos  $q(P_{H,j}) = \beta_0 + \beta_1 P_{H,j}$  em

$$h \frac{dF(P_{T,k})}{dP_{T,k}} = \lambda_k$$

$$h \gamma \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} = \lambda_k$$

veremos que:

- $\lambda_k$  será constante sobre todos os intervalos;
- térmicas devem operar com custos incrementais constantes, e
- *potências geradas pelas térmicas também serão constantes durante todo o horizonte de tempo.*

# Interpretação do multiplicador de Lagrange $\gamma$ :

Comparando as eqs. de coordenação no caso sem perdas:

$$h f \frac{dH(P_{T,k})}{dP_{T,k}} = \lambda_k$$

$$h \gamma \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} = \lambda_k$$

- $H$  e  $q$  traduzem as taxas de entrada de energia para a UTE e para a UHE, respectivamente  $\Rightarrow \gamma$  ( $\$/dam^3$ ) tem papel análogo a  $f$  ( $\$/MBtu$ ).

# Interpretação do multiplicador de Lagrange $\gamma$ :

Comparando as eqs. de coordenação no caso sem perdas:

$$h f \frac{dH(P_{T,k})}{dP_{T,k}} = \lambda_k$$

$$h \gamma \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} = \lambda_k$$

- $H$  e  $q$  traduzem as taxas de entrada de energia para a UTE e para a UHE, respectivamente  $\Rightarrow \gamma$  ( $\$/dam^3$ ) tem papel análogo a  $f$  ( $\$/MBtu$ ).
- A variável  $\gamma$  é o *valor marginal da água*;

# Interpretação do multiplicador de Lagrange $\gamma$ :

Comparando as eqs. de coordenação no caso sem perdas:

$$h f \frac{dH(P_{T,k})}{dP_{T,k}} = \lambda_k$$

$$h \gamma \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} = \lambda_k$$

- $H$  e  $q$  traduzem as taxas de entrada de energia para a UTE e para a UHE, respectivamente  $\Rightarrow \gamma$  ( $\$/dam^3$ ) tem papel análogo a  $f$  ( $\$/MBtu$ ).
- A variável  $\gamma$  é o *valor marginal da água*;
- Para dois valores de volume a ser turbinado por uma UHE sob as mesmas condições,  $V_{tot1}$  e  $V_{tot2}$ ,  $V_{tot1} > V_{tot2}$ , podemos esperar que,  $\gamma_1 < \gamma_2$ .

## Exemplo 3:

Uma carga deve ser alimentada durante 24 horas por uma UHE e uma UTE cujas características são:

<b>UHE:</b>	$q(P_H) = 330 + 4,97 P_H \text{ dam}^3/h,$
	$0 \leq P_H \leq 1000 \text{ MW}$
<b>UTE:</b>	$F(P_T) = 575 + 9,2 P_T + 0,00184 P_T^2 \text{ \$/h},$
	$150 \leq P_T \leq 1500 \text{ MW}$

Os efeitos das perdas de transmissão são considerados desprezíveis, o máximo volume d'água a ser turbinado é de  $100000 \text{ dam}^3$  e a carga varia conforme abaixo:

00 : 00 – 12 : 00	1200 MW
12 : 00 – 24 : 00	1500 MW

Determine os despachos da UHE e da UTE ao longo do período, bem como os custos marginais de energia do sistema e custos marginais da água.

## Solução:

- Com  $h_1 = h_2$  e perdas desprezadas, temos que  $P_{T,1} = P_{T,2} = P_T$ .

## Solução:

- Com  $h_1 = h_2$  e perdas desprezadas, temos que  $P_{T,1} = P_{T,2} = P_T$ .
- Das equações de balanço de potência:

$$P_{H,1} + P_T = 1200 \Rightarrow P_{H,1} = 1200 - P_T$$

$$P_{H,2} + P_T = 1500 \Rightarrow P_{H,2} = 1500 - P_T$$

## Solução:

- Com  $h_1 = h_2$  e perdas desprezadas, temos que  $P_{T,1} = P_{T,2} = P_T$ .
- Das equações de balanço de potência:

$$P_{H,1} + P_T = 1200 \Rightarrow P_{H,1} = 1200 - P_T$$

$$P_{H,2} + P_T = 1500 \Rightarrow P_{H,2} = 1500 - P_T$$

- Já a equação de restrição de volume fornece

$$h_1 q(P_{H,1}) + h_2 q(P_{H,2}) = V_{tot}$$

## Solução:

- Com  $h_1 = h_2$  e perdas desprezadas, temos que  $P_{T,1} = P_{T,2} = P_T$ .
- Das equações de balanço de potência:

$$P_{H,1} + P_T = 1200 \Rightarrow P_{H,1} = 1200 - P_T$$

$$P_{H,2} + P_T = 1500 \Rightarrow P_{H,2} = 1500 - P_T$$

- Já a equação de restrição de volume fornece

$$h_1 q(P_{H,1}) + h_2 q(P_{H,2}) = V_{tot}$$

- ou, como  $h_1 = h_2 = 12$ ,

$$12 [330 + 4,97 (1200 - P_T)] + 330 + 4,97 (1500 - P_T) = 100000$$

## Solução:

- Com  $h_1 = h_2$  e perdas desprezadas, temos que  $P_{T,1} = P_{T,2} = P_T$ .
- Das equações de balanço de potência:

$$P_{H,1} + P_T = 1200 \Rightarrow P_{H,1} = 1200 - P_T$$

$$P_{H,2} + P_T = 1500 \Rightarrow P_{H,2} = 1500 - P_T$$

- Já a equação de restrição de volume fornece

$$h_1 q(P_{H,1}) + h_2 q(P_{H,2}) = V_{tot}$$

- ou, como  $h_1 = h_2 = 12$ ,

$$12 [330 + 4,97 (1200 - P_T)] + 330 + 4,97 (1500 - P_T) = 100000$$

- cuja solução fornece

$$P_{T,1} = P_{T,2} = P_T = 577,9 \text{ MW}$$

# Solução:

- Com  $h_1 = h_2$  e perdas desprezadas, temos que  $P_{T,1} = P_{T,2} = P_T$ .
- Das equações de balanço de potência:

$$P_{H,1} + P_T = 1200 \Rightarrow P_{H,1} = 1200 - P_T$$

$$P_{H,2} + P_T = 1500 \Rightarrow P_{H,2} = 1500 - P_T$$

- Já a equação de restrição de volume fornece

$$h_1 q(P_{H,1}) + h_2 q(P_{H,2}) = V_{tot}$$

- ou, como  $h_1 = h_2 = 12$ ,

$$12 [330 + 4,97 (1200 - P_T)] + 330 + 4,97 (1500 - P_T) = 100000$$

- cuja solução fornece

$$P_{T,1} = P_{T,2} = P_T = 577,9 \text{ MW}$$

- e conseqüentemente

$$P_{H,1} = 1200 - P_T = 622,1 \text{ MW}$$

$$P_{H,2} = 1500 - P_T = 922,1 \text{ MW}$$

## Solução Ex. 3 (cont.):

- Os multiplicadores de Lagrange das equações de balanço de energia podem ser calculados como

$$\lambda_1 = \lambda_2 = h \frac{dF(P_{T,k})}{dP_{T,k}} = 12 \times (9,2 + 0,00368 \times 577,9)$$

ou

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 135,92 \text{ \$/MW}$$

## Solução Ex. 3 (cont.):

- Os multiplicadores de Lagrange das equações de balanço de energia podem ser calculados como

$$\lambda_1 = \lambda_2 = h \frac{dF(P_{T,k})}{dP_{T,k}} = 12 \times (9,2 + 0,00368 \times 577,9)$$

ou

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 135,92 \text{ \$/MW}$$

- Finalmente, o custo marginal da água é dado por

$$\gamma h \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} = \lambda \Rightarrow 12 \times 4,97 \times \gamma = 135,92$$

## Solução Ex. 3 (cont.):

- Os multiplicadores de Lagrange das equações de balanço de energia podem ser calculados como

$$\lambda_1 = \lambda_2 = h \frac{dF(P_{T,k})}{dP_{T,k}} = 12 \times (9,2 + 0,00368 \times 577,9)$$

ou

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 135,92 \text{ \$/MW}$$

- Finalmente, o custo marginal da água é dado por

$$\gamma h \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} = \lambda \Rightarrow 12 \times 4,97 \times \gamma = 135,92$$

- Portanto,  $\gamma = 2,28 \text{ \$/dam}^3$ .

- Perdas não-desprezadas  $\Rightarrow$  problema de coord. H-T forma um conjunto de  $(3 j_{\max} + 1)$  equações não-lineares;

- Perdas não-desprezadas  $\Rightarrow$  problema de coord. H-T forma um conjunto de  $(3 j_{\max} + 1)$  equações não-lineares;
- Principal dificuldade: restrição de volume é *intertemporal*, dificultando desacoplamento do problema por intervalo de tempo;

- Perdas não-desprezadas  $\Rightarrow$  problema de coord. H-T forma um conjunto de  $(3 j_{\max} + 1)$  equações não-lineares;
- Principal dificuldade: restrição de volume é *intertemporal*, dificultando desacoplamento do problema por intervalo de tempo;
- Algoritmos de solução: *Iteração  $\lambda - \gamma$*  (clássico), Pontos Interiores, Programação Quadrática, Relaxação Lagrangeana, etc.

## Descrição geral do algoritmo:

Consiste de três laços iterativos:

- Laço interno: ajusta os multiplicadores de Lagrange  $\lambda_j$  para resolver equações de coordenação hidrotérmica e de balanço de potência;

# Descrição geral do algoritmo:

Consiste de três laços iterativos:

- Laço interno: ajusta os multiplicadores de Lagrange  $\lambda_j$  para reesolver equações de coordenação hidrotérmica e de balanço de potência;
- Laço intermediário: incrementa os intervalos de tempo até esgotar o horizonte de tempo de estudo;

## Descrição geral do algoritmo:

Consiste de três laços iterativos:

- Laço interno: ajusta os multiplicadores de Lagrange  $\lambda_j$  para resolver equações de coordenação hidrotérmica e de balanço de potência;
- Laço intermediário: incrementa os intervalos de tempo até esgotar o horizonte de tempo de estudo;
- Laço externo: ajusta iterativamente o multiplicador de Lagrange da restrição de volume,  $\gamma$ , até que esta restrição seja cumprida.

# Passos do Algoritmo da Iteração $\lambda - \gamma$ :

- 1 Inicializar  $\lambda_k$ ,  $\gamma$ ,  $P_{T,k}$  e contador  $j = 1$ ;
- 2 Resolver eqs.de coord. para  $P_{T,j}$  e  $P_{H,j}$ :

$$h_j \frac{dF(P_{T,j})}{dP_{T,j}} + \lambda_j \frac{\partial P_{perdas,j}}{\partial P_{T,j}} = \lambda_j$$
$$h_j \gamma \frac{dq(P_{H,j})}{dP_{H,j}} + \lambda_j \frac{\partial P_{perdas,j}}{\partial P_{H,j}} = \lambda_j$$

- 3 Verificar eq. de balanço de carga:

$$P_{L,j} + P_{perdas,j} - P_{H,j} - P_{T,j} \leq \varepsilon_1$$

Se satisfeita, ir para **4**. Se não, projetar novo  $\lambda_j$  e voltar para **2**;

- 4 Calcular  $q_j = q(P_{H,j})$ ;
- 5 Se  $j = j_{\max}$ , ir para **6**. Se não, fazer  $j \leftarrow j + 1$  e voltar para **2**;
- 6 Verificar a restrição de volume:

$$\left| \sum_{j=1}^{j_{\max}} h_j q(P_{H,j}) - V_{tot} \right| \leq \varepsilon_2$$

Se satisfeita, **FIM**. Se não, projetar novo  $\gamma$  e retornar para **2**.

## Exemplo 4:

Reconsidere o Exemplo 3, agora supondo que a UHE está localizada a uma certa distância da carga, de modo que as perdas de transmissão são significativas e dependem apenas de  $P_H$ , sendo dadas por

$$P_{perdas,j} = 8 \times 10^{-5} P_{H,j}^2, \quad j = 1, \dots, j_{\max}.$$

Encontre os novos despachos da UHE e da UTE, bem como os multiplicadores de Lagrange e as perdas de transmissão.

- A aplicação do Algoritmo da Iteração  $\lambda - \gamma$  fornece:

Período	$P_{T,j}$	$P_{H,j}$	$\lambda_j$	$P_{perdas,j}$	$q_j$
00-12	567,4	668,3	135,46	35,73	3651,5
12-24	685,7	875,6	140,68	61,33	4681,7

$$\gamma = 2,028 \text{ \$/dam}^3$$

- A aplicação do Algoritmo da Iteração  $\lambda - \gamma$  fornece:

Período	$P_{T,j}$	$P_{H,j}$	$\lambda_j$	$P_{perdas,j}$	$q_j$
00-12	567,4	668,3	135,46	35,73	3651,5
12-24	685,7	875,6	140,68	61,33	4681,7

$$\gamma = 2,028 \text{ \$/dam}^3$$

- As seguintes observações aplicam-se a este exemplo:

- A aplicação do Algoritmo da Iteração  $\lambda - \gamma$  fornece:

Período	$P_{T,j}$	$P_{H,j}$	$\lambda_j$	$P_{perdas,j}$	$q_j$
00-12	567,4	668,3	135,46	35,73	3651,5
12-24	685,7	875,6	140,68	61,33	4681,7

$$\gamma = 2,028 \text{ \$/dam}^3$$

- As seguintes observações aplicam-se a este exemplo:
  - Na presença de perdas, os  $\lambda_j$  e  $P_{T,j}$  não são mais constantes ao longo dos intervalos de tempo;

- A aplicação do Algoritmo da Iteração  $\lambda - \gamma$  fornece:

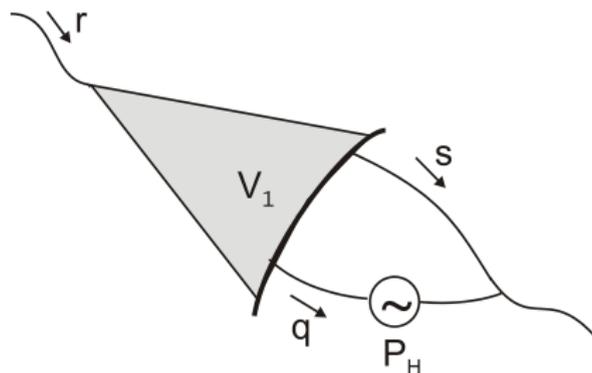
Período	$P_{T,j}$	$P_{H,j}$	$\lambda_j$	$P_{perdas,j}$	$q_j$
00-12	567,4	668,3	135,46	35,73	3651,5
12-24	685,7	875,6	140,68	61,33	4681,7

$$\gamma = 2,028 \text{ \$/dam}^3$$

- As seguintes observações aplicam-se a este exemplo:
  - Na presença de perdas, os  $\lambda_j$  e  $P_{T,j}$  não são mais constantes ao longo dos intervalos de tempo;
  - O fato das perdas serem produzidas apenas por  $P_{H,j}$  tem o efeito de “desvalorizar” a água: o valor de  $\gamma$  neste exemplo é menor do que no Exemplo 3 ( $\gamma = 2,28 \text{ \$/dam}^3$ ).

# Inclusão de Restrições Hidráulicas:

- Representação explícita de variáveis hidráulicas da Coord. H-T;
- Restr. de volume especificadas por intervalo;
- Consideram-se limites sobre variáveis hidráulicas.



$r_j$  : vazão afluyente para reserv. durante o interv.  $j$ ;

$q_j$  : vazão turbinada (*engolimento*) no interv.  $j$ ;

$u_j$  : taxa de vertimento no interv.  $j$ ;

$V_j$  : volume armazenado no reserv. no interv.  $j$ .

# Balanço Hídrico:

- Ainda supondo  $H \approx \text{cte.} \Rightarrow q_j = q(P_{H,j})$ , temos:

$$V_j = V_{j-1} + (r_j - q_j - u_j) h_j$$

# Balço Hídrico:

- Ainda supondo  $H \approx cte. \Rightarrow q_j = q(P_{H,j})$ , temos:

$$V_j = V_{j-1} + (r_j - q_j - u_j) h_j$$

- Formulação do Problema considerando balanço hídrico:

$$\min F_T = \sum_{j=1}^{j_{\max}} h_j F(P_{T,j})$$

sujeito a:

$$\left. \begin{array}{l} P_{L,j} + P_{perdas,j} - P_{T,j} - P_{H,j} = 0 \\ V_j - V_{j-1} - (r_j - q_j - u_j) h_j = 0 \\ \underline{V} \leq V_j \leq \bar{V} \\ \underline{P}_T \leq P_{T,j} \leq \bar{P}_T \\ \underline{P}_H \leq P_{H,j} \leq \bar{P}_H \\ 0 \leq u_j \end{array} \right\}, \quad j = 1, \dots, j_{\max}$$

- ① Restrição de balanço hídrico (*RBH*) é versão mais detalhada da restrição de volume única (*RVU*) da abordagem anterior;

- 1 Restrição de balanço hídrico (*RBH*) é versão mais detalhada da restrição de volume única (*RVU*) da abordagem anterior;
- 2 Volume inicial  $V_0$  deve ser especificado;

- 1 Restrição de balanço hídrico (*RBH*) é versão mais detalhada da restrição de volume única (*RVU*) da abordagem anterior;
- 2 Volume inicial  $V_0$  deve ser especificado;
- 3 Se volume final  $V_{j_{\max}}$  também for especificado, *RBH* e *RVU* são essencialmente equivalentes, com a diferença que *RBH* permite levar em conta limites sobre cada  $V_j$ ;

- 1 Restrição de balanço hídrico (*RBH*) é versão mais detalhada da restrição de volume única (*RVU*) da abordagem anterior;
- 2 Volume inicial  $V_0$  deve ser especificado;
- 3 Se volume final  $V_{j_{\max}}$  também for especificado, *RBH* e *RVU* são essencialmente equivalentes, com a diferença que *RBH* permite levar em conta limites sobre cada  $V_j$ ;
- 4 Não-negatividade sobre os vertimentos é necessária.

# Função Lagrangeana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_{j=1}^{j_{\max}} F(P_{T,j}) h_j + \sum_{j=1}^{j_{\max}} \lambda_j (P_{L,j} + P_{perdas,j} - P_{H,j} - P_{T,j}) + \\ & \sum_{j=1}^{j_{\max}} \gamma_j [V_j - V_{j-1} - (r_j - q_j - u_j) h_j] + \\ & \sum_{j=1}^{j_{\max}} [\underline{\alpha}_j (\underline{V} - V_j) + \bar{\alpha}_j (V_j - \bar{V})] + \\ & \sum_{j=1}^{j_{\max}} [\underline{\pi}_{T,j} (\underline{P}_T - P_{T,j}) + \bar{\pi}_{T,j} (P_{T,j} - \bar{P}_T)] + \\ & \sum_{j=1}^{j_{\max}} [\underline{\pi}_{H,j} (\underline{P}_H - P_{H,j}) + \bar{\pi}_{H,j} (P_{H,j} - \bar{P}_H)] + \sum_{j=1}^{j_{\max}} \pi_{u,j} u_j \end{aligned}$$

Por simplicidade, será desconsiderado o vertimento:

$$u_j = 0, j = 1, \dots, j_{\max}$$

# Condições de Otimalidade:

- As condições de factibilidade dual são:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{T,k}} = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{H,k}} = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_k} = 0$$

# Condições de Otimalidade:

- As condições de factibilidade dual são:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{T,k}} = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{H,k}} = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_k} = 0$$

- cuja aplicação fornece:

$$\left. \begin{aligned} h_k \frac{dF(P_{T,k})}{dP_{T,k}} - \lambda_k \left( 1 - \frac{\partial P_{perdas,k}}{\partial P_{T,k}} \right) - \underline{\pi}_{T,k} + \bar{\pi}_{T,k} &= 0 \\ \gamma_k h_k \frac{dq(P_{H,k})}{dP_{H,k}} - \lambda_k \left( 1 - \frac{\partial P_{perdas,k}}{\partial P_{H,k}} \right) - \underline{\pi}_{H,k} + \bar{\pi}_{H,k} &= 0 \\ \gamma_j - \gamma_{j+1} - \underline{\alpha}_j + \bar{\alpha}_j &= 0 \end{aligned} \right\} j = 1, \dots, j_{\max}$$

## Análise das condições de otimalidade ( $\partial\mathcal{L}/\partial V_k = 0$ ) - I:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial V_k} = \gamma_j - \gamma_{j+1} - \underline{\alpha}_j + \bar{\alpha}_j = 0 \quad (*)$$

- Limite de volume não atingido em nenhum intervalo:

## Análise das condições de otimalidade ( $\partial\mathcal{L}/\partial V_k = 0$ ) - I:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial V_k} = \gamma_j - \gamma_{j+1} - \underline{\alpha}_j + \bar{\alpha}_j = 0 \quad (*)$$

- Limite de volume não atingido em nenhum intervalo:
  - Pelas condições de folga complementar:

$$\underline{\alpha}_j = \bar{\alpha}_j = 0$$

# Análise das condições de otimalidade ( $\partial\mathcal{L}/\partial V_k = 0$ ) - I:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial V_k} = \gamma_j - \gamma_{j+1} - \underline{\alpha}_j + \bar{\alpha}_j = 0 \quad (\star)$$

- Limite de volume não atingido em nenhum intervalo:
  - Pelas condições de folga complementar:

$$\underline{\alpha}_j = \bar{\alpha}_j = 0$$

- portanto, de ( $\star$ ):

$$\gamma_j = \gamma_{j+1}, \quad j = 1, \dots, j_{\max} - 1$$

# Análise das condições de otimalidade ( $\partial\mathcal{L}/\partial V_k = 0$ ) - I:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial V_k} = \gamma_j - \gamma_{j+1} - \underline{\alpha}_j + \bar{\alpha}_j = 0 \quad (\star)$$

- Limite de volume não atingido em nenhum intervalo:
  - Pelas condições de folga complementar:

$$\underline{\alpha}_j = \bar{\alpha}_j = 0$$

- portanto, de ( $\star$ ):

$$\gamma_j = \gamma_{j+1}, \quad j = 1, \dots, j_{\max} - 1$$

- *Conclusão*: valor da água  $\gamma$  constante ao longo de todo o horizonte de tempo.

## Análise das condições de otimalidade ( $\partial\mathcal{L}/\partial V_k = 0$ ) - II:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial V_k} = \gamma_j - \gamma_{j+1} - \underline{\alpha}_j + \bar{\alpha}_j = 0 \quad (*)$$

- Lim. superior de volume atingido no interv.  $k$  apenas:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial V_k} = \gamma_j - \gamma_{j+1} - \underline{\alpha}_j + \bar{\alpha}_j = 0 \quad (\star)$$

- Lim. superior de volume atingido no interv.  $k$  apenas:
  - Usando Eq ( $\star$ ):

$$\gamma_k = \gamma_{k+1} - \bar{\alpha}_k$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial V_k} = \gamma_j - \gamma_{j+1} - \underline{\alpha}_j + \bar{\alpha}_j = 0 \quad (\star)$$

- Lim. superior de volume atingido no interv.  $k$  apenas:

- Usando Eq ( $\star$ ):

$$\gamma_k = \gamma_{k+1} - \bar{\alpha}_k$$

- Como  $\bar{\alpha}_k > 0$ , então  $\gamma_k < \gamma_{k+1}$ .

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial V_k} = \gamma_j - \gamma_{j+1} - \underline{\alpha}_j + \bar{\alpha}_j = 0 \quad (\star)$$

- Lim. superior de volume atingido no interv.  $k$  apenas:

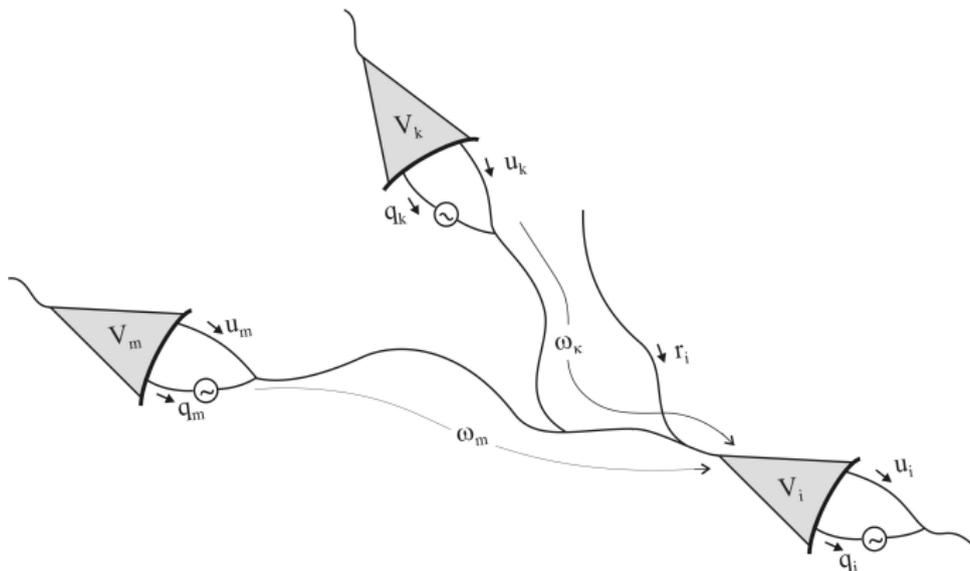
- Usando Eq ( $\star$ ):

$$\gamma_k = \gamma_{k+1} - \bar{\alpha}_k$$

- Como  $\bar{\alpha}_k > 0$ , então  $\gamma_k < \gamma_{k+1}$ .
- **Conclusão:** maior oferta de água intervalo  $k \Rightarrow$  (valor da água no interv.  $k$ )  $<$  (valor da água no interv.  $k + 1$ ).

# Programação de Curto Prazo em Sistemas Reais:

Reservatórios em cascata:



- Balanço hídrico para reserv.  $i$ :

$$V_{i,j+1} = V_{i,j} + h_j r_{i,j} - h_j (q_{i,j} + u_{i,j}) + \sum_{\ell \in \Omega_i} h_j (q_{\ell,j-\omega_\ell} + u_{\ell,j-\omega_\ell})$$

# Potência Ativa em função de $q$ e $H$ - I:

- Potência ativa produzida por uma usina hidráulica:

$$P_{H_{i,j}} = K_i \eta_i H_{l_i} q_{i,j}$$

onde

- $P_{H_{i,j}}$  : potência ativa gerada pela usina  $i$  no intervalo  $j$  (MW);
- $H_{l_i}$  : altura líquida de queda da usina  $i$  (m);
- $q_{i,j}$  : vazão turbinada pela usina  $i$  no intervalo  $j$  ( $m^3/s$ );
- $\eta_i$  : rendimento do conjunto turbina-gerador da usina  $i$ .
- $K_i$  : constante que depende do sist. de unidades,  $\rho$  e  $g$ , onde:
  - $\rho$  : densidade da água ( $kg/m^3$ );
  - $g$  : aceleração da gravidade ( $m/s^2$ );

# Potência Ativa em função de $q$ e $H$ - I:

- Potência ativa produzida por uma usina hidráulica:

$$P_{H_{i,j}} = K_i \eta_i H_{l_i} q_{i,j}$$

onde

- $P_{H_{i,j}}$ : potência ativa gerada pela usina  $i$  no intervalo  $j$  (MW);
- $H_{l_i}$ : altura líquida de queda da usina  $i$  (m);
- $q_{i,j}$ : vazão turbinada pela usina  $i$  no intervalo  $j$  ( $m^3/s$ );
- $\eta_i$ : rendimento do conjunto turbina-gerador da usina  $i$ .
- $K_i$ : constante que depende do sist. de unidades,  $\rho$  e  $g$ , onde:
  - $\rho$ : densidade da água ( $kg/m^3$ );
  - $g$ : aceleração da gravidade ( $m/s^2$ );

- Altura de queda líquida é dada pela diferença entre a altura de queda bruta e as perdas devidas ao atrito da água:

$$H_{l_i} = H_v(V_{i,j}) - H_w(q_{i,j} + u_{i,j}) - p c_i$$

## Potência Ativa em função de $q$ e $H$ - II:

- Define-se a *vazão defluente* como:

$$w_{i,j} \triangleq q_{i,j} + u_{i,j}$$

## Potência Ativa em função de $q$ e $H$ - II:

- Define-se a *vazão defluente* como:

$$w_{i,j} \stackrel{\Delta}{=} q_{i,j} + u_{i,j}$$

- Relações entre a *altura a montante e volume*, e *altura a juzante e vazão defluente*:

$$\begin{aligned} H_v(V) &= a_0 + a_1 V + a_2 V^2 + a_3 V^3 + a_4 V^4 \\ H_w(w) &= c_0 + c_1 w + c_2 w^2 + c_3 w^3 + c_4 w^4 \end{aligned}$$

## Potência Ativa em função de $q$ e $H$ - II:

- Define-se a *vazão defluente* como:

$$w_{i,j} \stackrel{\Delta}{=} q_{i,j} + u_{i,j}$$

- Relações entre a *altura a montante e volume*, e *altura a juzante e vazão defluente*:

$$\begin{aligned} H_v(V) &= a_0 + a_1 V + a_2 V^2 + a_3 V^3 + a_4 V^4 \\ H_w(w) &= c_0 + c_1 w + c_2 w^2 + c_3 w^3 + c_4 w^4 \end{aligned}$$

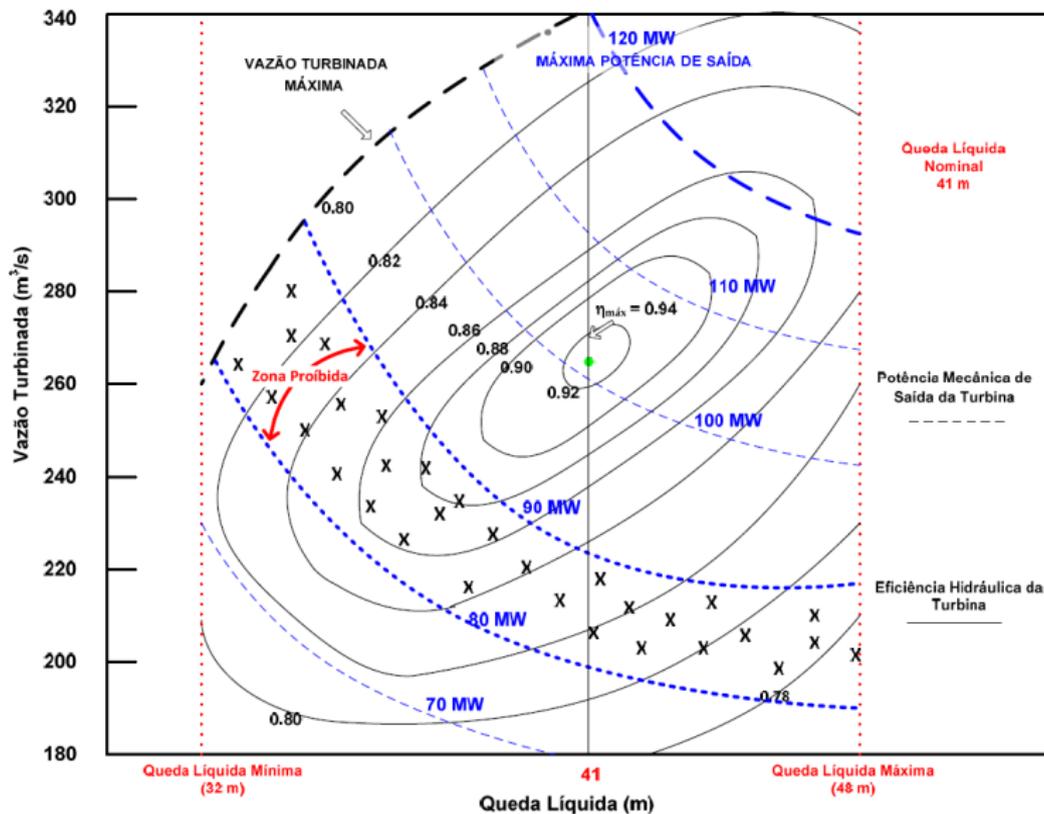
- Finalmente, devem ser considerados os limites das variáveis hidráulicas:

$$\begin{aligned} \underline{V}_i &\leq V_{i,j} \leq \overline{V}_i \\ \underline{q}_j &\leq q_{i,j} \leq \overline{q}_j \\ 0 &\leq u_{i,j} \end{aligned}$$

# Variação do Rendimento: curvas-colina

- Em estudos mais detalhados, é importante levar em conta também as variações do rendimento da turbina hidráulica em função
  - da vazão turbinada e
  - da altura de queda líquida.
- Verifica-se que podem ocorrer variações significativas de rendimento quando  $q$  e  $h$  variam;
- Estes efeitos podem ser considerados a partir das chamadas *curvas-colina*;
- Há ainda a possibilidade da ocorrência de *zonas proibidas* (regiões onde a unidade não deve operar por conta de
  - cavitação,
  - vibrações mecânicas,
  - oscilações de pressão no tubo de sucção, etc.

# Exemplo de Curva-Colina



# Formulação da Programação H-T com detalhamento das variáveis hidráulicas

$$\min F_T = \sum_{j=1}^{j_{\max}} h_j F(P_{T,j})$$

s. a:

$$\left. \begin{aligned} P_{L,j} + P_{perdas,j} - P_{T,j} - P_{H,j} &= 0 \\ V_{i,j+1} &= V_{i,j} + h_j(r_{i,j} - w_{i,j}) + \sum_{\ell \in \Omega_i} h_j w_{\ell,j} - \omega_{\ell}, \\ &\quad i = 1, n_H \\ \underline{V} &\leq V_j \leq \bar{V} \\ \underline{P}_T &\leq P_{T,j} \leq \bar{P}_T \\ \underline{q}_H &\leq q_{H,j} \leq \bar{q}_H \\ &0 \leq u_j \end{aligned} \right\}, j = 1, \dots, j_{\max}$$

com:

$$P_{H_{i,j}} = K_i H_v(V_{i,j}) - H_w(q_{i,j} + u_{i,j}) - p_{c_i} q_{i,j}$$

$V_0$  e  $V_{j_{\max}}$  especificados.