

# Fluxo de Potência Ótimo

Antonio Simões Costa

GSP - Labspot

- Formulação generalística para diversos problemas de otimização da operação de Sistemas de Energia Elétrica;
- Características:
  - Formulado como um *problema de otimização*, cuja função-objetivo pode assumir diferentes formas;
  - *Rede elétrica é sempre explicitamente representada.*

# Duas Formas Equivalentes para se Interpretar o FPO:

- 1 Como uma generalização do Despacho Econômico Clássico para permitir a representação explícita da rede elétrica;
- 2 Como uma generalização de Fluxo de Potência convencional visando promover a otimização de variáveis de controle, tais como as potências geradas.

- Despacho Econômico:

- Balanço geração-carga expresso como uma única *restrição de igualdade*:

$$P_L + P_{perdas} - \sum P_{g,i} = 0$$

- Restrições de desigualdade são os limites físicos de geração:

$$\underline{P}_{g,i} \leq P_{g,i} \leq \overline{P}_{g,i}$$

- Fluxo de Potência Ótimo:

- *Restrições de igualdade*: Eqs. de balanço de potência expressas no nível de barra (1a. Lei de Kirchhoff);
- *Rede representada como em estudos de fluxo de potência*;
- *Restr. de desigualdade*: limites físicos de geração e transmissão, limites associados à manutenção da segurança do sistema.

# FPO como Generalização do Fluxo de Potência

- Fluxo de Potência:

- Potências ativas das barras de geração ( $P_g$  's) *especificadas*, assim como cargas nas barras PQ;
- Equações da rede resolvidas para satisfazer potências especificadas.

- FPO:

- Ao invés de serem especificadas,  $P_g$  's são calculadas para *otimizar uma função-objetivo*;
- *Equações da rede* especificadas como *restrições de igualdade* a serem satisfeitas na solução;
- *Limites operativos de equipamentos* especificados como *restrições de desigualdade*, também a serem respeitados na solução.

- *Múltiplas possibilidades de funções-custo:*
  - Custos de geração;
  - Minimização de perdas;
  - Desvio de geração relativo a um ponto de operação;
  - Despacho de potência reativa;
  - Transferência de potência entre áreas;
  - Ajuste de carga para mínimo alívio de carga, etc.
- Restrições de desigualdade podem modelar outros limites operacionais:
  - Limites físicos de fluxo nos ramos;
  - Limites físicos em dispositivos de controle (taps, defasadores);
  - Limites em variáveis do sistema para garantir segurança da operação.

# Vantagens do FPO (I)

- Eqs. de fluxo de pot. resolvidas simultaneamente com minimização dos custos de geração  $\Rightarrow$  perdas incrementais exatas;
- Todos os limites podem ser incluídos, não apenas os de geração:
  - $\underline{Q} \leq Q \leq \overline{Q}$ ;
  - $\underline{V} \leq V \leq \overline{V}$ ;
  - $\underline{t}_{ij} \leq t_{ij} \leq \overline{t}_{ij}$ , etc.
- Restrições de segurança podem ser consideradas:

$$\begin{aligned}\underline{V}_k &\leq V_k \text{ com linha } i - j \text{ fora de serviço} \leq \overline{V}_k \\ \underline{t}_{ik} &\leq t_{ik} \text{ com linha } i - j \text{ fora de serviço} \leq \overline{t}_{ik}\end{aligned}$$

# Vantagens do FPO (II)

- Mais variáveis de controle do que apenas as pots. geradas:
  - Tensões de saída de geradores;
  - Taps de transformadores;
  - Taps de transformadores defasadores;
  - Ajustes de bancos de capac. chaveados;
  - Injeções de potência reativa de CERs;
  - Alívio de carga;
  - Fluxos de pot. em linhas CC.
- Possibilidade de se utilizar diferentes funções-custo.



# Aplicações do Fluxo de Potência Ótimo

- Cálculo do despacho ótimo de geração para obter mínimo custo de geração, observadas as limitações da transmissão;
- Despacho de segurança, usando estado corrente da rede ou previsão de carga a curto prazo + restrições de segurança;
- Despacho corretivo: em caso de sobrecarga, pode informar quais ajustes poderão aliviar a emergência;
- A intervalos periódicos, pode achar ajustes ótimos de taps de transformadores, capacitores chaveáveis e CERs para melhorar perfil de tensões;
- Em planejamento da expansão, pode fornecer o máximo carregamento que uma configuração de transmissão prevista pode suportar (Ex.: máxima transferência entre áreas);
- Fornece os custos incrementais *por barra*  $\Rightarrow$  permite o cálculo dos custos marginais de potência em qualquer barra do sistema.

# Fluxo de Potência Ótimo: Formulação Não-Linear

$$\min \quad c(x, u)$$

s. a

$$g_P(x, u) = 0 \quad \leftarrow \quad \lambda_P$$

$$g_Q(x, u) = 0 \quad \leftarrow \quad \lambda_Q$$

$$\underline{p}_g \leq p_g \leq \bar{p}_g$$

$$\underline{q}_g \leq q_g \leq \bar{q}_g$$

$$\underline{v} \leq v \leq \bar{v}$$

$$\underline{t} \leq t \leq \bar{t}$$

onde:

$x$  : Variáveis de estado ( $v, \theta$ )

$u$  : Variáveis de controle

$p_g$  : Potências ativas geradas

$q_g$  : Potências reativas geradas

$v$  : Magnitudes de tensão

$t$  : Fluxos de potência ativa nos ramos

# Interpretação dos Multiplicadores de Lagrange para o FPO Não-Linear

- Na formulação não-linear do FPO, surgem  $2N$  multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade, sendo:

# Interpretação dos Multiplicadores de Lagrange para o FPO Não-Linear

- Na formulação não-linear do FPO, surgem  $2N$  multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade, sendo:
  - $N$  multiplicadores de Lagrange associados ao balanço de potência ativa em cada barra,  $\lambda_P$  e

# Interpretação dos Multiplicadores de Lagrange para o FPO Não-Linear

- Na formulação não-linear do FPO, surgem  $2N$  multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade, sendo:
  - $N$  multiplicadores de Lagrange associados ao balanço de potência ativa em cada barra,  $\lambda_P$  e
  - $N$  multiplicadores de Lagrange associados às equações nodais de balanço de potência reativa,  $\lambda_Q$ .

# Interpretação dos Multiplicadores de Lagrange para o FPO Não-Linear

- Na formulação não-linear do FPO, surgem  $2N$  multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade, sendo:
  - $N$  multiplicadores de Lagrange associados ao balanço de potência ativa em cada barra,  $\lambda_P$  e
  - $N$  multiplicadores de Lagrange associados às equações nodais de balanço de potência reativa,  $\lambda_Q$ .
- O elemento  $k$  do vetor  $\lambda_P$ ,  $\lambda_{P,k}$ , é o custo do próximo megawatt a ser extraído da barra  $k \implies$  *custo marginal (da potência ativa) para a barra  $k$* ;

# Interpretação dos Multiplicadores de Lagrange para o FPO Não-Linear

- Na formulação não-linear do FPO, surgem  $2N$  multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade, sendo:
  - $N$  multiplicadores de Lagrange associados ao balanço de potência ativa em cada barra,  $\lambda_P$  e
  - $N$  multiplicadores de Lagrange associados às equações nodais de balanço de potência reativa,  $\lambda_Q$ .
- O elemento  $k$  do vetor  $\lambda_P$ ,  $\lambda_{P,k}$ , é o custo do próximo megawatt a ser extraído da barra  $k \implies$  *custo marginal (da potência ativa) para a barra  $k$* ;
- Da mesma forma,  $\lambda_{Q,k}$  representa o aumento na função-custo decorrente de um aumento de 1 *MVar* na carga reativa da barra  $k$ ;

# Interpretação dos Multiplicadores de Lagrange para o FPO Não-Linear

- Na formulação não-linear do FPO, surgem  $2N$  multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade, sendo:
  - $N$  multiplicadores de Lagrange associados ao balanço de potência ativa em cada barra,  $\lambda_P$  e
  - $N$  multiplicadores de Lagrange associados às equações nodais de balanço de potência reativa,  $\lambda_Q$ .
- O elemento  $k$  do vetor  $\lambda_P$ ,  $\lambda_{P,k}$ , é o custo do próximo megawatt a ser extraído da barra  $k \implies$  *custo marginal (da potência ativa) para a barra  $k$* ;
- Da mesma forma,  $\lambda_{Q,k}$  representa o aumento na função-custo decorrente de um aumento de 1 *MVar* na carga reativa da barra  $k$ ;
- O FPO baseado na formulação não-linear é um problema de programação não-linear com restrições não-lineares, cuja solução pode ser obtida através de métodos computacionais específicos.



# FPO usando Modelo Linearizado para a Rede

## Fluxo de Potência “DC” (I)

- Hipóteses básicas:

- Os módulos das tensões são supostos iguais a  $1,0 \text{ pu}$  para todas as barras, isto é:

$$|V_i| = 1,0 \text{ pu}, i = 1, \dots, N$$

- As resistências e admitâncias transversais das linhas de transmissão são desprezadas;
- As aberturas angulares correspondentes aos ramos da rede são supostas pequenas, de modo que

$$\sin(\theta_i - \theta_j) \approx (\theta_i - \theta_j) \text{ rads}$$

# FPO usando Modelo Linearizado para a Rede

## Fluxo de Potência “DC” (II)

- Com estas hipóteses, o fluxo de potência ativa  $t_{ij}$  na linha  $i - j$  é dado por

$$t_{ij} = \gamma_{ij} (\theta_i - \theta_j)$$

onde a *capacidade do ramo*  $i - j$  é definida como

$$\gamma_{ij} \triangleq \frac{1}{x_{ij}}$$

# FPO usando Modelo Linearizado para a Rede

## Fluxo de Potência “DC” (II)

- Com estas hipóteses, o fluxo de potência ativa  $t_{ij}$  na linha  $i - j$  é dado por

$$t_{ij} = \gamma_{ij} (\theta_i - \theta_j)$$

onde a *capacidade do ramo*  $i - j$  é definida como

$$\gamma_{ij} \triangleq \frac{1}{x_{ij}}$$

- A injeção líquida de potência ativa na barra  $i$  é dada por:

$$p_i = \sum_{k \in \Omega_i} t_{ik}$$

onde  $\Omega_i$  representa o conjunto de barras adjacentes à barra  $i$ ;

# FPO usando Modelo Linearizado para a Rede

## Fluxo de Potência “DC” (II)

- Com estas hipóteses, o fluxo de potência ativa  $t_{ij}$  na linha  $i - j$  é dado por

$$t_{ij} = \gamma_{ij} (\theta_i - \theta_j)$$

onde a *capacidade do ramo*  $i - j$  é definida como

$$\gamma_{ij} \triangleq \frac{1}{x_{ij}}$$

- A injeção líquida de potência ativa na barra  $i$  é dada por:

$$p_i = \sum_{k \in \Omega_i} t_{ik}$$

onde  $\Omega_i$  representa o conjunto de barras adjacentes à barra  $i$ ;

- A injeção  $p_i$  pode ser reescrita como:

$$p_i = \sum_{k \in \Omega_i} \gamma_{ik} (\theta_i - \theta_k) = \sum_{k \in \Omega_i} \gamma_{ik} \theta_i - \sum_{k \in \Omega_i} \gamma_{ik} \theta_k$$

# FPO usando Modelo Linearizado para a Rede

## Fluxo de Potência “DC” (III)

- A injeção  $p_i$  é dada por:

$$p_i = \sum_{k \in \Omega_i} \gamma_{ik} (\theta_i - \theta_k) = \sum_{k \in \Omega_i} \gamma_{ik} \theta_i - \sum_{k \in \Omega_i} \gamma_{ik} \theta_k$$

# FPO usando Modelo Linearizado para a Rede

## Fluxo de Potência “DC” (III)

- A injeção  $p_i$  é dada por:

$$p_i = \sum_{k \in \Omega_i} \gamma_{ik} (\theta_i - \theta_k) = \sum_{k \in \Omega_i} \gamma_{ik} \theta_i - \sum_{k \in \Omega_i} \gamma_{ik} \theta_k$$

- Definindo a *matriz  $\mathbf{B}$  do fluxo de potência linearizado* como:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sum_{k \in \Omega_1} \gamma_{1k} & -\gamma_{12} & -\gamma_{13} & \cdots & -\gamma_{1N} \\ -\gamma_{21} & \sum_{k \in \Omega_2} \gamma_{2k} & -\gamma_{23} & \cdots & -\gamma_{2N} \\ -\gamma_{31} & -\gamma_{32} & \sum_{k \in \Omega_3} \gamma_{3k} & \cdots & -\gamma_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\gamma_{N1} & -\gamma_{N2} & -\gamma_{N3} & \cdots & \sum_{k \in \Omega_N} \gamma_{Nk} \end{bmatrix},$$

# FPO usando Modelo Linearizado para a Rede

## Fluxo de Potência “DC” (III)

- A injeção  $p_i$  é dada por:

$$p_i = \sum_{k \in \Omega_i} \gamma_{ik} (\theta_i - \theta_k) = \sum_{k \in \Omega_i} \gamma_{ik} \theta_i - \sum_{k \in \Omega_i} \gamma_{ik} \theta_k$$

- Definindo a *matriz  $\mathbf{B}$  do fluxo de potência linearizado* como:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sum_{k \in \Omega_1} \gamma_{1k} & -\gamma_{12} & -\gamma_{13} & \cdots & -\gamma_{1N} \\ -\gamma_{21} & \sum_{k \in \Omega_2} \gamma_{2k} & -\gamma_{23} & \cdots & -\gamma_{2N} \\ -\gamma_{31} & -\gamma_{32} & \sum_{k \in \Omega_3} \gamma_{3k} & \cdots & -\gamma_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\gamma_{N1} & -\gamma_{N2} & -\gamma_{N3} & \cdots & \sum_{k \in \Omega_N} \gamma_{Nk} \end{bmatrix},$$

- verifica-se que

$$p_i = B_{ii} \theta_i + \sum_{k \in \Omega_i} B_{ik} \theta_k$$

# FPO usando Modelo Linearizado para a Rede

## Fluxo de Potência “DC” (IV)

- A expressão

$$p_i = B_{ii} \theta_i + \sum_{k \in \Omega_i} B_{ik} \theta_k$$

- pode ser escrita na forma matricial como:

$$\mathbf{p} = \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}$$

- A estrutura da matriz  $\mathbf{B}$  é muito similar à da matriz  $\mathbf{Y}_{barra}$  (exceto pelo fato de  $\mathbf{B}$  ser real!);



# FPO usando Modelo Linearizado para a Rede

## Fluxo de Potência “DC” (IV)

- A expressão

$$p_i = B_{ii} \theta_i + \sum_{k \in \Omega_i} B_{ik} \theta_k$$

- pode ser escrita na forma matricial como:

$$\mathbf{p} = \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}$$

- A estrutura da matriz  $\mathbf{B}$  é muito similar à da matriz  $\mathbf{Y}_{barra}$  (exceto pelo fato de  $\mathbf{B}$  ser real!);
- Além disso:

$$\sum_{j=1}^N B_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, N$$
$$\sum_{i=1}^N B_{ij} = 0, \quad j = 1, \dots, N$$

# FPO usando Modelo Linearizado para a Rede

## Fluxo de Potência “DC” (IV)

- A expressão

$$p_i = B_{ii} \theta_i + \sum_{k \in \Omega_i} B_{ik} \theta_k$$

- pode ser escrita na forma matricial como:

$$\mathbf{p} = \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}$$

- A estrutura da matriz  $\mathbf{B}$  é muito similar à da matriz  $\mathbf{Y}_{barra}$  (exceto pelo fato de  $\mathbf{B}$  ser real!);
- Além disso:

$$\sum_{j=1}^N B_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, N$$
$$\sum_{i=1}^N B_{ij} = 0, \quad j = 1, \dots, N$$

- Portanto,  $\mathbf{B}$  é singular.

# Singularidade de $B$ e Barra de Referência (I)

- $B$  singular implica em que

# Singularidade de $\mathbf{B}$ e Barra de Referência (I)

- $\mathbf{B}$  singular implica em que
  - Equações em  $\mathbf{p} = \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}$  são linearmente dependentes;

# Singularidade de $\mathbf{B}$ e Barra de Referência (I)

- $\mathbf{B}$  singular implica em que
  - Equações em  $\mathbf{p} = \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}$  são linearmente dependentes;
  - Portanto, não se qualificam para definir restrições de igualdade do problema de FPO.

# Singularidade de $\mathbf{B}$ e Barra de Referência (I)

- $\mathbf{B}$  singular implica em que
  - Equações em  $\mathbf{p} = \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}$  são linearmente dependentes;
  - Portanto, não se qualificam para definir restrições de igualdade do problema de FPO.
- Eliminação da redundância obtida definindo-se uma barra  $r$  cujo ângulo é considerado referência angular:

$$\theta_r = 0$$

# Singularidade de $\mathbf{B}$ e Barra de Referência (I)

- $\mathbf{B}$  singular implica em que
  - Equações em  $\mathbf{p} = \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}$  são linearmente dependentes;
  - Portanto, não se qualificam para definir restrições de igualdade do problema de FPO.
- Eliminação da redundância obtida definindo-se uma barra  $r$  cujo ângulo é considerado referência angular:

$$\theta_r = 0$$

- Isto implica em se eliminar a coluna  $r$  da matriz  $\mathbf{B}$  (todos os elementos da coluna serão multiplicados por zero).

# Singularidade de B e Barra de Referência (II)

- Definimos:



# Singularidade de $\mathbf{B}$ e Barra de Referência (II)

- Definimos:
  - $\hat{\mathbf{B}}$  como a matriz  $N \times (N - 1)$  obtida de  $\mathbf{B}$  eliminando-se a coluna  $r$ , e

# Singularidade de B e Barra de Referência (II)

- Definimos:

- $\hat{\mathbf{B}}$  como a matriz  $N \times (N - 1)$  obtida de  $\mathbf{B}$  eliminando-se a coluna  $r$ , e
- $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  como o vetor  $N \times 1$  obtido de  $\boldsymbol{\theta}$  pela eliminando-se o elemento  $r$ .

## Singularidade de B e Barra de Referência (II)

- Definimos:
  - $\hat{\mathbf{B}}$  como a matriz  $N \times (N - 1)$  obtida de  $\mathbf{B}$  eliminando-se a coluna  $r$ , e
  - $\hat{\theta}$  como o vetor  $N \times 1$  obtido de  $\theta$  pela eliminando-se o elemento  $r$ .
- O conjunto de  $N$  equações não-redundantes de potências injetadas nas barras é dado por:

$$\hat{\mathbf{B}} \hat{\theta} = \mathbf{p}$$

# Restrições de Balanço de Potência Ativa (I)

- Para  $\hat{\mathbf{B}}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{p}$  se qualificar como restrição de balanço de potência ativa para o FPO,  $\mathbf{p}$  tem que ser expresso como função das *potências geradas* e das *potências das cargas* nas barras;

# Restrições de Balanço de Potência Ativa (I)

- Para  $\hat{\mathbf{B}}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{p}$  se qualificar como restrição de balanço de potência ativa para o FPO,  $\mathbf{p}$  tem que ser expresso como função das *potências geradas* e das *potências das cargas* nas barras;
- *Potências geradas*:

# Restrições de Balanço de Potência Ativa (I)

- Para  $\hat{\mathbf{B}}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{p}$  se qualificar como restrição de balanço de potência ativa para o FPO,  $\mathbf{p}$  tem que ser expresso como função das *potências geradas* e das *potências das cargas* nas barras;
- *Potências geradas*:
  - Seja  $\mathbf{p}_g \triangleq [p_{g_1}, p_{g_2}, \dots, p_{g_{n_g}}]^T$  o vetor potências ativas geradas (nas barras de geração);

# Restrições de Balanço de Potência Ativa (I)

- Para  $\hat{\mathbf{B}}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{p}$  se qualificar como restrição de balanço de potência ativa para o FPO,  $\mathbf{p}$  tem que ser expresso como função das *potências geradas* e das *potências das cargas* nas barras;
- *Potências geradas*:
  - Seja  $\mathbf{p}_g \triangleq [p_{g_1}, p_{g_2}, \dots, p_{g_{n_g}}]^T$  o vetor potências ativas geradas (nas barras de geração);
  - Seja a *matriz de incidência barras-geradores*,  $\mathbf{A}_g (N \times n_g)$ , definida por:

$$\mathbf{A}_g(i, j) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{se o gerador } j \text{ está conectado à barra } i; \\ 0, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

# Restrições de Balanço de Potência Ativa (I)

- Para  $\hat{\mathbf{B}}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{p}$  se qualificar como restrição de balanço de potência ativa para o FPO,  $\mathbf{p}$  tem que ser expresso como função das *potências geradas* e das *potências das cargas* nas barras;
- *Potências geradas*:

- Seja  $\mathbf{p}_g \triangleq [p_{g_1}, p_{g_2}, \dots, p_{g_{n_g}}]^T$  o vetor potências ativas geradas (nas barras de geração);
- Seja a *matriz de incidência barras-geradores*,  $\mathbf{A}_g (N \times n_g)$ , definida por:

$$\mathbf{A}_g(i, j) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{se o gerador } j \text{ está conectado à barra } i; \\ 0, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

- O vetor  $\mathbf{A}_g \mathbf{p}_g$  “aloca” as potências ativas geradas sobre as  $N$  barras da rede.



# Restrições de Balanço de Potência Ativa (II)

- *Potências das cargas:* seja

$$\mathbf{p}_L = [p_{L_1}, p_{L_2}, \dots, p_{L_N}]^T$$

o vetor  $N \times 1$  das cargas ativas nas barras do sistema;

# Restrições de Balanço de Potência Ativa (II)

- *Potências das cargas:* seja

$$\mathbf{p}_L = [p_{L_1}, p_{L_2}, \dots, p_{L_N}]^T$$

o vetor  $N \times 1$  das cargas ativas nas barras do sistema;

- Com estas definições, vemos que

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}_g \mathbf{p}_g - \mathbf{p}_L$$

# Restrições de Balanço de Potência Ativa (II)

- *Potências das cargas*: seja

$$\mathbf{p}_L = [p_{L_1}, p_{L_2}, \dots, p_{L_N}]^T$$

o vetor  $N \times 1$  das cargas ativas nas barras do sistema;

- Com estas definições, vemos que

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}_g \mathbf{p}_g - \mathbf{p}_L$$

- Portanto, de

$$\hat{\mathbf{B}} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{p}$$

podemos agora escrever a *equação de restrições de balanço de potência ativa* para o problema de FPO linearizado:

$$-\hat{\mathbf{B}} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{A}_g \mathbf{p}_g = \mathbf{p}_L$$

# Restrições de Limite de Geração

- Os limites máximo e mínimo sobre as potências geradas devem ser considerados como restrições de desigualdade do problema de FPO;

# Restrições de Limite de Geração

- Os limites máximo e mínimo sobre as potências geradas devem ser considerados como restrições de desigualdade do problema de FPO;
- Sejam  $\bar{\mathbf{p}}_g$  e  $\underline{\mathbf{p}}_g$  os vetores que contêm os limites máximos e mínimos de potência gerada para cada gerador do sistema;

# Restrições de Limite de Geração

- Os limites máximo e mínimo sobre as potências geradas devem ser considerados como restrições de desigualdade do problema de FPO;
- Sejam  $\bar{\mathbf{p}}_g$  e  $\underline{\mathbf{p}}_g$  os vetores que contêm os limites máximos e mínimos de potência gerada para cada gerador do sistema;
- As restrições de limite geração são portanto dadas por:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_g - \bar{\mathbf{p}}_g &\leq \mathbf{0} \\ -\mathbf{p}_g + \underline{\mathbf{p}}_g &\leq \mathbf{0}\end{aligned}$$

# Restrições de Limite de Fluxo nos Ramos (I)

- Sejam  $\bar{t}_{ij}$  e  $\underline{t}_{ij}$  os limites máximo e mínimo de fluxo de potência no ramo  $i - j$ ;

# Restrições de Limite de Fluxo nos Ramos (I)

- Sejam  $\bar{t}_{ij}$  e  $\underline{t}_{ij}$  os limites máximo e mínimo de fluxo de potência no ramo  $i - j$ ;
- Na prática,  $\underline{t}_{ij} = -\bar{t}_{ij}$ , já que o fluxo pode ocorrer em ambos os sentidos sobre o ramo  $i - j$ ;



# Restrições de Limite de Fluxo nos Ramos (I)

- Sejam  $\bar{t}_{ij}$  e  $\underline{t}_{ij}$  os limites máximo e mínimo de fluxo de potência no ramo  $i - j$ ;
- Na prática,  $\underline{t}_{ij} = -\bar{t}_{ij}$ , já que o fluxo pode ocorrer em ambos os sentidos sobre o ramo  $i - j$ ;
- Restrições de fluxo para o ramo  $i - j$ :

$$\underline{t}_{ij} \leq t_{ij} \leq \bar{t}_{ij}$$

# Restrições de Limite de Fluxo nos Ramos (I)

- Sejam  $\bar{t}_{ij}$  e  $\underline{t}_{ij}$  os limites máximo e mínimo de fluxo de potência no ramo  $i - j$ ;
- Na prática,  $\underline{t}_{ij} = -\bar{t}_{ij}$ , já que o fluxo pode ocorrer em ambos os sentidos sobre o ramo  $i - j$ ;
- Restrições de fluxo para o ramo  $i - j$  :

$$\underline{t}_{ij} \leq t_{ij} \leq \bar{t}_{ij}$$

- ou, em termos das variáveis de estado:

$$\underline{t}_{ij} \leq \gamma_{ij} (\theta_i - \theta_j) \leq \bar{t}_{ij}$$

# Restrições de Limite de Fluxo nos Ramos (I)

- Sejam  $\bar{t}_{ij}$  e  $\underline{t}_{ij}$  os limites máximo e mínimo de fluxo de potência no ramo  $i - j$ ;
- Na prática,  $\underline{t}_{ij} = -\bar{t}_{ij}$ , já que o fluxo pode ocorrer em ambos os sentidos sobre o ramo  $i - j$ ;
- Restrições de fluxo para o ramo  $i - j$  :

$$\underline{t}_{ij} \leq t_{ij} \leq \bar{t}_{ij}$$

- ou, em termos das variáveis de estado:

$$\underline{t}_{ij} \leq \gamma_{ij} (\theta_i - \theta_j) \leq \bar{t}_{ij}$$

- Forma escalar acima não permite representação sucinta dos limites de fluxo na formulação do FPO.

# Restrições de Limite de Fluxo nos Ramos (II)

- *Matriz de incidência ramos-barras* ( $n_\ell \times N$ ):

$$\mathbf{A}(\ell, i) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{se a barra de origem do elemento } \ell \text{ é a barra } i; \\ -1, & \text{se a barra de chegada do elemento } \ell \text{ é a barra } i; \\ 0, & \text{se o elemento } \ell \text{ não incidir na barra } i. \end{cases}$$

# Restrições de Limite de Fluxo nos Ramos (II)

- *Matriz de incidência ramos-barras* ( $n_\ell \times N$ ):

$$\mathbf{A}(\ell, i) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{se a barra de origem do elemento } \ell \text{ é a barra } i; \\ -1, & \text{se a barra de chegada do elemento } \ell \text{ é a barra } i; \\ 0, & \text{se o elemento } \ell \text{ não incidir na barra } i. \end{cases}$$

- *Matriz de incidência ramos-barras reduzida*,  $\hat{\mathbf{A}}$ : obtida de  $\mathbf{A}$  eliminando-se a coluna correspondente à barra de referência;

# Restrições de Limite de Fluxo nos Ramos (II)

- *Matriz de incidência ramos-barras* ( $n_\ell \times N$ ):

$$\mathbf{A}(\ell, i) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{se a barra de origem do elemento } \ell \text{ é a barra } i; \\ -1, & \text{se a barra de chegada do elemento } \ell \text{ é a barra } i; \\ 0, & \text{se o elemento } \ell \text{ não incidir na barra } i. \end{cases}$$

- *Matriz de incidência ramos-barras reduzida*,  $\hat{\mathbf{A}}$ : obtida de  $\mathbf{A}$  eliminando-se a coluna correspondente à barra de referência;
- *Matriz primitiva das capacidades dos ramos*:

$$\mathbf{T} \triangleq \text{diag}\{\gamma_{\ell_1}, \gamma_{\ell_2}, \dots, \gamma_{\ell_{n_\ell}}\}$$

# Restrições de Limite de Fluxo nos Ramos (II)

- *Matriz de incidência ramos-barras* ( $n_\ell \times N$ ):

$$\mathbf{A}(\ell, i) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{se a barra de origem do elemento } \ell \text{ é a barra } i; \\ -1, & \text{se a barra de chegada do elemento } \ell \text{ é a barra } i; \\ 0, & \text{se o elemento } \ell \text{ não incidir na barra } i. \end{cases}$$

- *Matriz de incidência ramos-barras reduzida*,  $\hat{\mathbf{A}}$ : obtida de  $\mathbf{A}$  eliminando-se a coluna correspondente à barra de referência;
- *Matriz primitiva das capacidades dos ramos*:

$$\mathbf{T} \triangleq \text{diag}\{\gamma_{\ell_1}, \gamma_{\ell_2}, \dots, \gamma_{\ell_{n_\ell}}\}$$

- A partir das definições acima, é fácil verificar que o vetor dos fluxos de potência ativa em todos os ramos da rede é dado por:

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \hat{\mathbf{A}} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

## Restrições de Limite de Fluxo nos Ramos (III)

- Na forma vetorial, as restrições de limites de fluxo nos ramos são portanto dadas por:

$$\underline{\mathbf{t}} \leq \mathbf{T} \hat{\mathbf{A}} \hat{\boldsymbol{\theta}} \leq \bar{\mathbf{t}}$$



# Restrições de Limite de Fluxo nos Ramos (III)

- Na forma vetorial, as restrições de limites de fluxo nos ramos são portanto dadas por:

$$\underline{t} \leq \mathbf{T} \hat{\mathbf{A}} \hat{\boldsymbol{\theta}} \leq \bar{t}$$

- Ou ainda:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \hat{\mathbf{A}} \hat{\boldsymbol{\theta}} &\leq \bar{t} \\ -\mathbf{T} \hat{\mathbf{A}} \hat{\boldsymbol{\theta}} &\leq -\underline{t} \end{aligned}$$

# Formulação Completa do FPO Linearizado

$$\text{Min} \quad c(\hat{\theta}, \mathbf{p}_g)$$

$$\text{sujeito a:} \quad -\hat{\mathbf{B}} \hat{\theta} + \mathbf{A}_g \mathbf{p}_g = \mathbf{p}_L$$

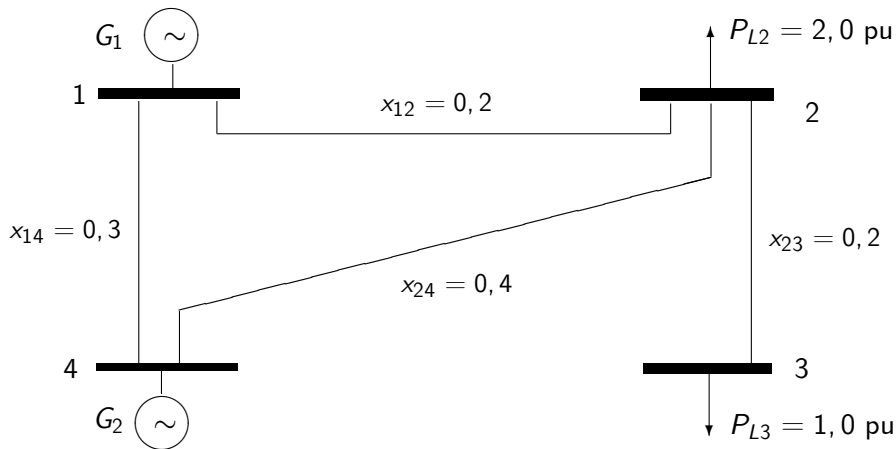
$$\mathbf{p}_g - \bar{\mathbf{p}}_g \leq \mathbf{0}$$

$$-\mathbf{p}_g + \underline{\mathbf{p}}_g \leq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{T} \hat{\mathbf{A}} \hat{\theta} - \bar{\mathbf{t}} \leq \mathbf{0}$$

$$-\mathbf{T} \hat{\mathbf{A}} \hat{\theta} + \underline{\mathbf{t}} \leq \mathbf{0}$$

# Exemplo 1: Sistema-teste



# Dados para Exemplo 1

Dados das funções-custo dos geradores:

Ger.	Curva de Custo, \$/h ( $P$ 's em pu)	$\underline{P}$ (pu)	$\bar{P}$ (pu)
$G_1$	$c_1(p_{g1}) = 100 + 792 p_{g1} + 40 p_{g1}^2$	0,5	2,0
$G_2$	$c_2(p_{g2}) = 200 + 785 p_{g2} + 96 p_{g2}^2$	0,3	1,5

As cargas são indicadas na figura e os limites dos ramos são:

Ramo	1 – 2	1 – 4	2 – 3	2 – 4
$\underline{t}$ (pu)	-7,0	-3,0	-7,0	-3,0
$\bar{t}$ (pu)	7,0	3,0	7,0	3,0

Considerando a barra 1 como barra de referência, formule o problema de FPO que minimiza os custos de geração, utilizando modelo linearizado para a rede.

# Solução (I)

As variáveis de estados e de controle são, respectivamente,

$$\mathbf{x} = \hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{p}_g = \begin{bmatrix} p_{g1} \\ p_{g2} \end{bmatrix}$$

enquanto que as matrizes  $\hat{\mathbf{B}}$  e  $\mathbf{A}_g$  e o vetor das cargas de barra são:

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -5,0 & 0,0 & -3,33 \\ 12,5 & -5,0 & -2,5 \\ -5,0 & 5,0 & 0,0 \\ -2,5 & 0,0 & 5,83 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{p}_L = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,0 \\ 1,0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

## Solução (II)

Ordenando os ramos como na tabela dos limites de fluxo, temos

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 5,0 & & & \\ & 3,33 & & \\ & & 5,0 & \\ & & & 2,5 \end{bmatrix} \text{ e } \hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e portanto os fluxos de potência ativa nos ramos podem ser obtidos como

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \hat{\mathbf{A}} \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} 5,0 (-\theta_2) \\ 3,33 (-\theta_4) \\ 5,0 (\theta_2 - \theta_3) \\ 2,5 (\theta_2 - \theta_4) \end{bmatrix}$$

# Solução (III)

$$\min \quad (100 + 792 p_{g1} + 40 p_{g1}^2) + (200 + 785 p_{g2} + 96 p_{g2}^2)$$

s. a

$$- \begin{bmatrix} -5 & 0 & -3,33 \\ 12,5 & -5 & -2,5 \\ -5 & 5 & 0 \\ -2,5 & 0 & 5,83 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{g1} \\ p_{g2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,0 \\ 1,0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_{g1} \\ p_{g2} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2,0 \\ 1,5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -p_{g1} \\ -p_{g2} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -0,5 \\ -0,3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5,0 (-\theta_2) \\ 3,33 (-\theta_4) \\ 5,0 (\theta_2 - \theta_3) \\ 2,5 (\theta_2 - \theta_4) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 7,0 \\ 3,0 \\ 7,0 \\ 3,0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -5,0 (-\theta_2) \\ -3,33 (-\theta_4) \\ -5,0 (\theta_2 - \theta_3) \\ -2,5 (\theta_2 - \theta_4) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 7,0 \\ 3,0 \\ 7,0 \\ 3,0 \end{bmatrix}$$

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (I)

Formulação do FPO baseado em modelo linear para a rede

$$\text{Min} \quad c(\hat{\theta}, \mathbf{p}_g)$$

$$\text{sujeito a:} \quad -\hat{\mathbf{B}} \hat{\theta} + \mathbf{A}_g \mathbf{p}_g = \mathbf{p}_L$$

$$\mathbf{p}_g - \bar{\mathbf{p}}_g \leq \mathbf{0}$$

$$-\mathbf{p}_g + \underline{\mathbf{p}}_g \leq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{T} \hat{\mathbf{A}} \hat{\theta} - \bar{\mathbf{t}} \leq \mathbf{0}$$

$$-\mathbf{T} \hat{\mathbf{A}} \hat{\theta} + \underline{\mathbf{t}} \leq \mathbf{0}$$



# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (II)

Função Lagrangeana para o FPO com modelo linear para a rede

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\hat{\theta}, \mathbf{p}_g, \lambda, \underline{\pi}_g, \overline{\pi}_g, \underline{\pi}_t, \overline{\pi}_t) = & c(\mathbf{p}_g) + \lambda^T (\mathbf{p}_L + \hat{\mathbf{B}} \hat{\theta} - \mathbf{A}_g \mathbf{p}_g) + \\ & \underline{\pi}_g^T (\underline{\mathbf{p}}_g - \mathbf{p}_g) + \overline{\pi}_g^T (\mathbf{p}_g - \overline{\mathbf{p}}_g) + \\ & \underline{\pi}_t^T (\underline{\mathbf{t}} - \mathbf{T} \hat{\mathbf{A}} \hat{\theta}) + \overline{\pi}_t^T (\mathbf{T} \hat{\mathbf{A}} \hat{\theta} - \overline{\mathbf{t}})\end{aligned}$$

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (III)

## Condições de Otimalidade

Factibilidade dual:

$$\nabla_{\hat{\theta}} \mathcal{L} = \hat{\mathbf{B}}^T \lambda - [\hat{\mathbf{A}}]^T \mathbf{T} \underline{\pi}_t + [\hat{\mathbf{A}}]^T \mathbf{T} \overline{\pi}_t = \mathbf{0}$$

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} \mathcal{L} = \nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) - \mathbf{A}_g^T \lambda - \underline{\pi}_g + \overline{\pi}_g = \mathbf{0}$$

Factibilidade Primal:

$$\mathbf{A}_g \mathbf{p}_g - \mathbf{p}_L = \hat{\mathbf{B}} \hat{\theta}$$

$$\underline{\mathbf{p}}_g \leq \mathbf{p}_g \leq \overline{\mathbf{p}}_g$$

$$\underline{\mathbf{t}} \leq \mathbf{T} \hat{\mathbf{A}} \hat{\theta} \leq \overline{\mathbf{t}}$$

Folga complementar:

$$\text{diag}(\underline{\pi}_g) (\mathbf{p}_g - \underline{\mathbf{p}}_g) = \mathbf{0}$$

$$\text{diag}(\overline{\pi}_g) (\overline{\mathbf{p}}_g - \mathbf{p}_g) = \mathbf{0}$$

$$\text{diag}(\underline{\pi}_t) (\underline{\mathbf{t}} - \mathbf{T} \hat{\mathbf{A}} \hat{\theta}) = \mathbf{0}$$

$$\text{diag}(\overline{\pi}_t) (\mathbf{T} \hat{\mathbf{A}} \hat{\theta} - \overline{\mathbf{t}}) = \mathbf{0}$$

$$\underline{\pi}_g \geq \mathbf{0}, \quad \overline{\pi}_g \geq \mathbf{0}, \quad \underline{\pi}_t \geq \mathbf{0}, \quad \overline{\pi}_t \geq \mathbf{0}$$

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (III)

## Condição de factibilidade dual de ângulo (I)

- A condição de factibilidade dual de ângulo fornece:

$$\hat{\mathbf{B}}^T \lambda - \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} \underline{\pi}_t + \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} \overline{\pi}_t = \mathbf{0}$$

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (III)

## Condição de factibilidade dual de ângulo (I)

- A condição de factibilidade dual de ângulo fornece:

$$\hat{\mathbf{B}}^T \lambda - \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} \underline{\pi}_t + \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} \overline{\pi}_t = \mathbf{0}$$

- Como nosso objetivo é analisar o efeito de limites de transmissão sobre  $\lambda$ , reescrevemos a equação na forma:

$$\hat{\mathbf{B}}^T \lambda = \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} (\underline{\pi}_t - \overline{\pi}_t)$$

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (III)

## Condição de factibilidade dual de ângulo (I)

- A condição de factibilidade dual de ângulo fornece:

$$\hat{\mathbf{B}}^T \lambda - \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} \underline{\pi}_t + \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} \overline{\pi}_t = \mathbf{0}$$

- Como nosso objetivo é analisar o efeito de limites de transmissão sobre  $\lambda$ , reescrevemos a equação na forma:

$$\hat{\mathbf{B}}^T \lambda = \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} (\underline{\pi}_t - \overline{\pi}_t)$$

- $\hat{\mathbf{B}}^T$  é retangular  $\implies$  equação não tem solução imediata;

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (III)

## Condição de factibilidade dual de ângulo (I)

- A condição de factibilidade dual de ângulo fornece:

$$\hat{\mathbf{B}}^T \lambda - \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} \underline{\pi}_t + \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} \overline{\pi}_t = \mathbf{0}$$

- Como nosso objetivo é analisar o efeito de limites de transmissão sobre  $\lambda$ , reescrevemos a equação na forma:

$$\hat{\mathbf{B}}^T \lambda = \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} (\underline{\pi}_t - \overline{\pi}_t)$$

- $\hat{\mathbf{B}}^T$  é retangular  $\implies$  equação não tem solução imediata;
- Entretanto, se supomos que a barra 1 é a barra de referência,  $\hat{\mathbf{B}}$  pode ser escrito como:

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ - \quad - \quad - \\ \mathbf{B}_{red} \end{bmatrix}$$

onde  $\mathbf{b}_1^T$  é a primeira linha de  $\hat{\mathbf{B}}$  e  $\mathbf{B}_{red}$  é obtida da matriz  $\mathbf{B}$  eliminando-se a *linha e a coluna* da barra de referência.

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (IV)

## Condição de factibilidade dual de ângulo (II)

- O vetor  $\lambda$  pode ser particionado correspondentemente:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \text{---} \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \text{---} \\ \lambda_{red} \end{bmatrix}, \quad \text{com } \lambda_{red} = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (IV)

## Condição de factibilidade dual de ângulo (II)

- O vetor  $\lambda$  pode ser particionado correspondentemente:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \text{---} \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \text{---} \\ \lambda_{red} \end{bmatrix}, \quad \text{com } \lambda_{red} = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

- O lado esquerdo da condição de factibilidade dual de ângulo pode então ser reescrito como:

$$\widehat{\mathbf{B}}^T \lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \vdots & \mathbf{B}_{red}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \text{---} \\ \lambda_{red} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{red}^T \lambda_{red} + \mathbf{b}_1 \lambda_1$$



# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (V)

## Condição de factibilidade dual de ângulo (III)

- Considerando que

$$\hat{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{B}_{red}^T \boldsymbol{\lambda}_{red} + \mathbf{b}_1 \lambda_1,$$

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (V)

## Condição de factibilidade dual de ângulo (III)

- Considerando que

$$\hat{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{B}_{red}^T \boldsymbol{\lambda}_{red} + \mathbf{b}_1 \lambda_1,$$

- a condição de ângulo previamente deduzida:

$$\hat{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} (\underline{\boldsymbol{\pi}}_t - \overline{\boldsymbol{\pi}}_t)$$

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (V)

## Condição de factibilidade dual de ângulo (III)

- Considerando que

$$\hat{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{B}_{red}^T \boldsymbol{\lambda}_{red} + \mathbf{b}_1 \lambda_1,$$

- a condição de ângulo previamente deduzida:

$$\hat{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} (\underline{\boldsymbol{\pi}}_t - \overline{\boldsymbol{\pi}}_t)$$

- pode ser reescrita como

$$\mathbf{B}_{red}^T \boldsymbol{\lambda}_{red} = -\mathbf{b}_1 \lambda_1 + \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} (\underline{\boldsymbol{\pi}}_t - \overline{\boldsymbol{\pi}}_t)$$

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (V)

## Condição de factibilidade dual de ângulo (III)

- Considerando que

$$\hat{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{B}_{red}^T \boldsymbol{\lambda}_{red} + \mathbf{b}_1 \lambda_1,$$

- a condição de ângulo previamente deduzida:

$$\hat{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} (\underline{\boldsymbol{\pi}}_t - \overline{\boldsymbol{\pi}}_t)$$

- pode ser reescrita como

$$\mathbf{B}_{red}^T \boldsymbol{\lambda}_{red} = -\mathbf{b}_1 \lambda_1 + \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} (\underline{\boldsymbol{\pi}}_t - \overline{\boldsymbol{\pi}}_t)$$

- Pelo fato de  $\mathbf{B}_{red}^T$  ser *não-singular*, além de *simétrica*, esta equação pode ser resolvida para  $\boldsymbol{\lambda}_{red}$  :

$$\boldsymbol{\lambda}_{red} = -\mathbf{B}_{red}^{-1} \mathbf{b}_1 \lambda_1 + \mathbf{B}_{red}^{-1} \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} (\underline{\boldsymbol{\pi}}_t - \overline{\boldsymbol{\pi}}_t)$$

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (VI)

## Condição de factibilidade dual de ângulo (IV)

- O primeiro termo do lado direito da equação anterior

$$-\mathbf{B}_{red}^{-1} \mathbf{b}_1 \lambda_1,$$

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (VI)

## Condição de factibilidade dual de ângulo (IV)

- O primeiro termo do lado direito da equação anterior

$$-\mathbf{B}_{red}^{-1} \mathbf{b}_1 \lambda_1,$$

- pode ser simplificado, lembrando que a soma das linhas de  $\hat{\mathbf{B}}$  é igual a zero, isto é,

$$\mathbf{e}_n^T \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ -\frac{\mathbf{b}_1^T \mathbf{B}_{red}^{-1} \mathbf{b}_1}{\mathbf{B}_{red}} \end{bmatrix} = 0$$

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (VI)

## Condição de factibilidade dual de ângulo (IV)

- O primeiro termo do lado direito da equação anterior

$$-\mathbf{B}_{red}^{-1} \mathbf{b}_1 \lambda_1,$$

- pode ser simplificado, lembrando que a soma das linhas de  $\hat{\mathbf{B}}$  é igual a zero, isto é,

$$\mathbf{e}_n^T \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ -\frac{\mathbf{b}_1^T \mathbf{B}_{red}^{-1} \mathbf{b}_1}{\mathbf{B}_{red}} \end{bmatrix} = 0$$

- ou

$$\mathbf{b}_1^T + \mathbf{e}_{n-1}^T \mathbf{B}_{red} = 0,$$

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (VI)

## Condição de factibilidade dual de ângulo (IV)

- O primeiro termo do lado direito da equação anterior

$$-\mathbf{B}_{red}^{-1} \mathbf{b}_1 \lambda_1,$$

- pode ser simplificado, lembrando que a soma das linhas de  $\hat{\mathbf{B}}$  é igual a zero, isto é,

$$\mathbf{e}_n^T \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ -\frac{\mathbf{b}_1^T}{\mathbf{B}_{red}} \end{bmatrix} = 0$$

- ou

$$\mathbf{b}_1^T + \mathbf{e}_{n-1}^T \mathbf{B}_{red} = 0,$$

- que fornece

$$-\mathbf{B}_{red}^{-1} \mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_{n-1}$$



# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (VI)

## Condição de factibilidade dual de ângulo (IV)

- O primeiro termo do lado direito da equação anterior

$$-\mathbf{B}_{red}^{-1} \mathbf{b}_1 \lambda_1,$$

- pode ser simplificado, lembrando que a soma das linhas de  $\hat{\mathbf{B}}$  é igual a zero, isto é,

$$\mathbf{e}_n^T \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ -\frac{\mathbf{b}_1^T}{\mathbf{B}_{red}} \end{bmatrix} = 0$$

- ou

$$\mathbf{b}_1^T + \mathbf{e}_{n-1}^T \mathbf{B}_{red} = 0,$$

- que fornece

$$-\mathbf{B}_{red}^{-1} \mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_{n-1}$$

- Consequentemente,

$$\left( -\mathbf{B}_{red}^{-1} \mathbf{b}_1 \right) \lambda_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_{n-1}$$

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (VII)

## Condição de factibilidade dual de ângulo (V)

- Usando o resultado anterior, e definindo-se

$$\tilde{\mathbf{X}} \triangleq \mathbf{B}_{red}^{-1},$$

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (VII)

## Condição de factibilidade dual de ângulo (V)

- Usando o resultado anterior, e definindo-se

$$\tilde{\mathbf{X}} \triangleq \mathbf{B}_{red}^{-1},$$

- temos como resultado final:

$$\lambda_{red} = \lambda_1 \mathbf{e}_{n-1} - \tilde{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} (\bar{\pi}_t - \underline{\pi}_t)$$

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (VII)

## Condição de factibilidade dual de ângulo (V)

- Usando o resultado anterior, e definindo-se

$$\tilde{\mathbf{X}} \triangleq \mathbf{B}_{red}^{-1},$$

- temos como resultado final:

$$\lambda_{red} = \lambda_1 \mathbf{e}_{n-1} - \tilde{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} (\bar{\pi}_t - \underline{\pi}_t)$$

- Esta equação nos permite analisar o efeito de limites de fluxo atingidos sobre os custos marginais de barra:

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (VII)

## Condição de factibilidade dual de ângulo (V)

- Usando o resultado anterior, e definindo-se

$$\tilde{\mathbf{X}} \triangleq \mathbf{B}_{red}^{-1},$$

- temos como resultado final:

$$\lambda_{red} = \lambda_1 \mathbf{e}_{n-1} - \tilde{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} (\bar{\pi}_t - \underline{\pi}_t)$$

- Esta equação nos permite analisar o efeito de limites de fluxo atingidos sobre os custos marginais de barra:
  - Se *nenhum limite de fluxo é atingido*, então:

$$\underline{\pi}_t = \bar{\pi}_t = \mathbf{0}.$$

e os  $\lambda'$ s de todas as barras serão iguais entre si (e iguais a  $\lambda_1$ );

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (VII)

## Condição de factibilidade dual de ângulo (V)

- Usando o resultado anterior, e definindo-se

$$\tilde{\mathbf{X}} \triangleq \mathbf{B}_{red}^{-1},$$

- temos como resultado final:

$$\lambda_{red} = \lambda_1 \mathbf{e}_{n-1} - \tilde{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} (\bar{\pi}_t - \underline{\pi}_t)$$

- Esta equação nos permite analisar o efeito de limites de fluxo atingidos sobre os custos marginais de barra:
  - Se *nenhum limite de fluxo é atingido*, então:

$$\underline{\pi}_t = \bar{\pi}_t = \mathbf{0}.$$

e os  $\lambda'$ s de todas as barras serão iguais entre si (e iguais a  $\lambda_1$ );

- Se *algum limite de fluxo é atingido*, o 2º termo do lado esquerdo será  $\neq 0$ , e em geral os  $\lambda'$ s de todas as barras serão distintos.

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (VIII)

## Condição de factibilidade dual de potência (I)

- A condição de factibilidade dual de potência é dada por

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} \mathcal{L} = \nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) - \mathbf{A}_g^T \boldsymbol{\lambda} - \underline{\boldsymbol{\pi}}_g + \overline{\boldsymbol{\pi}}_g = \mathbf{0},$$

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (VIII)

## Condição de factibilidade dual de potência (I)

- A condição de factibilidade dual de potência é dada por

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} \mathcal{L} = \nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) - \mathbf{A}_g^T \lambda - \underline{\pi}_g + \overline{\pi}_g = \mathbf{0},$$

- ou

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \mathbf{A}_g^T \lambda + \underline{\pi}_g - \overline{\pi}_g$$



# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (VIII)

## Condição de factibilidade dual de potência (I)

- A condição de factibilidade dual de potência é dada por

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} \mathcal{L} = \nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) - \mathbf{A}_g^T \lambda - \underline{\pi}_g + \overline{\pi}_g = \mathbf{0},$$

- ou

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \mathbf{A}_g^T \lambda + \underline{\pi}_g - \overline{\pi}_g$$

- O lado esquerdo da equação representa *os custos incrementais dos geradores do sistema*;

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (VIII)

## Condição de factibilidade dual de potência (I)

- A condição de factibilidade dual de potência é dada por

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} \mathcal{L} = \nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) - \mathbf{A}_g^T \lambda - \underline{\pi}_g + \overline{\pi}_g = \mathbf{0},$$

- ou

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \mathbf{A}_g^T \lambda + \underline{\pi}_g - \overline{\pi}_g$$

- O lado esquerdo da equação representa *os custos incrementais dos geradores do sistema*;
- Pode-se também verificar que o termo  $\mathbf{A}_g^T \lambda$  fornece os *custos marginais das barras de geração*, que denotaremos por

$$\lambda_g = \mathbf{A}_g^T \lambda$$

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (VIII)

## Condição de factibilidade dual de potência (I)

- A condição de factibilidade dual de potência é dada por

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} \mathcal{L} = \nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) - \mathbf{A}_g^T \lambda - \underline{\pi}_g + \overline{\pi}_g = \mathbf{0},$$

- ou

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \mathbf{A}_g^T \lambda + \underline{\pi}_g - \overline{\pi}_g$$

- O lado esquerdo da equação representa *os custos incrementais dos geradores do sistema*;
- Pode-se também verificar que o termo  $\mathbf{A}_g^T \lambda$  fornece os *custos marginais das barras de geração*, que denotaremos por

$$\lambda_g = \mathbf{A}_g^T \lambda$$

- Portanto

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \lambda_g + \underline{\pi}_g - \overline{\pi}_g$$

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (IX)

## Condição de factibilidade dual de potência (II)

- A condição de factibilidade dual de potência é reescrita como

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \lambda_g + \underline{\pi}_g - \overline{\pi}_g$$

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (IX)

## Condição de factibilidade dual de potência (II)

- A condição de factibilidade dual de potência é reescrita como

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \lambda_g + \underline{\pi}_g - \overline{\pi}_g$$

- Portanto, os *os custos incrementais de geração são iguais aos  $\lambda$ 's das barras de geração para aquelas unidades que não atingem seus limites de geração;*

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (IX)

## Condição de factibilidade dual de potência (II)

- A condição de factibilidade dual de potência é reescrita como

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \lambda_g + \underline{\pi}_g - \overline{\pi}_g$$

- Portanto, os *os custos incrementais de geração são iguais aos  $\lambda'$ s das barras de geração para aquelas unidades que não atingem seus limites de geração;*
- $\lambda_g$  é um subconjunto de  $\lambda$ , portanto:

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (IX)

## Condição de factibilidade dual de potência (II)

- A condição de factibilidade dual de potência é reescrita como

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \lambda_g + \underline{\pi}_g - \overline{\pi}_g$$

- Portanto, os *os custos incrementais de geração são iguais aos  $\lambda'$ s das barras de geração para aquelas unidades que não atingem seus limites de geração*;
- $\lambda_g$  é um subconjunto de  $\lambda$ , portanto:
  - Caso não existam limites ativos de transmissão, aplica-se o resultado anterior e os elementos de  $\lambda_g$  serão todos iguais entre si;

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (IX)

## Condição de factibilidade dual de potência (II)

- A condição de factibilidade dual de potência é reescrita como

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \lambda_g + \underline{\pi}_g - \overline{\pi}_g$$

- Portanto, os *os custos incrementais de geração são iguais aos  $\lambda'$ s das barras de geração para aquelas unidades que não atingem seus limites de geração*;
- $\lambda_g$  é um subconjunto de  $\lambda$ , portanto:
  - Caso não existam limites ativos de transmissão, aplica-se o resultado anterior e os elementos de  $\lambda_g$  serão todos iguais entre si;
- Logo, *na ausência de congestionamentos de transmissão*, aplicam-se os resultados do Despacho Econômico clássico:



# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (IX)

## Condição de factibilidade dual de potência (II)

- A condição de factibilidade dual de potência é reescrita como

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \lambda_g + \underline{\pi}_g - \overline{\pi}_g$$

- Portanto, os *os custos incrementais de geração são iguais aos  $\lambda'_s$  das barras de geração para aquelas unidades que não atingem seus limites de geração*;
- $\lambda_g$  é um subconjunto de  $\lambda$ , portanto:
  - Caso não existam limites ativos de transmissão, aplica-se o resultado anterior e os elementos de  $\lambda_g$  serão todos iguais entre si;
- Logo, *na ausência de congestionamentos de transmissão*, aplicam-se os resultados do Despacho Econômico clássico:
  - geradores *livres* operam com custos incrementais de geração iguais, etc.

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (X)

## Conclusões (I)

- Caso, no resultado do FPO desconsiderando perdas de transmissão *não existam limites ativos de transmissão ou de geração*:

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (X)

## Conclusões (I)

- Caso, no resultado do FPO desconsiderando perdas de transmissão *não existam limites ativos de transmissão ou de geração*:
  - os  $\lambda'$ s de todas as barras são iguais entre si e,

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (X)

## Conclusões (I)

- Caso, no resultado do FPO desconsiderando perdas de transmissão *não existam limites ativos de transmissão ou de geração*:
  - os  $\lambda$ 's de todas as barras são iguais entre si e,
  - todos geradores estão operando com os mesmos custos incrementais de geração.

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (X)

## Conclusões (I)

- Caso, no resultado do FPO desconsiderando perdas de transmissão *não existam limites ativos de transmissão ou de geração*:
  - os  $\lambda'$ s de todas as barras são iguais entre si e,
  - todos geradores estão operando com os mesmos custos incrementais de geração.
  - Em suma, *a condição ótima de operação é a mesma obtida para o caso do despacho econômico clássico* (sem a representação da rede de transmissão).

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (X)

## Conclusões (I)

- Caso, no resultado do FPO desconsiderando perdas de transmissão *não existam limites ativos de transmissão ou de geração*:
  - os  $\lambda'$ s de todas as barras são iguais entre si e,
  - todos geradores estão operando com os mesmos custos incrementais de geração.
  - Em suma, *a condição ótima de operação é a mesma obtida para o caso do despacho econômico clássico* (sem a representação da rede de transmissão).
- Caso no despacho ótimo sem perdas, não ocorram limites de fluxo ativos *mas alguns geradores tenham atingido limites máximos ou mínimos*:

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (X)

## Conclusões (I)

- Caso, no resultado do FPO desconsiderando perdas de transmissão *não existam limites ativos de transmissão ou de geração*:
  - os  $\lambda'$ s de todas as barras são iguais entre si e,
  - todos geradores estão operando com os mesmos custos incrementais de geração.
  - Em suma, *a condição ótima de operação é a mesma obtida para o caso do despacho econômico clássico* (sem a representação da rede de transmissão).
- Caso no despacho ótimo sem perdas, não ocorram limites de fluxo ativos *mas alguns geradores tenham atingido limites máximos ou mínimos*:
  - os geradores *livres* operam com custos incrementais de geração iguais aos  $\lambda'$ s das barras a que estão conectados (que são todos iguais entre si);

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (XI)

## Conclusões (II)

- Ausência de congestionamentos de transmissão mas ocorrência de limites ativos de geração (*cont.*):



# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (XI)

## Conclusões (II)

- Ausência de congestionamentos de transmissão mas ocorrência de limites ativos de geração (*cont.*):
  - Para um gerador  $k$  que esteja operando no *limite inferior* temos:

$$\frac{dc_k(p_{g_k})}{dp_{g_k}} = \lambda + \pi_k \implies \frac{dc_k(p_{g_k})}{dp_{g_k}} > \lambda$$

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (XI)

## Conclusões (II)

- Ausência de congestionamentos de transmissão mas ocorrência de limites ativos de geração (*cont.*):

- Para um gerador  $k$  que esteja operando no *limite inferior* temos:

$$\frac{dc_k(p_{g_k})}{dp_{g_k}} = \lambda + \underline{\pi}_k \implies \frac{dc_k(p_{g_k})}{dp_{g_k}} > \lambda$$

- Para um gerador  $l$  operando do *limite superior* temos:

$$\frac{dc_l(p_{g_l})}{dp_{g_l}} = \lambda_1 - \overline{\pi}_l \implies \frac{dc_k(p_{g_k})}{dp_{g_k}} < \lambda$$

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (XI)

## Conclusões (II)

- Ausência de congestionamentos de transmissão mas ocorrência de limites ativos de geração (*cont.*):

- Para um gerador  $k$  que esteja operando no *limite inferior* temos:

$$\frac{dc_k(p_{g_k})}{dp_{g_k}} = \lambda + \pi_k \implies \frac{dc_k(p_{g_k})}{dp_{g_k}} > \lambda$$

- Para um gerador  $l$  operando do *limite superior* temos:

$$\frac{dc_l(p_{g_l})}{dp_{g_l}} = \lambda_1 - \bar{\pi}_l \implies \frac{dc_k(p_{g_k})}{dp_{g_k}} < \lambda$$

- Quando um *limite de transmissão* for atingido, os custos marginais das barras tornam-se em geral diferentes entre si.

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (XI)

## Conclusões (III)

No caso em que *limites de transmissão* são atingidos, aplicam-se as *condições de factibilidade dual*:

- Relação entre custos incrementais de geração e custos marginais de barra:

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \lambda_g + \underline{\pi}_g - \overline{\pi}_g$$

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (XI)

## Conclusões (III)

No caso em que *limites de transmissão* são atingidos, aplicam-se as *condições de factibilidade dual*:

- Relação entre custos incrementais de geração e custos marginais de barra:

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \lambda_g + \underline{\pi}_g - \overline{\pi}_g$$

- Relação entre custos marginais de barra e multiplicadores de Lagrange associados aos limites:

$$\lambda_{red} = \lambda_1 \mathbf{e}_{n-1} - \tilde{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} (\overline{\pi}_t - \underline{\pi}_t)$$

# Efeitos de Congestionamentos de Transmissão (XI)

## Conclusões (III)

No caso em que *limites de transmissão* são atingidos, aplicam-se as *condições de factibilidade dual*:

- Relação entre custos incrementais de geração e custos marginais de barra:

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \lambda_g + \underline{\pi}_g - \overline{\pi}_g$$

- Relação entre custos marginais de barra e multiplicadores de Lagrange associados aos limites:

$$\lambda_{red} = \lambda_1 \mathbf{e}_{n-1} - \tilde{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} (\overline{\pi}_t - \underline{\pi}_t)$$

- Esta última equação pode ser bastante simplificada, como descrito a seguir.

# Custos Marginais de Barra na Presença de Congestionamentos na Rede (I)

- Se o fluxo de potência no ramo  $\ell = (k, m)$  atinge o limite superior, então:

$$\underline{\pi}_t = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \overline{\pi}_t = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \overline{\pi}_{t_\ell} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\leftarrow \text{posição } \ell) = \overline{\pi}_{t_\ell} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Custos Marginais de Barra na Presença de Congestionamentos na Rede (I)

- Se o fluxo de potência no ramo  $\ell = (k, m)$  atinge o limite superior, então:

$$\underline{\pi}_t = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \overline{\pi}_t = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \overline{\pi}_{t_\ell} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\leftarrow \text{posição } \ell) = \overline{\pi}_{t_\ell} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Definindo

$$\mathbf{w}_\ell = [0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0]^T,$$

o segundo termo do lado direito da equação de  $\lambda_{red}$  torna-se portanto:

$$\tilde{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} (\overline{\pi}_t - \underline{\pi}_t) = \overline{\pi}_{t_\ell} \tilde{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} \mathbf{w}_\ell = \gamma_\ell \overline{\pi}_{t_\ell} \tilde{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{w}_\ell$$



# Custos Marginais de Barra na Presença de Congestionamentos na Rede (II)

- O produto  $\hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{w}_\ell$  fornece a  $\ell$ -ésima coluna de  $\hat{\mathbf{A}}^T$  (ou a  $\ell$ -ésima *linha* de  $\hat{\mathbf{A}}$ ), que possui apenas dois elementos não nulos:  $+1$ , na posição  $k$  e  $-1$  na posição  $m$  :

$$\hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{w}_\ell = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & +1 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T \triangleq \mathbf{w}_{km}$$

$(k) \qquad \qquad \qquad (m)$

# Custos Marginais de Barra na Presença de Congestionamentos na Rede (II)

- O produto  $\hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{w}_\ell$  fornece a  $\ell$ -ésima coluna de  $\hat{\mathbf{A}}^T$  (ou a  $\ell$ -ésima linha de  $\hat{\mathbf{A}}$ ), que possui apenas dois elementos não nulos:  $+1$ , na posição  $k$  e  $-1$  na posição  $m$ :

$$\hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{w}_\ell = \begin{bmatrix} 0 & \dots & +1 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T \triangleq \mathbf{w}_{km}$$

$(k) \qquad \qquad \qquad (m)$

- Logo, o produto  $\tilde{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{w}_\ell$  será igual a

$$\tilde{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{w}_\ell = \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{w}_{km} = \tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_m$$

onde  $\tilde{\mathbf{x}}_k$  e  $\tilde{\mathbf{x}}_m$  são as colunas da matriz  $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{B}_{red}^{-1}$  correspondentes às barras  $k$  e  $m$ .

# Custos Marginais de Barra na Presença de Congestionamentos na Rede (III)

- Portanto, no caso de apenas o ramo  $\ell = (k, m)$  atingir o limite superior, então

$$\tilde{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} (\bar{\boldsymbol{\pi}}_t - \underline{\boldsymbol{\pi}}_t) = \gamma_\ell \bar{\boldsymbol{\pi}}_{t_\ell} (\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_m)$$

# Custos Marginais de Barra na Presença de Congestionamentos na Rede (III)

- Portanto, no caso de apenas o ramo  $\ell = (k, m)$  atingir o limite superior, então

$$\tilde{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} (\bar{\boldsymbol{\pi}}_t - \underline{\boldsymbol{\pi}}_t) = \gamma_\ell \bar{\pi}_{t_\ell} (\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_m)$$

- Finalmente, a equação original para  $\lambda_{red}$

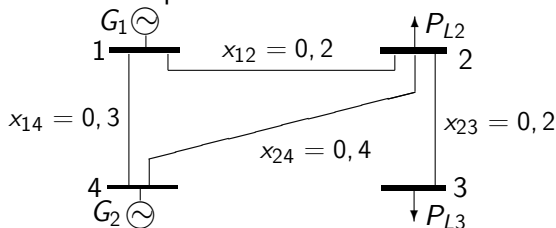
$$\lambda_{red} = \lambda_1 \mathbf{e}_{n-1} - \tilde{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{T} (\bar{\boldsymbol{\pi}}_t - \underline{\boldsymbol{\pi}}_t),$$

pode ser simplificada para:

$$\lambda_{red} = \lambda_1 \mathbf{e}_{n-1} - \gamma_\ell \bar{\pi}_{t_\ell} (\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_m)$$

## Exemplo 2

Reconsidere o sistema de potência de 4 barras e 4 linhas do Exemplo 1:



Os dados das funções-custo dos geradores e as cargas neste caso são:

Ger.	Curva de Custo, \$/h ( $P$ 's em MW)	$\underline{P}$ (MW)	$\bar{P}$ (MW)
$G_1$	$c_1(P_1) = 7,92 P_1 + 0,00241 P_1^2$	10	700
$G_2$	$c_2(P_2) = 7,00 P_2 + 0,00075 P_2^2$	10	700

$$P_{L2} = 150 \text{ MW} \quad \text{e} \quad P_{L3} = 100 \text{ MW}$$

Os limites de transmissão são os mesmos do Exemplo 1.

# Resultados do FPO para Exemplo 2: Fluxos nos Ramos

ramo	de	para	$t$	$\pi_t$	$\bar{t}$	$\underline{t}$
1	1	2	114,44	<b>0,0</b>	700,00	-700,00
2	1	4	-104,43	<b>0,0</b>	300,00	-300,00
1	2	1	-114,44	<b>0,0</b>	700,00	-700,00
3	2	3	100,00	<b>0,0</b>	700,00	-700,00
4	2	4	-135,56	<b>0,0</b>	300,00	-300,00
3	3	2	-100,00	<b>0,0</b>	700,00	-700,00
2	4	1	104,43	<b>0,0</b>	300,00	-300,00
4	4	2	135,56	<b>0,0</b>	300,00	-300,00

## Resultados do FPO para Exemplo 2: Variáveis de Barra

Barra	$ V $	$\theta$	$\lambda$	$p_g$	$\bar{p}_g$	$\underline{p}_g$	$\pi_g$	$p_L$
1	1,0	0,00	<b>7,360</b>	<b>10,00</b>	700,00	10,00	<b>0,61</b>	0,0
2	1,0	-13,11	<b>7,360</b>				<b>0,00</b>	150,0
3	1,0	-24,57	<b>7,360</b>				<b>0,00</b>	100,0
4	1,0	17,95	<b>7,360</b>	<b>240,00</b>	700,00	10,00	<b>0,00</b>	0,0
Custo ótimo de produção = 1802,64 \$/h								

# Conclusões sobre Exemplo 2

- Da tabela de fluxos nos ramos, constata-se que não ocorrem congestionamentos de transmissão, pois todos os multiplicadores  $\pi_t$  são nulos;



## Conclusões sobre Exemplo 2

- Da tabela de fluxos nos ramos, constata-se que não ocorrem congestionamentos de transmissão, pois todos os multiplicadores  $\pi_t$  são nulos;
- Da tabela de variáveis de barra, vê-se que os custos marginais de barra são todos iguais (a 7,36 \$/MWh), conforme seria de se esperar quando não há congestionamentos;

## Conclusões sobre Exemplo 2

- Da tabela de fluxos nos ramos, constata-se que não ocorrem congestionamentos de transmissão, pois todos os multiplicadores  $\pi_t$  são nulos;
- Da tabela de variáveis de barra, vê-se que os custos marginais de barra são todos iguais (a 7,36 \$/MWh), conforme seria de se esperar quando não há congestionamentos;
- Os despachos ótimos dos geradores também são esperados, já que o gerador 1 é claramente mais caro que o gerador 2. Estes despachos, assim como o valor de  $\lambda$ , podem ser obtidos (neste caso sem congestionamento) via DE clássico em barra única;

## Conclusões sobre Exemplo 2

- Da tabela de fluxos nos ramos, constata-se que não ocorrem congestionamentos de transmissão, pois todos os multiplicadores  $\pi_t$  são nulos;
- Da tabela de variáveis de barra, vê-se que os custos marginais de barra são todos iguais (a 7,36 \$/MWh), conforme seria de se esperar quando não há congestionamentos;
- Os despachos ótimos dos geradores também são esperados, já que o gerador 1 é claramente mais caro que o gerador 2. Estes despachos, assim como o valor de  $\lambda$ , podem ser obtidos (neste caso sem congestionamento) via DE clássico em barra única;
- É possível também verificar a validade da equação que relaciona  $\lambda$ , os custos marginais de barra e os multiplicadores de Lagrange  $\pi_g$ .

## Exemplo 3

Para o mesmo sistema de potência do Exemplo 2, suponha agora que o limite de transmissão do ramo 2 – 4, anteriormente estabelecido em 300 *MW*, é reduzido para 130 *MW*. Interprete os resultados de um estudo de FPO executado para o sistema nestas novas condições.

# Resultados do FPO para Exemplo 3: Fluxos nos Ramos

ramo	de	para	$t$	$\pi_t$	$\bar{t}$	$\underline{t}$
1	1	2	120,00	<b>0,00</b>	700,00	-700,00
2	1	4	-93,32	<b>0,00</b>	300,00	-300,00
1	2	1	-120,00	<b>0,00</b>	700,00	-700,00
3	2	3	100,00	<b>0,00</b>	700,00	-700,00
4	2	4	-130,00	<b>2,14</b>	130,00	-130,00
3	3	2	-100,00	<b>0,00</b>	700,00	-700,00
2	4	1	93,32	<b>0,00</b>	300,00	-300,00
4	4	2	130,00	<b>0,00</b>	130,00	-130,00

## Resultados do FPO para Exemplo 3: Variáveis de Barra

Barra	$ V $	$\theta$	$\lambda$	$p_g$	$\bar{p}_g$	$\underline{p}_g$	$\pi_g$	$p_L$
1	1,0	0,00	<b>8,049</b>	<b>26,67</b>	700,00	10,00	<b>0,0</b>	0,0
2	1,0	-13,75	<b>8,524</b>				<b>0,0</b>	150,0
3	1,0	-25,21	<b>8,523</b>				<b>0,0</b>	100,0
4	1,0	16,04	<b>7,335</b>	<b>223,33</b>	700,00	10,00	<b>0,0</b>	0,0
Custo ótimo de produção = 1813,65 \$/h								

## Conclusões sobre Exemplo 3 (I)

- Da tabela dos fluxos nos ramos, verificamos que o multiplicador de Lagrange para o ramo 2 – 4 é diferente de zero, indicando a ocorrência de congestionamento. De fato, valor do fluxo de potência no sentido da barra 4 para a barra 2 atinge o limite de 130 MW;

## Conclusões sobre Exemplo 3 (I)

- Da tabela dos fluxos nos ramos, verificamos que o multiplicador de Lagrange para o ramo 2 – 4 é diferente de zero, indicando a ocorrência de congestionamento. De fato, valor do fluxo de potência no sentido da barra 4 para a barra 2 atinge o limite de 130 MW;
- Da Tabela de variáveis de barra, vê-se que, em consequência do congestionamento, os custos marginais de barra são agora distintos entre si;



## Conclusões sobre Exemplo 3 (I)

- Da tabela dos fluxos nos ramos, verificamos que o multiplicador de Lagrange para o ramo 2 – 4 é diferente de zero, indicando a ocorrência de congestionamento. De fato, valor do fluxo de potência no sentido da barra 4 para a barra 2 atinge o limite de 130 MW;
- Da Tabela de variáveis de barra, vê-se que, em consequência do congestionamento, os custos marginais de barra são agora distintos entre si;
- Outro resultado do congestionamento é que o despacho ótimo sofre um desvio significativo em relação ao do Exemplo 2, que se traduz pelo descolamento da potência gerada pelo gerador 1 de seu limite inferior;

## Conclusões sobre Exemplo 3 (I)

- Da tabela dos fluxos nos ramos, verificamos que o multiplicador de Lagrange para o ramo 2 – 4 é diferente de zero, indicando a ocorrência de congestionamento. De fato, valor do fluxo de potência no sentido da barra 4 para a barra 2 atinge o limite de 130 MW;
- Da Tabela de variáveis de barra, vê-se que, em consequência do congestionamento, os custos marginais de barra são agora distintos entre si;
- Outro resultado do congestionamento é que o despacho ótimo sofre um desvio significativo em relação ao do Exemplo 2, que se traduz pelo descolamento da potência gerada pelo gerador 1 de seu limite inferior;
- O desvio das potências geradas em relação às do Exemplo 2 produz um aumento no custo de geração, de 1802,64 \$/h para 1813,65 \$/h;

## Conclusões sobre Exemplo 3 (I)

- Da tabela dos fluxos nos ramos, verificamos que o multiplicador de Lagrange para o ramo 2 – 4 é diferente de zero, indicando a ocorrência de congestionamento. De fato, valor do fluxo de potência no sentido da barra 4 para a barra 2 atinge o limite de 130 MW;
- Da Tabela de variáveis de barra, vê-se que, em consequência do congestionamento, os custos marginais de barra são agora distintos entre si;
- Outro resultado do congestionamento é que o despacho ótimo sofre um desvio significativo em relação ao do Exemplo 2, que se traduz pelo descolamento da potência gerada pelo gerador 1 de seu limite inferior;
- O desvio das potências geradas em relação às do Exemplo 2 produz um aumento no custo de geração, de 1802,64 \$/h para 1813,65 \$/h;
- Os resultados obtidos podem ser confirmados pela aplicação das condições de factibilidade dual.

# Verificação dos Resultados (I)

- Para aplicar a condição de ângulo, considere que:

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -5,0 & 0,0 & -3,33 \\ 12,5 & -5,0 & -2,5 \\ -5,0 & 5,0 & 0,0 \\ -2,5 & 0,0 & 5,83 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}_{red} = \begin{bmatrix} 12,5 & -5,0 & -2,5 \\ -5,0 & 5,0 & 0,0 \\ -2,5 & 0,0 & 5,83 \end{bmatrix}$$

e portanto

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{B}_{red}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,1556 & 0,1556 & 0,0667 \\ 0,1556 & 0,3556 & 0,0667 \\ 0,0667 & 0,0667 & 0,2000 \end{bmatrix}$$

# Verificação dos Resultados (I)

- Para aplicar a condição de ângulo, considere que:

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -5,0 & 0,0 & -3,33 \\ 12,5 & -5,0 & -2,5 \\ -5,0 & 5,0 & 0,0 \\ -2,5 & 0,0 & 5,83 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}_{red} = \begin{bmatrix} 12,5 & -5,0 & -2,5 \\ -5,0 & 5,0 & 0,0 \\ -2,5 & 0,0 & 5,83 \end{bmatrix}$$

e portanto

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{B}_{red}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,1556 & 0,1556 & 0,0667 \\ 0,1556 & 0,3556 & 0,0667 \\ 0,0667 & 0,0667 & 0,2000 \end{bmatrix}$$

- Além disso:

$$\gamma_{2-4} = 2,5 \text{ pu}$$

# Verificação dos Resultados (I)

- Para aplicar a condição de ângulo, considere que:

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -5,0 & 0,0 & -3,33 \\ 12,5 & -5,0 & -2,5 \\ -5,0 & 5,0 & 0,0 \\ -2,5 & 0,0 & 5,83 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}_{red} = \begin{bmatrix} 12,5 & -5,0 & -2,5 \\ -5,0 & 5,0 & 0,0 \\ -2,5 & 0,0 & 5,83 \end{bmatrix}$$

e portanto

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{B}_{red}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,1556 & 0,1556 & 0,0667 \\ 0,1556 & 0,3556 & 0,0667 \\ 0,0667 & 0,0667 & 0,2000 \end{bmatrix}$$

- Além disso:

$$\gamma_{2-4} = 2,5 \text{ pu}$$

- e, dos resultados do FPO:

$$\lambda_1 = 8,049 \text{ \$/MWh} \quad \underline{\pi}_{2-4} = 2,14 \text{ \$/MWh}$$

## Verificação dos Resultados (II)

- A *condição de factibilidade de ângulo* neste caso é (observe que o limite de transmissão atingido é o inferior!):

$$\lambda_{red} = \lambda_1 \mathbf{e}_3 + \gamma_{2-4} \pi_{t_{2-4}} (\tilde{\mathbf{x}}_2 - \tilde{\mathbf{x}}_4)$$

# Verificação dos Resultados (II)

- A *condição de factibilidade de ângulo* neste caso é (observe que o limite de transmissão atingido é o inferior!):

$$\lambda_{red} = \lambda_1 \mathbf{e}_3 + \gamma_{2-4} \pi_{t_{2-4}} (\tilde{\mathbf{x}}_2 - \tilde{\mathbf{x}}_4)$$

- Lembrando a associação das colunas de  $\tilde{\mathbf{X}}$  com os índices de barra:

$$\begin{array}{ccc} (2) & (3) & (4) \\ \left[ \begin{array}{ccc} 0,1556 & 0,1556 & 0,0667 \\ 0,1556 & 0,3556 & 0,0667 \\ 0,0667 & 0,0667 & 0,2000 \end{array} \right] \end{array}$$



## Verificação dos Resultados (II)

- A condição de factibilidade de ângulo neste caso é (observe que o limite de transmissão atingido é o inferior!):

$$\lambda_{red} = \lambda_1 \mathbf{e}_3 + \gamma_{2-4} \pi_{t_{2-4}} (\tilde{\mathbf{x}}_2 - \tilde{\mathbf{x}}_4)$$

- Lembrando a associação das colunas de  $\tilde{\mathbf{X}}$  com os índices de barra:

$$\begin{array}{ccc} (2) & (3) & (4) \\ \left[ \begin{array}{ccc} 0,1556 & 0,1556 & 0,0667 \\ 0,1556 & 0,3556 & 0,0667 \\ 0,0667 & 0,0667 & 0,2000 \end{array} \right] \end{array}$$

- temos finalmente que

$$\lambda_{red} = 8,049 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2,5 \times 2,14 \times \left( \begin{bmatrix} 0,1556 \\ 0,1556 \\ 0,0667 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,0667 \\ 0,0667 \\ 0,2000 \end{bmatrix} \right)$$

ou

$$\lambda_{red} = \begin{bmatrix} 8,524 & 8,524 & 7,335 \end{bmatrix}^T$$

# Verificação dos Resultados (III)

- Quanto à condição de factibilidade dual de potência:

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \lambda_g + \underline{\pi}_g - \overline{\pi}_g$$

verificamos que:

# Verificação dos Resultados (III)

- Quanto à condição de factibilidade dual de potência:

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \lambda_g + \underline{\pi}_g - \overline{\pi}_g$$

verificamos que:

- O gerador 1 opera livremente na solução, portanto

$$\frac{dc(p_{g1})}{dp_{g1}} = \lambda_{g1} = \lambda_1 = 8,049$$

# Verificação dos Resultados (III)

- Quanto à condição de factibilidade dual de potência:

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \lambda_g + \underline{\pi}_g - \overline{\pi}_g$$

verificamos que:

- O gerador 1 opera livremente na solução, portanto

$$\frac{dc(p_{g1})}{dp_{g1}} = \lambda_{g1} = \lambda_1 = 8,049$$

- De fato

$$\frac{dc(p_{g1})}{dp_{g1}} = 7,92 + 2 \times 0,00241 \times 26,67 = 8,049$$

# Verificação dos Resultados (III)

- Quanto à condição de factibilidade dual de potência:

$$\nabla_{\mathbf{p}_g} c(\mathbf{p}_g) = \lambda_g + \underline{\pi}_g - \overline{\pi}_g$$

verificamos que:

- O gerador 1 opera livremente na solução, portanto

$$\frac{dc(p_{g1})}{dp_{g1}} = \lambda_{g1} = \lambda_1 = 8,049$$

- De fato

$$\frac{dc(p_{g1})}{dp_{g1}} = 7,92 + 2 \times 0,00241 \times 26,67 = 8,049$$

- Conclusão similar se aplica ao gerador 2 (verifique!).

# Custo Marginal do Sistema - CMS (I)

- O *CMS* é definido como

$$CMS = \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_L^{Total}}$$

# Custo Marginal do Sistema - CMS (I)

- O CMS é definido como

$$CMS = \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_L^{Total}}$$

- Usando a regra da cadeia para derivação, podemos escrever

$$CMS = \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_{L_1}} \times \frac{dP_{L_1}}{dP_L^{Total}} + \dots + \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_{L_N}} \times \frac{dP_{L_N}}{dP_L^{Total}}$$

# Custo Marginal do Sistema - CMS (I)

- O CMS é definido como

$$CMS = \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_L^{Total}}$$

- Usando a regra da cadeia para derivação, podemos escrever

$$CMS = \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_{L_1}} \times \frac{dP_{L_1}}{dP_L^{Total}} + \dots + \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_{L_N}} \times \frac{dP_{L_N}}{dP_L^{Total}}$$

- Supondo que

$$\begin{aligned} P_{L_1} &= k_1 P_L^{Total} \\ P_{L_2} &= k_2 P_L^{Total} \\ &\vdots \\ P_{L_n} &= k_n P_L^{Total} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \frac{dP_{L_i}}{dP_L^{Total}} = k_i, \quad \text{onde} \quad \sum_{i=1}^n k_i = 1$$



# Custo Marginal do Sistema - CMS (II)

- Logo

$$CMS = k_1 \times \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_{L_1}} + k_2 \times \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_{L_2}} + \dots + k_N \times \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_{L_N}}$$

# Custo Marginal do Sistema - CMS (II)

- Logo

$$CMS = k_1 \times \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_{L_1}} + k_2 \times \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_{L_2}} + \dots + k_N \times \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_{L_N}}$$

- ou

$$CMS = k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 + \dots + k_N \lambda_N$$

# Custo Marginal do Sistema - CMS (II)

- Logo

$$CMS = k_1 \times \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_{L_1}} + k_2 \times \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_{L_2}} + \dots + k_N \times \frac{dc(\mathbf{p}_g)}{dP_{L_N}}$$

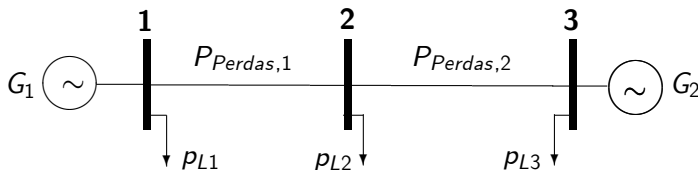
- ou

$$CMS = k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 + \dots + k_N \lambda_N$$

- Caso nenhum limite de fluxo nos ramos tenha sido atingido, então  $\lambda_i = \lambda_1, i = 1, \dots, n - 1$  e portanto

$$CMS = \lambda_1 (k_1 + k_2 + \dots + k_n) = \lambda_1$$

# Efeitos de Perdas e Congestionamento sobre os CMBs (I)

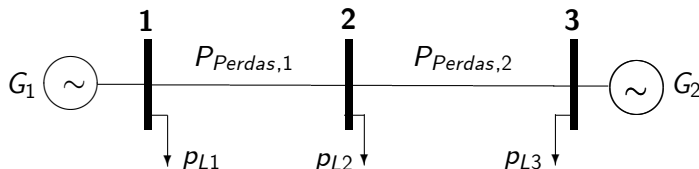


$$c_2(p_{g2}) \gg c_1(p_{g1})$$

a) Perdas  $\approx 0$  e ausência de congestionamento:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$$

# Efeitos de Perdas e Congestionamento sobre os CMBs (II)

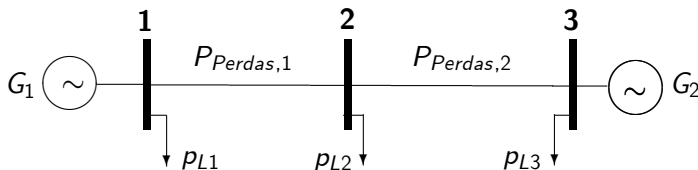


$$c_2(p_{g2}) \gg c_1(p_{g1})$$

b) Perdas  $\neq 0$  e ausência de congestionamento

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$$

# Efeitos de Perdas e Congestionamento sobre os CMBs (III)



$$c_2(p_{g2}) \gg c_1(p_{g1})$$

c) Perdas  $\neq 0$  e congestionamento no ramo 1 – 2

$$\lambda_2 > \lambda_3 \gg \lambda_1$$