Despacho Hidrotérmico a Curto Prazo com Restrições de Volume: Formulação para Solução via Método Primal/Dual de Pontos Interiores

Antonio Simões-Costa

20 de agosto de 2001

1. Formulação do Problema

Seja um sistema composto por uma unidade hidráulica e uma unidade térmica equivalentes alimentando uma carga durante um horizonte de tempo composto por N intervalos de igual duração, Δt. A rede elétrica não é explicitamente representada. Supõe-se que a carga varia de intervalo para intervalo, porém é constante ao longo de cada intervalo. Além disso, a unidade hidráulica deve turbinar um volume especificado V_{esp} de água ao longo dos N intervalos de tempo. Supõe-se também que a potência gerada pela unidade hidráulica só depende da vazão turbinada. O problema de despacho hidrotérmico visa minimizar o custo total da unidade térmica utilizando para tanto o volume turbinável de água da maneira mais econômica possível. O problema de otimização correspondente é formulado como:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c(p_t) = \sum_{i=1}^{n_g} c(p_{t_i})\,\Delta t \\
\text{subject to:} \quad & \\
& p_L + \ell(p_t, p_h) - p_t - p_h = 0 \\
& e^T q(p_h)\,\Delta t - V_{esp} = 0 \\
& p_t - \bar{p}_t + \bar{s}_t = 0 \\
& -p_t + \underline{p}_t + \underline{s}_t = 0 \\
& p_h - \bar{p}_h + \bar{s}_h = 0 \\
& -p_h + \underline{p}_h + \underline{s}_h = 0
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

onde:

$$
\begin{array}{rl}
c(p_{t_i}): & \text{Custo da unidade térmica no intervalo } i \text{, em } \$/h; \\
p_t: & \text{Vetor } N \times 1 \text{ das potências térmicas geradas nos } N \text{ intervalos;} \\
p_h: & \text{Vetor } N \times 1 \text{ das potências hidráulicas geradas nos } N \text{ intervalos;} \\
q(p_h): & \text{Vetor } N \times 1 \text{ das vazões turbinadas nos } N \text{ intervalos;} \\
p_L: & \text{Vetor } N \times 1 \text{ das cargas elétricas nos } N \text{ intervalos;} \\
\ell(p_t, p_h): & \text{Vetor } N \times 1 \text{ das perdas de transmissão nos } N \text{ intervalos;} \\
\bar{p}_t, \underline{p}_t: & \text{Limites superiores e inferiores para a potência térmica gerada;} \\
\bar{s}_t, \underline{s}_t: & \text{Variáveis de folga correspondentes aos limites de } p_t; \\
\bar{p}_h, \underline{p}_h: & \text{Limites superiores e inferiores para a potência hidráulica gerada.} \\
\bar{s}_h, \underline{s}_h: & \text{Variáveis de folga correspondentes aos limites de } p_h.
\end{array}
$$

2. Equações do Método de Newton para o Problema Primal/Dual Usando Ordenação por Tipo de Variável

2.1. Função Lagrangeana e Condições Necessárias de Primeira Ordem

Adicionando-se barreiras logarítimicas para as variáveis não negativas, a função Lagrangeana para o problema (1.1) é:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\; & c(p_t) + \lambda^T(p_L + \ell(p_t, p_h) - p_t - p_h) + \gamma(e^T\, q(p_h)\, \Delta t - V_{esp}) \qquad (2.1) \\
& \overline{\pi}_t^T(p_t - \bar{p}_t + \bar{s}_t) + \underline{\pi}_t^T(-p_t + \underline{p}_t + \underline{s}_t) + \\
& \overline{\pi}_h^T(p_h - \bar{p}_h + \bar{s}_h) + \underline{\pi}_h^T(-p_h + \underline{p}_h + \underline{s}_h) - \\
& \mu \sum_{k=1}^{N} \log \underline{s}_{t_k} - \mu \sum_{k=1}^{N} \log \overline{s}_{t_k} - \mu \sum_{k=1}^{N} \log \underline{s}_{h_k} - \mu \sum_{k=1}^{N} \log \overline{s}_{h_k}
\end{aligned}
$$

Os termos referentes aos limites de geração podem ser re-escritos como:

$$
\begin{bmatrix} \overline{\pi}_t^T & \underline{\pi}_t^T & \overline{\pi}_h^T & \underline{\pi}_h^T \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} I & 0 & I & & \\ -I & 0 & & I & \\ 0 & I & & & I \\ 0 & -I & & & & I \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} p_t \\ p_h \\ \bar{s}_t \\ \underline{s}_t \\ \bar{s}_h \\ \underline{s}_h \end{bmatrix}
-
\begin{bmatrix} \bar{p}_t \\ -\underline{p}_t \\ \bar{p}_h \\ -\underline{p}_h \end{bmatrix}
$$

ou, definindo-se apropriadamente as matrizes F_t e F_h e os vetores π, s e p_{lim}:

$$
\pi^T \begin{bmatrix} F_t & F_h & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_t \\ p_h \\ s \end{bmatrix} - p_{\text{lim}}
$$

Conseqüentemente, a função Lagrangeana torna-se:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= c(p_t) + \lambda^T \left[p_L + \ell(p_t, p_h) - p_t - p_h\right] + \gamma \left[e^T q(p_h)\, \Delta t - V_{esp}\right] + \\
& \pi^T (F_t\, p_t + F_h\, p_h + s - p_{\lim}) - \mu \sum_{j=1}^{N} \log\, s_j
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

As condições de otimalidade de primeira ordem são:

$$
\begin{aligned}
\nabla_{p_t} \mathcal{L} &= \nabla c(p_t) + \left[L_t^T(p_t, p_h) - I\right] \lambda + F_t^T\, \pi = 0 \\
\nabla_{p_h} \mathcal{L} &= \left[L_h^T(p_t, p_h) - I\right] \lambda + \gamma\, \Delta t\, Q_h^T(p_h)\, e + F_t^T\, \pi = 0 \\
\nabla_{\lambda} \mathcal{L} &= p_L + \ell(p_t, p_h) - p_t - p_h = 0 \\
\nabla_{\gamma} \mathcal{L} &= e^T\, q(p_h)\, \Delta t - V_{esp} = 0 \\
\nabla_{\pi} \mathcal{L} &= F_t\, p_t + F_h\, p_h + s - p_{\lim} = 0 \\
\nabla_{s} \mathcal{L} &= \pi - \mu\, S^{-1} e = 0 \implies S\, \Pi\, e - \mu\, e = 0
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

onde e é um vetor coluna de dimensões apropriadas cujos elementos são iguais à unidade e

$$
\begin{aligned}
L_t(p_t, p_h) &\triangleq \nabla_{p_t} \ell(p_t, p_h) \\
L_h(p_t, p_h) &\triangleq \nabla_{p_h} \ell(p_t, p_h) \\
Q_h(p_h) &= \nabla_{p_h} q(p_h) \\
\Pi &\triangleq diag\{\pi_i\} \\
S &\triangleq diag\{s_i\}
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

Além disso, é conveniente também definir:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{L}_t(p_t, p_h) &\triangleq L_t(p_t, p_h) - I \\
\widetilde{L}_h(p_t, p_h) &\triangleq L_h(p_t, p_h) - I \\
\widetilde{Q}_h(p_h) &\triangleq Q_h(p_h)\, \Delta t
\end{aligned}
$$

2.2. Equações do Método de Newton

As equações do método de Newton para gerar uma direção de busca dada por:

$$
\Delta u = \left[\begin{array}{cccccc} \Delta p_t & \Delta p_h & \Delta \lambda & \Delta \gamma & \Delta \pi & \Delta s \end{array}\right]^T
$$

são obtidas da equação:

$$
\nabla^2 \mathcal{L}\left(p_t^k, p_h^k, \lambda^k, \gamma^k, \pi^k, s^k\right) \times \Delta u = -\nabla \mathcal{L}(p_t^k, p_h^k, \lambda^k, \gamma^k, \pi^k, s^k) \tag{2.5}
$$

onde $\nabla^2 \mathcal{L}$ é amatriz Hessiana de $\mathcal{L}$ e o expoente k indica valores das variáveis em um dado ponto de operação.

2.3. Matrix Hessiana

Os termos não nulos da Hessiana são dados por:

- Primeira linha:

$$\nabla^2_{p_t p_t} \mathcal{L} \;=\; \nabla^2 c(p_t^k) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^k \, \nabla^2_{p_t p_t} \ell_i(p_t^k, p_h^k) \triangleq W_{p_t p_t} \tag{2.6}$$

  e

$$\begin{array}{rcl} \nabla^2_{p_t p_h} \mathcal{L} & = & \sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i^k \, \nabla^2_{p_t p_h} \ell_i(p_t^k, p_h^k) \triangleq W_{p_t p_h} \\ \nabla^2_{p_t \lambda} \mathcal{L} & = & L_t^T(p_t^k, p_h^k) - I = \widetilde{L}_t^T(p_t^k, p_h^k) \\ \nabla^2_{p_t \pi} \mathcal{L} & = & F_t^T \end{array}$$

- Segunda linha:

$$\nabla^2_{p_h p_t} \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^k \, \nabla^2_{p_h p_t} \ell_i(p_t^k, p_h^k) \triangleq W_{p_t p_h}^T \tag{2.7}$$

$$\nabla^2_{p_h p_h} \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N} \left[\lambda_i^k \, \nabla^2_{p_h p_h} \ell_i(p_t^k, p_h^k) + \gamma^k \, \Delta t \, \nabla^2_{p_h p_h} \, q_i(p_h^k) \right] \triangleq W_{p_h p_h} \tag{2.8}$$

  Os demais elementos desta linha são dados por:

$$\begin{array}{rcl} \nabla^2_{p_h \lambda} \mathcal{L} & = & L_h^T(p_t^k, p_h^k) - I = \widetilde{L}_h^T(p_t^k, p_h^k) \\ \nabla^2_{p_h \gamma} \mathcal{L} & = & Q_h^T(p_h^k) \, \Delta t \, e = \widetilde{Q}_h^T(p_h^k) \, e \\ \nabla^2_{p_h \pi} \mathcal{L} & = & F_h^T \end{array}$$

- Terceira linha:

$$\begin{array}{rcl} \nabla^2_{\lambda p_t} \mathcal{L} & = & L_t(p_t^k, p_h^k) - I = \widetilde{L}_t(p_t^k, p_h^k) \\ \nabla^2_{\lambda p_h} \mathcal{L} & = & L_h(p_t^k, p_h^k) - I = \widetilde{L}_h(p_t^k, p_h^k) \end{array}$$

- Quarta linha:

$$\nabla^2_{\gamma p_h} \mathcal{L} \;=\; e^T \, Q_h(p_h^k) \, \Delta t = e^T \, \widetilde{Q}_h(p_h^k)$$

- Quinta linha:

$$\begin{array}{rcl} \nabla^2_{\pi p_t} \mathcal{L} & = & F_t \\ \nabla^2_{\pi p_h} \mathcal{L} & = & F_h \\ \nabla^2_{\pi s} \mathcal{L} & = & I \end{array}$$

- Sexta linha:

$$\begin{array}{rcl} \nabla^2_{s\pi} \mathcal{L} & = & S^k \\ \nabla^2_{ss} \mathcal{L} & = & \Pi^k \end{array}$$

2.4. Componentes do Gradiente

Os componentes do gradiente dados nas Eqs. (2.3) devem ser calculados na solução corrente k para então compor o lado direito da Eq. (2.5). Denotando por b o vetor do lado direito, têm-se portanto:

$$
\begin{aligned}
b_1 \triangleq -\nabla_{p_t}\mathcal{L} &= -\left[\nabla c(p_t^k) + (L_t^T(p_t^k, p_h^k) - I)\,\lambda^k + F_t^T\,\pi^k\right] && (2.9)\\
b_2 \triangleq -\nabla_{p_h}\mathcal{L} &= -\left[(L_h^T(p_t^k, p_h^k) - I)\,\lambda^k + \gamma^k\,\Delta t\,Q_h^T(p_h^k)\,e + F_t^T\,\pi^k\right] \\
b_3 \triangleq -\nabla_{\lambda}\mathcal{L} &= -\left[p_L + \ell(p_t^k, p_h^k) - p_t^k - p_h^k\right] \\
b_4 \triangleq -\nabla_{\gamma}\mathcal{L} &= -\left[e^T\,q(p_h^k)\,\Delta t - V_{esp}\right] \\
b_5 \triangleq -\nabla_{\overline{\pi}}\mathcal{L} &= -\left[F_t\,p_t^k + F_h\,p_h^k + s^k - p_{\lim}\right] && (2.10)\\
b_6 \triangleq -\nabla_{s}\mathcal{L} &= -\left[\Pi^k\,S^k\,e - \mu\,e = 0\right]
\end{aligned}
$$

2.5. Equação do Método de Newton na Forma Explícita Usando Ordenação por tipo de Variável

A equação básica do método de Newton é dada por:

$$\nabla^2\,\mathcal{L}^k\,\Delta u = b \tag{2.11}$$

com b dado conforme acima e

$$
\nabla^2\,\mathcal{L}^k = \begin{bmatrix}
W_{p_tp_t} & W_{p_tp_h} & \widetilde{L}_t^T(p_t^k, p_h^k) & 0 & F_t^T & 0 \\
W_{p_tp_h}^T & W_{p_hp_h} & \widetilde{L}_h^T(p_t^k, p_h^k) & \widetilde{Q}_h^T(p_h^k)\,e & F_h^T & 0 \\
\widetilde{L}_t(p_t^k, p_h^k) & \widetilde{L}_h(p_t^k, p_h^k) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & e^T\,\widetilde{Q}_h(p_h^k) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
F_t & F_h & 0 & 0 & 0 & I \\
0 & 0 & 0 & 0 & S^k & \Pi^k
\end{bmatrix}, \tag{2.12}
$$

$$\Delta u = \begin{bmatrix} \Delta p_t & \Delta p_h & \Delta\lambda & \Delta\gamma & \Delta\pi & \Delta s \end{bmatrix}^T$$

Observações:

- Considerando o fato da função-objetivo $c(p_t)$ ser separável no tempo e também que $\ell_i(p_t, p_h)$ só depende de p_{t_i} e p_{h_i}, é possível se concluir que a matriz $W_{p_tp_t}$ é diagonal. O mesmo se aplica às matrizes $W_{p_hp_h}$, $W_{p_tp_h}$,$\widetilde{L}_t$, $\widetilde{L}_h$e $\widetilde{Q}_h$;
- De (2.12), observa-se que o vetor linha $e^T\,\widetilde{Q}_h(p_h^k)$ acopla completamente as potências hidráulicas p_{h_i}, $i = 1, \ldots, N$,o que confirma o caráter intertemporal da restrição de volume.

3. Equações do Método de Newton para o Problema Primal/Dual Usando Ordenação por Intervalo de Tempo

Na seção anterior chegou-se a equações do método de Newton nas quais as incógnitas no vetor u foram organizadas de acordo com o tipo de variável. Nesta seção, as mesmas equações serão re-escritas ordenando-se as incógnitas por intervalo de tempo.

Considere portanto que as variáveis do problema que variam com o tempo são organizadas em cada intervalo como:

$$x_i \triangleq \begin{bmatrix} p_{t_i} & p_{h_i} & \lambda_i & \pi_i & s_i \end{bmatrix}^T$$

Conseqüentemente, o vetor de incógnitas u da Seção 2 será re-ordenado como:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N & \gamma \end{bmatrix}^T$$

Note que o multiplicador de Lagrange γ ocupa a última posição em x por ser a única variável que não varia com o tempo. As equações são também re-ordenadas na forma:

$$\begin{bmatrix} \nabla^2_{x_1x_1}\mathcal{L} & \nabla^2_{x_1x_2}\mathcal{L} & \cdots & \nabla^2_{x_1\gamma}\mathcal{L} & \cdots & \nabla^2_{\gamma x_1}\mathcal{L} & \nabla^2_{\gamma x_1}\mathcal{L} & \cdots & \nabla^2_{\gamma\gamma}\mathcal{L} \end{bmatrix}^T$$

e o vetor do lado direito, b, deve também ser re-ordenado correspondentemente. Denotaremos por b_M o resultado desta re-ordenação.

Com a nova ordenação de variáveis e equações, a equação matricial do método de Newton da Eq. (2.11) assume a forma:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} M_1 & & & & \\ & M_2 & & & r^T \\ & & \ddots & & \\ & & & M_N & \\ \hline & & r & & \end{array}\right] \times \Delta x = b_M \tag{3.1}$$

onde as matrizes M_i, $i = 1, \ldots, N$, têm estrutura similar à da matriz de um problema de FPO convencional, e envolve apenas variáveis do intervalo i, isto é, as variáveis do subvetor x_i. O vetor r na Eq. (3.1), por outro lado, depende da matriz Q_h definida em (2.4). Observe que, não fosse pela presença de r, os N problemas de FPO expressos pelas matrizes M_i, um para cada intervalo de tempo, seriam totalmente desacoplados. Em outras palavras, a presença da restrição de volume é a única razão pela qual a solução para o problema expresso pela Eq. (3.1) não pode ser obtida resolvendo-se N FPOs independentes.