Representação de Estado do Sistema Máquina - Barra Infinita e Realimentação Dinâmica da Saída via ESP

Prof. Antonio Simões Costa

GSP- UFSC

As formas mais comuns de se representar sistemas dinâmicos lineares e invariantes no tempo são:

- Funções de transferência:

As formas mais comuns de se representar sistemas dinâmicos lineares e invariantes no tempo são:

- Funções de transferência:
    - Considera apenas à relação entre saída e entrada do sistema, sem considerar variáveis internas;

Representação de Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

As formas mais comuns de se representar sistemas dinâmicos lineares e invariantes no tempo são:

- Funções de transferência:
    - Considera apenas à relação entre saída e entrada do sistema, sem considerar variáveis internas;
    - Representação através de funções racionais, no domínio da frequência;

Representação de Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

As formas mais comuns de se representar sistemas dinâmicos lineares e invariantes no tempo são:

- Funções de transferência:
  - Considera apenas à relação entre saída e entrada do sistema, sem considerar variáveis internas;
  - Representação através de funções racionais, no domínio da frequência;
- Representação de estado:

Representação de Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

As formas mais comuns de se representar sistemas dinâmicos lineares e invariantes no tempo são:

- Funções de transferência:
  - Considera apenas à relação entre saída e entrada do sistema, sem considerar variáveis internas;
  - Representação através de funções racionais, no domínio da frequência;
- Representação de estado:
  - Representa as variáveis internas relevantes do sistema *(estados)*, bem como suas variáveis de entrada e saída;

Representação de Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

As formas mais comuns de se representar sistemas dinâmicos lineares e invariantes no tempo são:

- Funções de transferência:
    - Considera apenas à relação entre saída e entrada do sistema, sem considerar variáveis internas;
    - Representação através de funções racionais, no domínio da frequência;
- Representação de estado:
    - Representa as variáveis internas relevantes do sistema *(estados)*, bem como suas variáveis de entrada e saída;
    - É explicitada através de:

Representação de Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

As formas mais comuns de se representar sistemas dinâmicos lineares e invariantes no tempo são:

- Funções de transferência:
  - Considera apenas à relação entre saída e entrada do sistema, sem considerar variáveis internas;
  - Representação através de funções racionais, no domínio da frequência;
- Representação de estado:
  - Representa as variáveis internas relevantes do sistema *(estados)*, bem como suas variáveis de entrada e saída;
  - É explicitada através de:
    - um conjunto de *equações diferenciais* de 1a. ordem, no domínio do tempo *(Equação de Estado)* e

Representação de Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

As formas mais comuns de se representar sistemas dinâmicos lineares e invariantes no tempo são:

- Funções de transferência:
  - Considera apenas à relação entre saída e entrada do sistema, sem considerar variáveis internas;
  - Representação através de funções racionais, no domínio da frequência;
- Representação de estado:
  - Representa as variáveis internas relevantes do sistema *(estados)*, bem como suas variáveis de entrada e saída;
  - É explicitada através de:
    - um conjunto de *equações diferenciais* de 1a. ordem, no domínio do tempo *(Equação de Estado)* e
    - *equações algébricas* relacionando saídas, estados e entradas *(Equação da Saída)*.

A representação de estado

- As variáveis de estado definidas para um sistema devem ser as variáveis que *guardam a memória* do sistema;

A representação de estado

- As variáveis de estado definidas para um sistema devem ser as variáveis que *guardam a memória* do sistema;
- Os estados são as *variáveis dependentes das equações diferenciais* que representam o sistema (para as quais condições iniciais são necessárias quando se consideram sistemas não-relaxados inicialmente);

A representação de estado

- As variáveis de estado definidas para um sistema devem ser as variáveis que *guardam a memória* do sistema;
- Os estados são as *variáveis dependentes das equações diferenciais* que representam o sistema (para as quais condições iniciais são necessárias quando se consideram sistemas não-relaxados inicialmente);
- As *entradas* são as variáveis que correspondem a estímulos externos aplicados ao sistema;

A representação de estado

- As variáveis de estado definidas para um sistema devem ser as variáveis que *guardam a memória* do sistema;
- Os estados são as *variáveis dependentes das equações diferenciais* que representam o sistema (para as quais condições iniciais são necessárias quando se consideram sistemas não-relaxados inicialmente);
- As *entradas* são as variáveis que correspondem a estímulos externos aplicados ao sistema;
- A equação de estado para um dado sistema tem a forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u}$$

A representação de estado

- As variáveis de estado definidas para um sistema devem ser as variáveis que *guardam a memória* do sistema;
- Os estados são as *variáveis dependentes das equações diferenciais* que representam o sistema (para as quais condições iniciais são necessárias quando se consideram sistemas não-relaxados inicialmente);
- As *entradas* são as variáveis que correspondem a estímulos externos aplicados ao sistema;
- A equação de estado para um dado sistema tem a forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u}$$

- A equação da saída relaciona as variáveis de saída desejadas para o sistema aos estados e entradas:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\,\mathbf{x} + \mathbf{D}\,\mathbf{u}$$

Características e vantagens da representação de estado

- Fornece acesso a variáveis internas do sistema $\Rightarrow$ maior discernimento sobre a estrutura do sistema;

Características e vantagens da representação de estado

- Fornece acesso a variáveis internas do sistema $\Rightarrow$ maior discernimento sobre a estrutura do sistema;
- No caso linear, a representação de estados é expressa na forma matricial, e portanto:

Características e vantagens da representação de estado

- Fornece acesso a variáveis internas do sistema $\Rightarrow$ maior discernimento sobre a estrutura do sistema;
- No caso linear, a representação de estados é expressa na forma matricial, e portanto:
    - composição de diferentes sistemas pode ser obtida via operações matriciais, facilitada pela disponibilidade de software especializado (Matlab, Scilab, Mathematica, etc.);

Características e vantagens da representação de estado

- Fornece acesso a variáveis internas do sistema $\Rightarrow$ maior discernimento sobre a estrutura do sistema;
- No caso linear, a representação de estados é expressa na forma matricial, e portanto:
  - composição de diferentes sistemas pode ser obtida via operações matriciais, facilitada pela disponibilidade de software especializado (Matlab, Scilab, Mathematica, etc.);
  - Análise de diferentes propriedades (estabilidade, controlabilidade, observabilidade) executada via operações matriciais;

Características e vantagens da representação de estado

- Fornece acesso a variáveis internas do sistema $\Rightarrow$ maior discernimento sobre a estrutura do sistema;
- No caso linear, a representação de estados é expressa na forma matricial, e portanto:
    - composição de diferentes sistemas pode ser obtida via operações matriciais, facilitada pela disponibilidade de software especializado (Matlab, Scilab, Mathematica, etc.);
    - Análise de diferentes propriedades (estabilidade, controlabilidade, observabilidade) executada via operações matriciais;
- Simulação do sistema a partir da representação de estados é imediata.

Detalhes da representação de estado

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\,\mathbf{x} + \mathbf{D}\,\mathbf{u} \end{aligned}$$

- O número de variáveis de estado, n, é maior ou igual (geralmente maior) do que o número de entradas, p, e o número de saídas, q;

Detalhes da representação de estado

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\,\mathbf{x} + \mathbf{D}\,\mathbf{u} \end{aligned}$$

- O número de variáveis de estado, n, é maior ou igual (geralmente maior) do que o número de entradas, p, e o número de saídas, q;
- As dimensões das matrizes da representação de estado são:

$$\mathbf{A} : n \times n \qquad \mathbf{B} : n \times p$$

$$\mathbf{C} : q \times n \qquad \mathbf{D} : q \times p$$

Detalhes da representação de estado

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\,\mathbf{x} + \mathbf{D}\,\mathbf{u} \end{aligned}$$

- O número de variáveis de estado, n, é maior ou igual (geralmente maior) do que o número de entradas, p, e o número de saídas, q;
- As dimensões das matrizes da representação de estado são:

$$\mathbf{A} : n \times n \qquad \mathbf{B} : n \times p$$

$$\mathbf{C} : q \times n \qquad \mathbf{D} : q \times p$$

- Matriz **D** será não-nula apenas quando há transmissão direta da entrada para a saída (o que corresponde a FTs em que o grau do numerador é igual ao grau do denominador).

Sistemas de uma entrada e uma saída

- Neste caso, $p = q = 1$;

Sistemas de uma entrada e uma saída

- Neste caso, $p = q = 1$;
- Consequentemente:

Sistemas de uma entrada e uma saída

- Neste caso, $p = q = 1$;
- Consequentemente:
  - matriz $\mathbf{B}$ reduz-se a um vetor-coluna $\mathbf{b}$ $(n \times 1)$;

Sistemas de uma entrada e uma saída

- Neste caso, $p = q = 1$;
- Consequentemente:
  - matriz **B** reduz-se a um vetor-coluna **b** $(n \times 1)$;
  - matriz **C** reduz-se a um vetor-linha **c** $(1 \times n)$;

Sistemas de uma entrada e uma saída

- Neste caso, $p = q = 1$;
- Consequentemente:
  - matriz $\mathbf{B}$ reduz-se a um vetor-coluna $\mathbf{b}$ $(n \times 1)$;
  - matriz $\mathbf{C}$ reduz-se a um vetor-linha $\mathbf{c}$ $(1 \times n)$;
  - matriz $\mathbf{D}$ reduz-se a um escalar d.

Sistemas de uma entrada e uma saída

- Neste caso, $p = q = 1$;
- Consequentemente:
  - matriz $\mathbf{B}$ reduz-se a um vetor-coluna $\mathbf{b}$ $(n \times 1)$;
  - matriz $\mathbf{C}$ reduz-se a um vetor-linha $\mathbf{c}$ $(1 \times n)$;
  - matriz $\mathbf{D}$ reduz-se a um escalar d.
- A representação de estado neste caso é escrita como:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,u \\
y &= \mathbf{c}\,\mathbf{x} + d\,u
\end{aligned}
$$

Conversão de representações: de FT para repres. de estado

- A conversão de uma FT para a representação de estado é chamada *realização* da FT;

Conversão de representações: de FT para repres. de estado

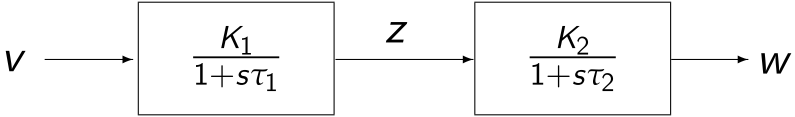
- A conversão de uma FT para a representação de estado é chamada *realização* da FT;
- Como primeiro passo, a representação via FT do sistema é convertida para equações diferenciais no domínio do tempo;

- A conversão de uma FT para a representação de estado é chamada *realização* da FT;
- Como primeiro passo, a representação via FT do sistema é convertida para equações diferenciais no domínio do tempo;
- Estas equações diferenciais são em seguida reescritas na forma da representação de estados;

Conversão de representações: de FT para repres. de estado

- A conversão de uma FT para a representação de estado é chamada *realização* da FT;
- Como primeiro passo, a representação via FT do sistema é convertida para equações diferenciais no domínio do tempo;
- Estas equações diferenciais são em seguida reescritas na forma da representação de estados;
- Em sistemas representados via interconexão de FTs de seus componentes em diagrama de blocos, a representação de estados pode ser obtida interconectando-se as realizações das FTs dos componentes individuais.

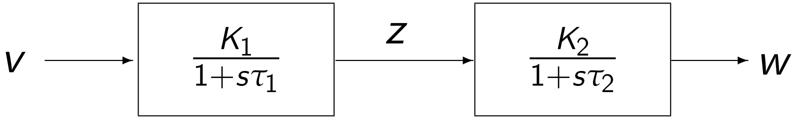
Exemplo de realização (I)



- A partir da FT do primeiro bloco, podemos escrever no domínio do tempo:

$$\tau_1 \ \dot{z} + z = K_1 \ v \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = -\frac{1}{\tau_1} \ z + \frac{K_1}{\tau_1} \ v$$

Exemplo de realização (I)



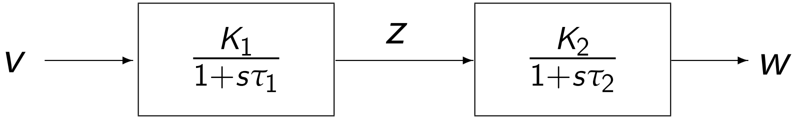
- A partir da FT do primeiro bloco, podemos escrever no domínio do tempo:

$$\tau_1 \; \dot{z} + z = K_1 \; v \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = -\frac{1}{\tau_1} \; z + \frac{K_1}{\tau_1} \; v$$

- Similarmente, para o segundo bloco:

$$\tau_2 \; \dot{w} + w = K_2 \; z \quad \Rightarrow \quad \dot{w} = -\frac{1}{\tau_2} \; w + \frac{K_2}{\tau_2} \; z$$

Exemplo de realização (I)



- A partir da FT do primeiro bloco, podemos escrever no domínio do tempo:

$$\tau_1 \; \dot{z} + z = K_1 \; v \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = -\frac{1}{\tau_1} \; z + \frac{K_1}{\tau_1} \; v$$

- Similarmente, para o segundo bloco:

$$\tau_2 \; \dot{w} + w = K_2 \; z \quad \Rightarrow \quad \dot{w} = -\frac{1}{\tau_2} \; w + \frac{K_2}{\tau_2} \; z$$

- Claramente, os estados, entrada e saída são:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & \stackrel{\Delta}{=} & z & u & \stackrel{\Delta}{=} & v \\ x_2 & \stackrel{\Delta}{=} & w & y & \stackrel{\Delta}{=} & w \end{array}$$

Exemplo de realização (II)

- As equações diferenciais que descrevem o sistema são:

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= -\frac{1}{\tau_1}\, z + \frac{K_1}{\tau_1}\, v \\
\dot{w} &= \frac{K_2}{\tau_2}\, z - \frac{1}{\tau_2}\, w
\end{aligned}
$$

Exemplo de realização (II)

- As equações diferenciais que descrevem o sistema são:

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= -\frac{1}{\tau_1}\, z + \frac{K_1}{\tau_1}\, v \\
\dot{w} &= \frac{K_2}{\tau_2}\, z - \frac{1}{\tau_2}\, w
\end{aligned}$$

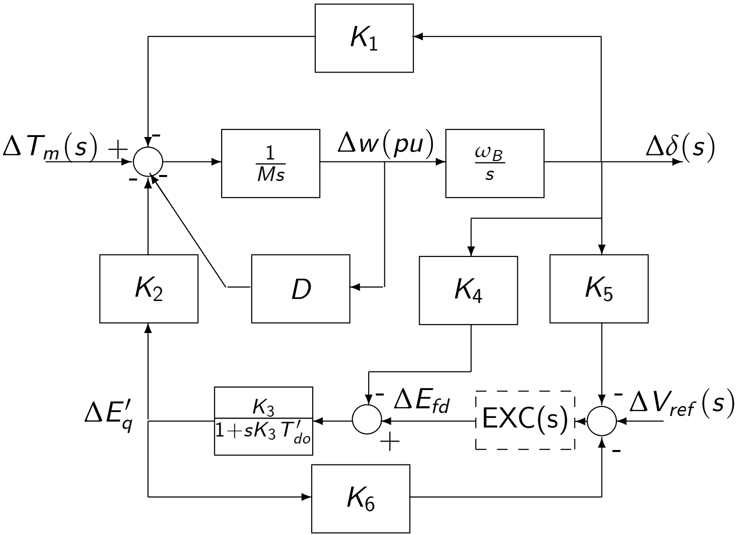
- Com as definições

$$x_1 \stackrel{\Delta}{=} z, \quad x_2 \stackrel{\Delta}{=} w, \quad u \stackrel{\Delta}{=} v, \quad y \stackrel{\Delta}{=} w = x_2.$$

temos:

$$\boxed{\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1/\tau_1 & 0 \\ K_2/\tau_2 & -1/\tau_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1/\tau_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}}$$

Sistema máq.-barra infinita - Modelo de Heffron-Phillips



Equações do modelo de H-P

- Equações do modelo *H-P* para sistema máquina-barra ∞ :

$$
\begin{aligned}
2H\,\frac{d\,\Delta\omega_G}{dt} + D\,\Delta\omega_G &= \Delta T_m - \left(K_1\,\Delta\delta + K_2\,\Delta E'_q\right) \\
\Delta\dot{\delta} &= 2\pi f^0 \times \Delta\omega_G(t) \\
K_3\,T'_{do}\,\frac{d\,\Delta E'_q}{dt} + \Delta E'_q &= K_3(\Delta E_{fd} - K_4\Delta\delta)
\end{aligned}
$$

Equações do modelo de H-P

- Equações do modelo *H-P* para sistema máquina-barra ∞ :

$$\begin{aligned}
2H\,\frac{d\,\Delta\omega_G}{dt} + D\,\Delta\omega_G &= \Delta T_m - \left(K_1\,\Delta\delta + K_2\,\Delta E'_q\right) \\
\dot{\Delta\delta} &= 2\pi f^0 \times \Delta\omega_G(t) \\
K_3\,T'_{do}\,\frac{d\,\Delta E'_q}{dt} + \Delta E'_q &= K_3(\Delta E_{fd} - K_4\Delta\delta)
\end{aligned}$$

- Equação do sistema de excitação:

$$T_\epsilon\,\frac{d\,\Delta E_{fd}}{dt} + \Delta E_{fd} = K_\epsilon\left[\Delta V_{ref} - \left(K_5\,\Delta\delta + K_6\,\Delta E'_q\right)\right]$$

Equações do modelo de H-P

- Equações do modelo *H-P* para sistema máquina-barra ∞ :

$$
\begin{aligned}
2H\,\frac{d\,\Delta\omega_G}{dt} + D\,\Delta\omega_G &= \Delta T_m - \left(K_1\,\Delta\delta + K_2\,\Delta E'_q\right) \\
\dot{\Delta\delta} &= 2\pi f^0 \times \Delta\omega_G(t) \\
K_3\,T'_{do}\,\frac{d\,\Delta E'_q}{dt} + \Delta E'_q &= K_3(\Delta E_{fd} - K_4\Delta\delta)
\end{aligned}
$$

- Equação do sistema de excitação:

$$
T_\epsilon\,\frac{d\,\Delta E_{fd}}{dt} + \Delta E_{fd} = K_\epsilon\left[\Delta V_{ref} - \left(K_5\,\Delta\delta + K_6\,\Delta E'_q\right)\right]
$$

- Obs: Note que todas as variáveis que não são estados e entradas (por ex., ΔT_e, Δe_t) devem ser escritas em função de estados e/ou entradas.

Representação de Estado do modelo H-P + Sist. Excitação

- O modelo do processo a ser controlado é composto do modelo H-P para o sistema máquina-barra ∞ + sistema de excitação:

$$
\begin{aligned}
2H \, \frac{d\,\Delta\omega_G}{dt} + D\,\Delta\omega_G &= \Delta T_m - \left(K_1\,\Delta\delta + K_2\,\Delta E'_q\right) \\
\frac{d\ \ \Delta\delta}{dt} &= 2\pi f^0 \times \Delta\omega_G(t) \\
K_3\,T'_{do}\,\frac{d\,\Delta E'_q}{dt} + \Delta E'_q &= K_3(\Delta E_{fd} - K_4\Delta\delta) \\
T_\epsilon\,\frac{d\,\Delta E_{fd}}{dt} + \Delta E_{fd} &= K_\epsilon\left[\Delta V_{ref} - \left(K_5\,\Delta\delta + K_6\,\Delta E'_q\right)\right]
\end{aligned}
$$

Representação de Estado do modelo H-P + Sist. Excitação

- O modelo do processo a ser controlado é composto do modelo H-P para o sistema máquina-barra ∞ + sistema de excitação:

$$
\begin{aligned}
2H\,\frac{d\,\Delta\omega_G}{dt} + D\,\Delta\omega_G &= \Delta T_m - \left(K_1\,\Delta\delta + K_2\,\Delta E'_q\right)\\
\frac{d\ \ \Delta\delta}{dt} &= 2\pi f^0 \times\ \Delta\omega_G(t)\\
K_3\,T'_{do}\,\frac{d\,\Delta E'_q}{dt} + \Delta E'_q &= K_3(\Delta E_{fd} - K_4\Delta\delta)\\
T_\epsilon\,\frac{d\,\Delta E_{fd}}{dt} + \Delta E_{fd} &= K_\epsilon\left[\Delta V_{ref} - \left(K_5\,\Delta\delta + K_6\,\Delta E'_q\right)\right]
\end{aligned}
$$

- A entrada é V_{ref}, e os estados são as variáveis dependentes nas equações diferenciais acima, que serão ordenadas como (por conveniência, o símbolo Δ é omitido):

$$
x_1 = \omega_G \qquad x_2 = \delta \qquad x_3 = E'_q \qquad x_4 = E_{fd}
$$

- O modelo do processo a ser controlado é composto do modelo H-P para o sistema máquina-barra ∞ + sistema de excitação:

$$
\begin{aligned}
2H\,\frac{d\,\Delta\omega_G}{dt} + D\,\Delta\omega_G &= \Delta T_m - \left(K_1\,\Delta\delta + K_2\,\Delta E'_q\right)\\
\frac{d\ \ \Delta\delta}{dt} &= 2\pi f^0 \times \Delta\omega_G(t)\\
K_3\,T'_{do}\,\frac{d\,\Delta E'_q}{dt} + \Delta E'_q &= K_3(\Delta E_{fd} - K_4\Delta\delta)\\
T_\epsilon\,\frac{d\,\Delta E_{fd}}{dt} + \Delta E_{fd} &= K_\epsilon\left[\Delta V_{ref} - \left(K_5\,\Delta\delta + K_6\,\Delta E'_q\right)\right]
\end{aligned}
$$

- A entrada é V_{ref}, e os estados são as variáveis dependentes nas equações diferenciais acima, que serão ordenadas como (por conveniência, o símbolo Δ é omitido):

$$x_1 = \omega_G \qquad x_2 = \delta \qquad x_3 = E'_q \qquad x_4 = E_{fd}$$

- A representação de estados é obtida explicitando-se as derivadas destas variáveis em termos dos estados e entrada.

Sistema máquina-barra infinita: Equação de Estado

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_G \\ \dot{\delta} \\ \dot{E}'_q \\ \dot{E}_{fd} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -D/M & -K_1/M & -K_2/M & 0 \\ 2\pi f^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_4/T'_{do} & -1/K_3 T'_{do} & -1/T'_{do} \\ 0 & -K_5 K_\epsilon/T_\epsilon & -K_6 K_\epsilon/T_\epsilon & -1/T_\epsilon \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \omega_G \\ \delta \\ E'_q \\ E_{fd} \end{bmatrix} +$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ K_\epsilon/T_\epsilon \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} V_{ref}$$

Sistema máquina-barra infinita: Equação da Saída

- Depende da definição das saídas (variáveis mensuráveis) do sistema;

Sistema máquina-barra infinita: Equação da Saída

- Depende da definição das saídas (variáveis mensuráveis) do sistema;
- No caso de ESP derivado da velocidade, por exemplo, a saída deve ser definida como ω_G, isto é:

$$y = c\,\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_G \\ \delta \\ E'_q \\ E_{fd} \end{bmatrix}$$

Sistema máquina-barra infinita: Equação da Saída

- Depende da definição das saídas (variáveis mensuráveis) do sistema;
- No caso de ESP derivado da velocidade, por exemplo, a saída deve ser definida como ω_G, isto é:

$$y = c\,\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_G \\ \delta \\ E'_q \\ E_{fd} \end{bmatrix}$$

- No caso de ESP derivado de $(-P_e)$, temos

$$y = c\,\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & -K_1 & -K_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_G \\ \delta \\ E'_q \\ E_{fd} \end{bmatrix}$$

Representação de estado do controlador (ESP)

- Função de Transferência:

$$ESP(s) = K_{ESP} \times \frac{(1 + s\ \tau_1)^2}{(1 + s\ \tau_2)^2}$$

Representação de estado do controlador (ESP)

- Função de Transferência:

$$ESP(s) = K_{ESP} \times \frac{(1 + s\ \tau_1)^2}{(1 + s\ \tau_2)^2}$$

- Representação de estado:

- Função de Transferência:

$$ESP(s) = K_{ESP} \times \frac{(1 + s\ \tau_1)^2}{(1 + s\ \tau_2)^2}$$

- Representação de estado:
  - Como o controlador proposto tem 2 polos, a <u>equação de estado</u> é de 2a. ordem. Será dada por:

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c\ \mathbf{x}_c + \mathbf{b}_c\ u_c$$

Representação de estado do controlador (ESP)

- Função de Transferência:

$$ESP(s) = K_{ESP} \times \frac{(1 + s\ \tau_1)^2}{(1 + s\ \tau_2)^2}$$

- Representação de estado:
  - Como o controlador proposto tem 2 polos, a equação de estado é de 2a. ordem. Será dada por:

$$\overset{\bullet}{\mathbf{x}}_c \quad = \quad \mathbf{A}_c\ \mathbf{x}_c \quad + \quad \mathbf{b}_c\ u_c$$

  - Equação da saída - Como a FT é tal que (grau do numerador) = (grau do denominador), então $d \neq 0$:

$$y_c \quad = \quad \mathbf{c}_c\ \mathbf{x}_c \quad + \quad d_c\ u_c$$

Realização da FT do controlador (ESP)

- Equação de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{c1} \\ \dot{x}_{c2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1/\tau_2 & 0 \\ (\tau_2-\tau_1)/\tau_2^2 & -1/\tau_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_c} \begin{bmatrix} x_{c1} \\ x_{c2} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_{ESP}\ (\tau_2-\tau_1)/\tau_2^2 \\ K_{ESP}\ \tau_1(\tau_2-\tau_1)/\tau_2^3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_c} u_c$$

Realização da FT do controlador (ESP)

- Equação de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{c1} \\ \dot{x}_{c2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1/\tau_2 & 0 \\ (\tau_2 - \tau_1)/\tau_2^2 & -1/\tau_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_c} \begin{bmatrix} x_{c1} \\ x_{c2} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_{ESP}\ (\tau_2 - \tau_1)/\tau_2^2 \\ K_{ESP}\ \tau_1(\tau_2 - \tau_1)/\tau_2^3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_c} u_c$$

- Equação da saída:

$$y_c = \underbrace{\begin{bmatrix} \tau_1/\tau_2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_c} \begin{bmatrix} x_{c1} \\ x_{c2} \end{bmatrix} + \underbrace{\left[K_{ESP}\ (\tau_1/\tau_2)^2\right]}_{d_c} u_c$$

Sistema em Malha Fechada

- Processo:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,u \\
y &= \mathbf{c}\,\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

Sistema em Malha Fechada

- Processo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,u \\ y &= \mathbf{c}\,\mathbf{x} \end{aligned}$$

- Controlador:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_c &= \mathbf{A}_c\,\mathbf{x}_c + \mathbf{b}_c\,u_c \\ y_c &= \mathbf{c}_c\,\mathbf{x}_c + d_c\,u_c \end{aligned}$$

Sistema em Malha Fechada

- Processo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,u \\ y &= \mathbf{c}\,\mathbf{x} \end{aligned}$$

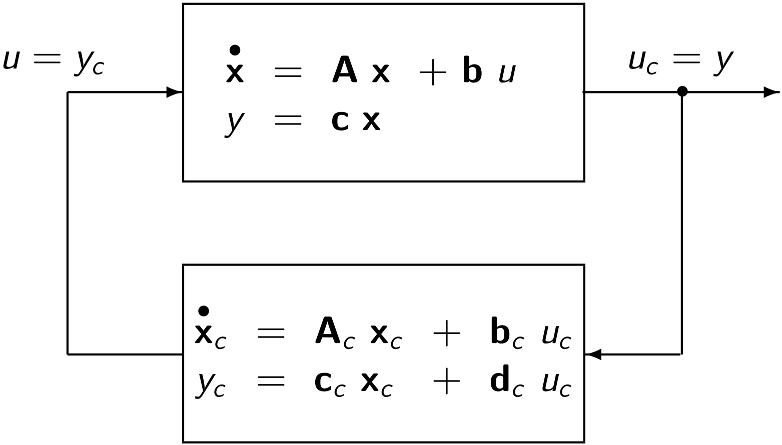
- Controlador:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_c &= \mathbf{A}_c\,\mathbf{x}_c + \mathbf{b}_c\,u_c \\ y_c &= \mathbf{c}_c\,\mathbf{x}_c + d_c\,u_c \end{aligned}$$

- Realimentação dinâmica da saída:

$$\begin{aligned} u &= y_c \\ u_c &= y \end{aligned}$$

Conexão Processo + Controlador em Malha Fechada



Sistema em MF: equação de estado do processo

- Na *equação de estado do processo*, considerando que $u = y_c$, temos:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\ \mathbf{x} + \mathbf{b}\ y_c \\ &= \mathbf{A}\ \mathbf{x} + \mathbf{b}\ (\mathbf{c_c}\ \mathbf{x_c} + d_c\ u_c) \end{aligned}$$

Sistema em MF: equação de estado do processo

- Na *equação de estado do processo*, considerando que $u = y_c$, temos:

$$\begin{aligned}\overset{\bullet}{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\ \mathbf{x} + \mathbf{b}\ y_c \\ &= \mathbf{A}\ \mathbf{x} + \mathbf{b}\ (\mathbf{c_c}\ \mathbf{x_c} + d_c\ u_c)\end{aligned}$$

- Como a entrada do controlador u_c é igual à saída do processo y:

$$\overset{\bullet}{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\ \mathbf{x} + \mathbf{b}\ \mathbf{c_c}\ \mathbf{x_c} + \mathbf{b}\ d_c\ \mathbf{c}\ \mathbf{x}$$

ou

$$\boxed{\overset{\bullet}{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{b}\ d_c\ \mathbf{c})\ \mathbf{x} + (\mathbf{b}\ \mathbf{c_c})\ \mathbf{x_c}}$$

Sistema em MF: equação de estado do controlador

- Considerando agora na *equação de estado do controlador* que $u_c = y$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_c &= \mathbf{A}_c \ \mathbf{x}_c + \mathbf{b}_c \ y \\ &= \mathbf{A}_c \ \mathbf{x}_c + \mathbf{b}_c \ \mathbf{c} \ \mathbf{x} \end{aligned}$$

ou

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{b}_c \ \mathbf{c} \ \mathbf{x} + \mathbf{A}_c \ \mathbf{x}_c}$$

Representação de estado do Sistema em Malha Fechada

- As equações de estado da conexão em realimentação do sistema (processo + controlador) deduzidas acima são:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} + \mathbf{b}\ d_c\ \mathbf{c})\ \mathbf{x} + (\mathbf{b}\ \mathbf{c_c})\ \mathbf{x_c} \\
\dot{\mathbf{x}}_c &= \mathbf{b}_c\ \mathbf{c}\ \mathbf{x} + \mathbf{A}_c\ \mathbf{x}_c
\end{aligned}
$$

- As equações de estado da conexão em realimentação do sistema (processo + controlador) deduzidas acima são:

$$\begin{aligned} \overset{\bullet}{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} + \mathbf{b}\ d_c\ \mathbf{c})\ \mathbf{x} + (\mathbf{b}\ \mathbf{c_c})\ \mathbf{x_c} \\ \overset{\bullet}{\mathbf{x}}_c &= \mathbf{b}_c\ \mathbf{c}\ \mathbf{x} + \mathbf{A}_c\ \mathbf{x}_c \end{aligned}$$

- Definindo o vetor de estado do sistema composto como

$$\mathbf{x}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \mathbf{x}_c^T \end{bmatrix}^T$$

temos

$$\overset{\bullet}{\mathbf{x}}_a = \begin{bmatrix} \overset{\bullet}{\mathbf{x}} \\ \overset{\bullet}{\mathbf{x}}_c \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} + \mathbf{b}\ d_c\ \mathbf{c} & \mathbf{b}\ \mathbf{c_c} \\ \hline \mathbf{b}_c\ \mathbf{c} & \mathbf{A}_c \end{array}\right] \mathbf{x}_a$$

Matriz de Estado e Estabilidade do Sistema em Malha Fechada

- A matriz de estado do sistema em malha fechada é

$$\mathbf{A}_{MF} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} + \mathbf{b}\ d_c\ \mathbf{c} & \mathbf{b}\ \mathbf{c_c} \\ \hline \mathbf{b}_c\ \mathbf{c} & \mathbf{A}_c \end{array}\right]$$

Matriz de Estado e Estabilidade do Sistema em Malha Fechada

- A matriz de estado do sistema em malha fechada é

$$\mathbf{A}_{MF} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} + \mathbf{b}\ d_c\ \mathbf{c} & \mathbf{b}\ \mathbf{c_c} \\ \hline \mathbf{b}_c\ \mathbf{c} & \mathbf{A}_c \end{array}\right]$$

- Portanto, pode-se concluir sobre a estabilidade do sistema em malha fechada analisando-se o sinal da parte real dos *autovalores de* $\mathbf{A}_{MF}$.

Extensão para o caso multimáquinas: modelo do processo

- Considera-se o caso em que o modelo *H-P* é generalizado para representar sistemas multimáquinas (programa **HPGSC**);

Extensão para o caso multimáquinas: modelo do processo

- Considera-se o caso em que o modelo *H-P* é generalizado para representar sistemas multimáquinas (programa **HPGSC**);
- Neste caso, o vetor de estado do processo *(sist. multimáquinas* $+$ *sists. excitação)* é uma generalização do caso máq.-barra ∞;

Extensão para o caso multimáquinas: modelo do processo

- Considera-se o caso em que o modelo *H-P* é generalizado para representar sistemas multimáquinas (programa **HPGSC**);
- Neste caso, o vetor de estado do processo *(sist. multimáquinas + sists. excitação)* é uma generalização do caso máq.-barra ∞;
- O vetor de estado gerado por **HPGSC** é $4n_g \times 1$ e definido como:

$$\mathbf{x} \triangleq \begin{bmatrix} \omega_{G_1}, \omega_{G_2}, \ldots, \omega_{G_{ng}}, & \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n_g}, \\ E'_{q1}, E'_{q2}, \ldots, E'_{q,n_g}, & E_{fd1}, E_{fd2}, \ldots, E_{fd,n_g} \end{bmatrix}^T$$

Extensão para o caso multimáquinas: modelo do processo

- Considera-se o caso em que o modelo *H-P* é generalizado para representar sistemas multimáquinas (programa **HPGSC**);
- Neste caso, o vetor de estado do processo *(sist. multimáquinas + sists. excitação)* é uma generalização do caso máq.-barra ∞;
- O vetor de estado gerado por **HPGSC** é $4n_g \times 1$ e definido como:

$$\mathbf{x} \triangleq \left[\begin{array}{ll} \omega_{G_1}, \omega_{G_2}, \ldots, \omega_{G_{n_g}}, & \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n_g}, \\ E'_{q1}, E'_{q2}, \ldots, E'_{q,n_g}, & E_{fd1}, E_{fd2}, \ldots, E_{fd,n_g} \end{array} \right]^T$$

- O vetor de entradas é dado por:

$$\mathbf{u} \triangleq \left[\; V_{ref,1}, \quad V_{ref,2}, \quad \ldots, \quad V_{ref,n_g} \; \right]^T$$

- Considera-se o caso em que o modelo *H-P* é generalizado para representar sistemas multimáquinas (programa **HPGSC**);
- Neste caso, o vetor de estado do processo *(sist. multimáquinas + sists. excitação)* é uma generalização do caso máq.-barra ∞;
- O vetor de estado gerado por **HPGSC** é $4n_g \times 1$ e definido como:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{x} & \triangleq & [\;\; \omega_{G_1}, \omega_{G_2}, \ldots, \omega_{G_{n_g}}, \quad \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n_g}, \\ & & \;\;\; E'_{q1}, E'_{q2}, \ldots, E'_{q,n_g}, \quad E_{fd1}, E_{fd2}, \ldots, E_{fd,n_g}]^T \end{array}$$

- O vetor de entradas é dado por:

$$\mathbf{u} \triangleq [\; V_{ref,1}, \quad V_{ref,2}, \quad \ldots, \quad V_{ref,n_g} \;]^T$$

- Matriz **B** será $4n_g \times n_g$ (uma coluna por máquina);

Extensão para o caso multimáquinas: modelo do processo

- Considera-se o caso em que o modelo *H-P* é generalizado para representar sistemas multimáquinas (programa **HPGSC**);
- Neste caso, o vetor de estado do processo *(sist. multimáquinas + sists. excitação)* é uma generalização do caso máq.-barra ∞;
- O vetor de estado gerado por **HPGSC** é $4n_g \times 1$ e definido como:

$$\mathbf{x} \triangleq \begin{bmatrix} \omega_{G_1}, \omega_{G_2}, \ldots, \omega_{G_{n_g}}, & \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n_g}, \\ E'_{q1}, E'_{q2}, \ldots, E'_{q,n_g}, & E_{fd1}, E_{fd2}, \ldots, E_{fd,n_g} \end{bmatrix}^T$$

- O vetor de entradas é dado por:

$$\mathbf{u} \triangleq \begin{bmatrix} V_{ref,1}, & V_{ref,2}, & \ldots, & V_{ref,n_g} \end{bmatrix}^T$$

- Matriz **B** será $4n_g \times n_g$ (uma coluna por máquina);
- Matriz de saídas **C** depende do número de geradores equipados com *ESP*, e tem dimensão $n_{ESP} \times 4n_g$.

Extensão para o caso multimáquinas: modelo do controlador

- O controle é desacoplado por máquina: cada *ESP* atua apenas sobre o respectivo gerador;

Extensão para o caso multimáquinas: modelo do controlador

- O controle é desacoplado por máquina: cada *ESP* atua apenas sobre o respectivo gerador;
- Controladores individuais continuarão a ser de 1 entrada e 1 saída;

Extensão para o caso multimáquinas: modelo do controlador

- O controle é desacoplado por máquina: cada *ESP* atua apenas sobre o respectivo gerador;
- Controladores individuais continuarão a ser de 1 entrada e 1 saída;
- Se a representação de estado do *ESP da i-ésima* máquina é definida como:

$$\begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}_{c,i} & = & \mathbf{A}_{c,i}\ \mathbf{x}_{c,i} + \mathbf{b}_{c,i}\ u_{c,i} \\ y_{c,i} & = & \mathbf{c}_{c,i}\ \mathbf{x}_{c,i} + d_{c,i}\ u_{c,i} \end{array}$$

então as leis de controle em malha fechada serão dadas por:

$$\left.\begin{array}{rcl} u_i & = & y_{c,i} \\ u_{c,i} & = & y_i \end{array}\right\},\quad i = 1, \ldots, n_{ESP}$$